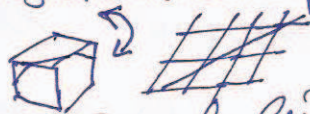


Д.Б.Фукс исследовал геодезические "кривые" (432)
на многогранниках, и это привело его с странным
наблюдением и задачей комбинаторики смежных
групп, которые тем-то напомнили мне эргодическую
теорию дифференциалов Бельтрами многоугольных билиардов.

Пример. Геодезические на кубе.

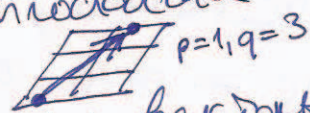
Рассмотрим (бесконечную) "развертку" куба в виде
плоскости с решеткой, квадраты которой имеют размер
граней куба.



На каждой грани геодезическая прямая, а при
пересечении ребра она продолжается на соседней
грань в виде такой прямой, что на развертке
оба отрезка составляют одну прямую.

Каждое пересечение прямой на плоскости развертки
с линией сетки (решетки) соответствует повороту
куба на 90° вокруг нужного ребра.

Замкнутая геодезическая — это такая прямая на
плоскости развертки, для которой последовательное
перемещение нужных поворотов (соответствующих
пересечениям с линиями сетки) поворачивает куб
тождественно. Но можно следить и за его последовательными
перемещениями при этих поворотах в $\mathbb{R}^3$, и тогда
произведение будет движением эргодического евклидова
пространства $\mathbb{R}^3$, сдвигающим его вдоль плоскости
развертки: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+p \\ y+q \\ z \end{pmatrix}$.



И вот, Фукс решает вопрос: какие векторы
 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ получаются из замкнутых геодезических
(и сколько таких геодезических соответствует каждому
реализуемому вектору: иногда это одно семейство,
соответствующее определенной последовательности поворотов, но
разным начальным точкам геодезической, а иногда — несколько, n ,
тогда возникает интересная теоретико-числовая функция, $n(p, q)$).

-2

Я задавал вычисления Фуксом вычетов, но они были удивительные: удивительны и ограничения, на (p, q) , при которых $n(p, q) > 0$, и не сразу, когда $n(p, q) = 1$, и набор значений, реализуемое при каком-то выборе пар (p, q) .

Аналогичные вопросы он исследовал и для других многогранников (например, додекаэдра и тетраэдра, но и для некоторых неправильных — тоже).

Но, насколько я помню, все эти результаты оставались не полными решениями вопросов, а, скорее, удивительными примерами их разрешимости, тогда как в общем виде задача не поддавалась.

Я сразу же спросил Фукса (как раньше, по поводу ценных эрбей, Карпенкова): а разрешима ли поставленная задача алгоритмически? Или может быть, удастся доказать её алгоритмическую неразрешимость? Остается только повторить этот открытый открытый вопрос.

Сходные алгоритмические вопросы возникали и бедность этого моего ученика, Жак-Оливье Муссаффа, по комбинаторике групп кос и эйлеровых кос — это он изобрел разн успешного перемешивания распада из сработавших булылок на факторе по производству стекла. Перемешивают n стержней, вертикальных, с координатами $(x_i(t), y_i(t))$ для i -го стержня, кося образуют график этих движений в пространстве времени $\mathbb{R}^3$, и вот, оказывается, некоторые косы перемешивают лучше, а другие хуже — и это связано с алгебраичностью некоторых чисел, описывающих эти динамические системы, и даже с некоторыми группами Галуа!

3. Статистика периодических решений хаотических динамических систем Фабриати.

Здесь (статья войдет в Московском Математическом журнале, там имени Васильева) анализируются диаграммы Юнга перестановок конечных множеств, заданные разбиением множества на циклы перестановки. Для случайных перестановок n объектов получающиеся своеобразные усредненные статистические (при усреднении по $n!$ перестановкам) инварианты диаграмм выходят то же, что при экспериментах со случайными перестановками, вроде тасования колоды карт (например, я использовал в качестве датчиков случайных чисел номера телефонов из энциклопедических справочников разных стран, то таблицы полей Телуэ из p^2 элементов) и вот, я сравниваю эти средние со статистикой таких же диаграмм для перестановок точек конечного тора $(\mathbb{Z}/n)^2$ (из n^2 точек) преобразованием $A(x,y) = (2x+y, x+y)$ которое я называю "преобразованием Фабриати", а физика - "кошкой Арнольда".

