Российская академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

В. В. Козлов

Теорема Эйлера–Якоби–Ли

2012

Тензорные инварианты

$$\dot{x}_i = v^i(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$M = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ — фазовое пространство.}$$

Функции (первые интегралы), векторные поля (поля симметрий), дифференциальные k-формы (порождающие интегральные инварианты).

$v = (v^1, \ldots, v^n)$ — тривиальный инвариант.

Полезно знать $n-1$ нетривиальных тензорных инвариантов.

***Примеры*:**

1°. $f_1, \ldots, f_{n-1} \implies$ конструктивное выпрямление траекторий.

2°. Эйлер–Якоби:

$$f_1, \ldots, f_{n-2} \ \text{ и } \ \Omega = \rho(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ \ (\operatorname{div} \rho v = 0).$$

$$\dot{c}_1 = \cdots = \dot{c}_{n-2} = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\lambda_1}{\Phi}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\lambda_2}{\Phi};$$

$$\lambda_k = \text{const}, \quad \Phi\colon D \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}.$$

Эйлер ($n = 2$): 1-форма $i_v \Omega$ замкнута, $= df$, f – интеграл.

3°. С. Ли: $u_1 = v$, u_2, ..., u_n порождают разрешимую алгебру Ли относительно операции $[\,\cdot\,,\cdot\,]$.
Важный пример: $[u_i, u_j] = 0$, поля $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы в каждой точке и не стеснены на M. Тогда $M \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и найдутся координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_k \mod 2\pi$, $y_{k+1}, \dots, y_n$ такие, что

$$\dot\varphi_j = \omega_j, \quad \dot y_s = l_s \quad (\omega, l = \mathrm{const}).$$

А. Эйнштейн (1917)
См. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ, 1937. (С. 90 и далее.)

Основная теорема

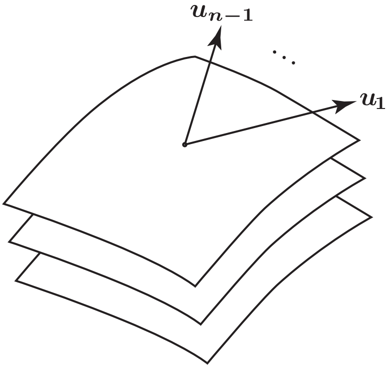
$n-2$ полей симметрий $u_2,\ldots,u_{n-1}$: $[u_1,u_j]=0$, $(u_1=v)$
$u_1,\ldots,u_{n-1}$ линейно независимы (на инвариантном подмножестве).
$L_v\Omega=0$, $L_v=i_vd+di_v$ — производная Ли.

Теорема 1. *Пусть*
1) $L_{u_s}\Omega=0$, $1\leqslant s\leqslant n-1$,
2) $u_1,\ldots,u_{n-1}$ *порождают нильпотентную алгебру Ли.*
Тогда исходная система дифференциальных уравнений интегрируется в квадратурах.

Алгебра g нильпотентна, если имеется цепочка идеалов

$$g=g_n\supset g_{n-1}\supset\cdots\supset g_0=\{0\}$$

такая, что $[g,g_i]\subset g_{i-1}$.
Если $[u_i,u_j]=\sum c_{ij}^k u_k$, то $c_{ij}^k=0$ при $k\geqslant j$.
Если $n=2$, то получаем результат Эйлера.
Если $n=3$, то имеется одно поле симметрий и $L_u\Omega=0$.



Локально слои есть поверхности уровня первого интеграла. Как его найти?

Лемма 1. ***Пусть*** $d\Omega = 0$, $u_1, \dots, u_m$ $(m \leqslant n)$ — ***набор векторных полей таких, что*** $L_{u_s}\Omega = 0 \quad (1 \leqslant s \leqslant m)$. ***Тогда***

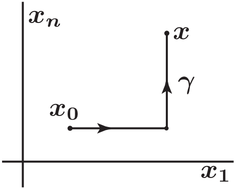
$$d(i_{u_m} \dots i_{u_2} i_{u_1} \Omega) = \sum_{i<j} \pm i_{[u_i, u_j]} i_{u_p} \dots i_{u_r} \Omega,$$

где $p, \dots, r$ — ***набор индексов*** $1, \dots, m$ ***за вычетом*** i ***и*** j.

Следствие 1. *Если* $[u_i, u_j] = \sum c_{ij}^k u_k$*, причем* $c_{kj}^k = c_{ik}^k = 0$*, то дифференциальная форма*

$$i_{u_m} \dots i_{u_1} \Omega$$

замкнута.



Следствие 2. *Если поля* $u_1, \dots, u_{n-1}$ *порождают нильпотентную алгебру, то (локально)*

$$i_{u_{n-1}} \dots i_{u_1} \Omega = df,$$

и f *— первый интеграл.*
Если $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$*, то* f *— однозначная функция на всем* M*.*

«Теорема Эйлера–Якоби–Ли». *Пусть система имеет*

1) k *независимых первых интегралов*

$$f_1, \ldots, f_k,$$

2) $n-k-2$ *независимых полей симметрий*

$$u_{k+1}, \ldots, u_{n-2},$$

порождающих вместе с полем $u_{n-1} = v$ *нильпотентную алгебру,*

3) *инвариантную форму объема* Ω,

причем

$$L_{u_j} f = 0, \qquad L_{u_j} \Omega = 0$$

для всех $k+1 \leqslant j \leqslant n-2$.