И статистики (при $n \rightarrow \infty$) получаются совсем не те, что для случайных перестановок. Например, иначе ведут себя такие параметры диаграммы Юнга: длина x , высота y , площадь $\lambda = s/(x,y)$ (где $s = \sum x_i$ - площадь диаграммы), $m = y/x$ я называю "асимптотический" и у всех этих величин интересные асимптотики при $s \rightarrow \infty$, разные для случайных перестановок и для циклов динамики кошки.

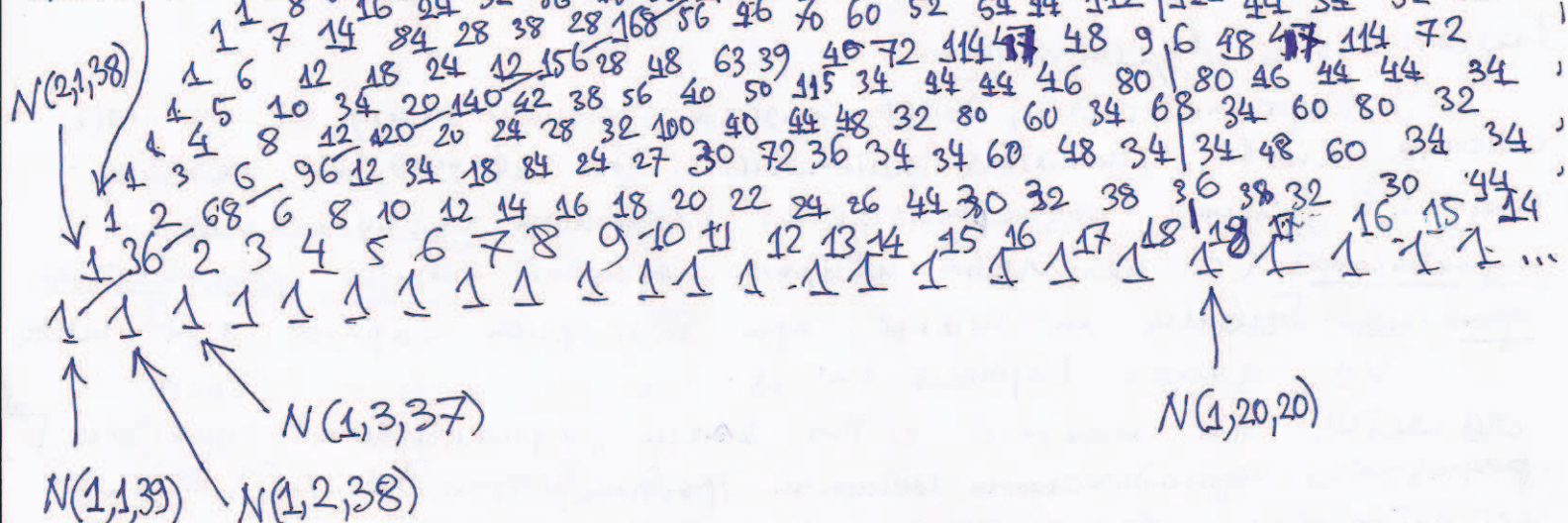
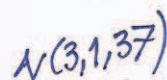
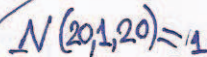
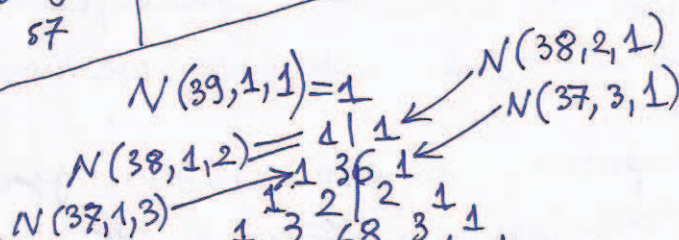
4. Упоминую еще обширное исследование чисел Фробениуса $N(a_1, \dots, a_n)$ конгрупп натуральных чисел по сложению: если $(a_1, \dots, a_n) = 1$, то величина $N(a_1, \dots, a_n)$ выражают все целые $\ell \geq N$, и вот свойства этого числа $N(a,b) = (a-1)(b-1)$ (скажем, $N(3,5) = 8$), но Сильвестр посчитал $N(a,b,c)$ и асимптотики при больших a, b, c нет, ни формулы для $N(a,b,c)$, ни асимптотики при $a, b, c \rightarrow \infty$ вроде я доказываю оценки сверху и снизу вроде $C_1(\vec{a}) \leq N(\vec{a}) \leq C_2(\vec{a})$ (вектора $\vec{a}$) где $C(\vec{a}) = a_1 + \dots + a_n$ и $\vec{a}(\vec{a}) = \vec{a}/C(\vec{a})$ - направление. Тогда интересно здесь то, что для некоторых направлений $\vec{a}$ достигается левая асимптотика, а для других - правая, и $\vec{a}$, который усреднен уже по симплексу направлений $\vec{a}$, же имеет даже экспериментальной предположительной множестве асимптотический средний при $\vec{a} \rightarrow \infty$.