Тогда система интегрируется в квадратурах.

Замечание. $0 \leqslant k \leqslant n-2$. При $k = n-2$ получаем теорему Эйлера–Якоби, при $k = 0$ получаем теорему 1.

Регулярные системы

Снова $u_2, \dots, u_{n-1}$, $[u_1, u_j] = 0$ $(u_1 = v)$,
$L_v\Omega = 0$, Ω — форма объема на M.
Поля $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ порождают $(n-1)$-мерную алгебру Ли g;
пусть G — ее группа — $(n-1)$-мерная группа преобразований M.

Теорема 3. *Пусть M замкнуто и группа симметрий G не сохраняет n-форму Ω. Тогда исходная система имеет непостоянный первый интеграл.*

$\triangleleft$ $L_{u_j}\Omega \neq 0$ при некотором $j \geqslant 2$. Тогда

$$L_{u_j}\Omega = \lambda\Omega, \qquad \lambda\colon M \to \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

$L_v(\lambda\Omega) = \dot\lambda\Omega + \lambda L_v\Omega = \dot\lambda\Omega = L_v L_{u_j}\Omega = L_{u_j} L_v\Omega = 0.$
Итак, $\dot\lambda = 0$. Если $\lambda \neq \mathrm{const}$, то теорема доказана.
Пусть $\lambda = \mathrm{const}$. Из $(*)$ имеем: $d(i_{u_j}\Omega) = \lambda\Omega$. По формуле Стокса,

$$0 = \int_{\partial M} i_{u_j}\Omega = \int_M d(i_{u_j}\Omega) = \lambda \int_M \Omega.$$

Отсюда $\lambda = 0$. Но тогда G сохраняет Ω. $\triangleright$

$n = 3$

S. V. Bolotin, V. V. Kozlov // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 279–295.

Связные регулярные уровни функции λ — двумерные торы, в их окрестности существуют координаты $\Psi_1, \Psi_2 \mod 2\pi, I$ такие, что исходная система имеет вид

$$\dot{\Psi}_1 = \frac{\omega_1(I)}{\rho}, \quad \dot{\Psi}_2 = \frac{\omega_2(I)}{\rho}, \quad \dot{I} = 0, \qquad (**)$$

$\rho(\Psi, I) > 0$ — гладкая функция.

Это — теорема Пуанкаре–Зигеля–Колмогорова.

$\nu = \omega_1/\omega_2$ — числа вращения; $\Omega = \rho\, dI \wedge d\Psi_1 \wedge d\Psi_2$.

Теорема 4. *Пусть имеется поле симметрий, не сохраняющее Ω, а C — множество критических значений $\lambda\colon M \to \mathbb{R}$. Тогда*

1) *$\nu = \omega_1/\omega_2$ постоянно на каждой связной компоненте D множества регулярных точек $M \setminus \lambda^{-1}(C)$;*

2) *если $\nu|_D$ иррационально, то ω_1 и ω_2 постоянны на D.*

Другими словами, система $(**)$ — *вырожденная.*

$n = 3$ (продолжение)

Пусть $\rho = \sum \rho_{p_1 p_2}(I)\, e^{i(p_1\Psi_1 + p_2\Psi_2)}$ **— ряд Фурье плотности** ρ**.**

$P = \{I\colon p_1\omega_1(I) + p_2\omega_2(I) = 0$ **при некоторых целых** p_1, p_2 **и** $p_1^2 + p_2^2 \neq 0,\ \rho_{p_1 p_2}(I) \neq 0\}$.

Теорема 5. ***Пусть в интервале*** $I_1 < I < I_2$

1) $\omega_2 \neq 0$,

2) $\dfrac{d}{dI}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0$,

3) P ***всюду плотно в*** (I_1, I_2).

Если u ***— поле симметрий системы*** $(**)$ ***в области*** $\mathbb{T}^2 \times (I_1, I_2)$, ***то*** $u = \mu(I)v$, ***где*** μ ***— некоторая гладкая функция.***

Другими словами, в типичном случае все поля симметрий тривиальны.

Магнитная гидродинамика

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{rot}(v \times u), \quad v(x,t)$ — поле скоростей,

$u(x,t)$ — напряженность магнитного поля.

$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \quad \mathrm{div}\, u = 0.$

Стационарные «вихревые» течения: $u \times v \neq 0$.

$\dot{x} = v(x)$ — линии тока,

$\Omega = \rho(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ — 3-форма материи.

$w = \dfrac{u}{\rho}$ — поле симметрий (ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 341–342).

$L_w \Omega = 0$, так как $\mathrm{div}(\rho w) = 0$.

Теорема 6. ***Пусть область течения M компактна, односвязна и ограничена регулярной аналитической поверхностью, а v, u, ρ аналитичны в M и $u \times v \neq 0$. Тогда уравнение $\dot{x} = v(x)$ имеет непостоянный аналитический интеграл $f\colon M \to \mathbb{R}$ и почти все связные поверхности $B_c = \{x\colon f(x) = c\}$ (кроме, быть может, конечного числа) диффеоморфны либо двумерному тору (с условно-периодическими движениями), либо кольцу (с замкнутыми траекториями одинакового периода).***

В. И. Арнольд. ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 183–185.

В многосвязном случае траектории отдельных частиц могут всюду плотно заполнять всю область течения.