-3-

$$\frac{23}{47} \approx \frac{1}{2} \text{ загл. догн. || } \text{постоянная.}$$

2020-01-01

$$N = 47 \cdot 46 \neq 19x + 15y + 7z$$



В московском метро, около Академической, где мне высадить, меня взял за руку пассажир и сказал: „Вы меня не узнаете, Владимир Червич? А вот лет тридцать назад вы читали нам в Хабаровске лекции, очень интересные. И вот, теперь я учусь на одну сессию из Хабаровска в Москву, но в Институте Стеклова мне сказали, что вы уже ушли в ИКИ, и я просто ушел оттуда — а вы как раз едете обратно в моем поезде метро!“

Оказывается, этот математик (Владимир Бондаровский) занимался монотонными целыми дробями. Сейчас он доказал, что и для копечных, и для перриодических дробей десятимаятка срединна (при увеличении периода и граний паруса) — такая же, как у Вас с Максимом, универсальная (он раньше уже это опубликовал для обычных целых дробей, со своей ученицей, Абзиевой).

Причем, по его словам, угадал даже ответы и на мои (оставленные Вами в стороне) вопросы о величинах вероятностей (треугольников, четырехугольников, пятиугольных углов и т.п.) и об их зависимости от размерности (будут ли целочисленные перриоды в трехмерном случае длиннее в среднем, чем в двумерном или в четырехмерном).

Он опроверг и на много других вопросов (например, всякий ли ^{малый} кусок паруса реализуется в перриодическом случае, всякий ли большой кусок аппроксимируется перриодическим с любой точностью и т.д.).

К сожалению, свое обещание написать из Хабаровска (или теперь уже Владивостока) несколько сообщений о всех этих новостях он пока не выполнил, но я подумал, что это может быть интересно даже и Вам, — Максиму, и Коркиной, и Муссагирю.

У Коркиной, кстати, дочка кончила среднюю школу, от чего мать смогла снова заниматься математикой. Она звонила, что доказала также: в больших размерностях (≥ 5 ?) возможна монотоническая перриодизация (с неполным набором периодов) паруса трансцендентного ортамта. Бывали ли такое при двумерном парусе в $\mathbb{R}^3$ -пространстве.

Из задач Карпенкова я все не возмуч в толк, является ли вопрос о том, какие „триангуляции“ тора (даже T^2) реализуются перриодическими целыми дробями (матрицы $A \in SL(3, \mathbb{Z})$), алгоритмически разрешимым вопросом, или нет?