

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Reduction theorem and normal forms of linear second order PDEs on the plane

Alexey Davydov

Vladimir State University
named after A.G. and N.G.Stoletovs

Analys and Singularities, December 17 - 21, 2012

Content

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- 1 Examples and History
- 2 Classical results
- 3 Folded points
- 4 Classifications theorem
- 5 Reduction Theorem
- 6 Proof Sketch

Binary implicit equations

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- Arnold's seminar problem 1973-5: describe generic singularities of implicit differential equations and their bifurcations
- Characteristic equation ($=\chi$ -equation)

$$a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$$

for the PDE equation

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad a, b, c \in C^{k \geq 0}(\mathbb{R})$$

is defined in hyperbolic domain $D = b^2 - ac \geq 0$ and is not smoothly resolvable with respect to $dy : dx$ at points with $D = 0$.

- Problem: reduce χ -equation to a simple form by smooth change of variables and multiplication by smooth non-vanishing function.

Local results:

χ -equation	title	conditions
$dy^2 + dx^2 = 0$	Laplas	$D < 0$ (elliptic point)
$dy^2 - dx^2 = 0$	wave	$D > 0$ (hyperbolic point)
$dy^2 - xdx^2 = 0$	Tricomi- Cibrario	$D = 0, dD \neq 0,$ $aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2 \neq 0$

Problem of the Swedish-Norway King Oscar II concur

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem



The formulation: to describe the curves defined by ODEs (cm. Acta Mathematica v.7 (1885), 1–6.)

Beginning of the theory: Laplas and Wave equation XVIII century; Tricomi-Cibrario 1920-1932).

Folded singular points

Reduction theorem and normal forms of linear second order PDEs on the plane

Alexey Davydov

Examples and History

Concur of Swedish-Norway King Oscar II

Folded singular points

Reduction Theorem

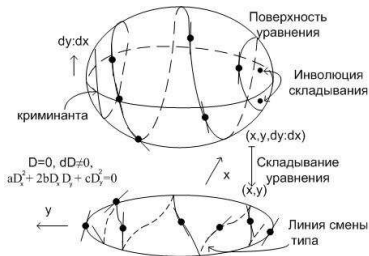


Figure: Folding and folding involution

Предложение

Smooth family of χ -equations with $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, near a point (P, ε_0) , where χ -direction is tangent to the change type line and $|D_x(P)| + |D_y(P)| \neq 0$ takes the form $dy^2 = C(x, y, \varepsilon)dx^2$ (1) with some smooth function C , $C(P, \varepsilon_0) = C_x(P, \varepsilon_0) = 0 \neq C_y(P, \varepsilon)$, after an appropriate selection of smooth coordinates foliated over the parameter with the beginning at this point and multiplication by non-vanishing function.

In the Proposition's coordinates:

- $(x, p = dy/dx)$ – local coordinates at the equation surface near the origin;
- $(2p : -(C_x + pC_y))$ и $\sigma : (x, p) \mapsto (x, -p)$ – equation direction field and equation folding involution in the coordinates;
- $v := (2p, -C_x - pC_y)$ – vector field defining the equation direction field, and $(0, 0)$ is its singular point;
- compatibility σ and v : the determinant of $|v \quad \sigma_* v|$ has exactly second order zero at the discriminant $(= 4p^2 C_y)$;
- Characteristic of folded singular points like eigenvalues, resonability etc. are the respective characteristics of the field $(2p, -C_x - pC_y)$ at the origin.
- an exponent α of (folded) singular point is defined as the ratio of the eigenvalue having maximum modulo to the one with minimum one for the saddle and node, and as the modulo of ration the imaginary part to the real one for the focus.

Classifications theorems

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Теорема (Давыдов'1984)

χ -equation near its non-resonance folded singular point P of type saddle and node, or else focus has the form $dy^2 = (y - kx^2)dx^2$ with $k = \alpha(\alpha + 1)^{-2}/4$ and $k = (1 + \alpha^2)/16$, respectively, where α is the exponent of the point, after an appropriate selection C^∞ -coordinates with the origin at P and multiplication by non-vanishing smooth function.

Теорема (А.Д., Чинь Тхи Зиеп Линь)

For any $r \in \mathbb{N}$ a germ of C^∞ -family of χ -equations with a parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}^{m \geq 1}$ at its non-resonance folded singular point (P, ε_0) of type saddle and node, or else focus is the germ at the origin of the equation $dy^2 = (y - kx^2)dx^2$ with $k = \alpha(\varepsilon)(\alpha(\varepsilon) + 1)^{-2}/4$ and $k = (1 + \alpha^2(\varepsilon))/16$, respectively, where $\alpha(\varepsilon)$ is the respective deformation of the exponent α , after an appropriate selection of an appropriate C^r -coordinates x, y foliated over the parameter and multiplication by non-vanishing C^r -function.

Comments and model equations

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- folded focus and generic node are non-resonance, and the class of transformation smoothness could be taken C^∞ ;
- finitely smooth versal deformation of non-resonance point has only one parameter k ;
- topological smooth versal deformation of non-resonance point has no parameter, namely, one could take k being equal to $-1, 1/20$ and 1 for the cases of saddles, nodes and foci respectively. The model equations are:

$u_{xx} - (x^2 + y)u_{yy} = 0$	folded saddle , $k = -1$
$u_{xx} + (x^2/20 - y)u_{yy} = 0$	folded node , $k = 1/20$
$u_{xx} + (x^2 - y)u_{yy} = 0$	folded focus, $k = 1$

Reduction Theorem

Reduction theorem and normal forms of linear second order PDEs on the plane

Alexey Davydov

Examples and History

Concur of Swedish-Norway King Oscar II

Folded singular points

Reduction Theorem

For a C^1 vector field (or direction) field v two germs of the same nature are called C_v^r -equivalent, $r \geq 0$, if they are carried out one into another by C^r -diffeomorphism preserving phase (or integral, respectively) curves of v .

C_v^r -equivalence of two germs of families is C^r -diffeomorphism preserving the natural foliation over the family parameter and the phase curves of the field $(v, \dot{\varepsilon} = 0)$; C_v^r -equivalence is called strong, if it preserves the parameter

А.Д., Чинь Тхи Зиен Линь

For a germ at the origin of smooth family v of vector or direction field with a parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$, the germs at the origin of two families of involutions with the same parameter and being compatible with v are C_v^∞ -equivalent, if these families of involutions have the same surface of fix points, which passes through the origin, and the field $(v, \dot{\varepsilon} = 0)$ (or $(v : 0)$, respectively) is not tangent to this surface almost everywhere near the origin.

Сведение к теореме редукции: лемма 1,2

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Лемма 1

Для ростка в нуле C^1 -векторного поля v с гиперболической особой точкой в нуле, не являющейся дикритическим узлом, два различных направления в нуле переводятся одно в другое диффеоморфизмом фазового потока поля v , если и только если их можно соединить в пространстве направлений в нуле непрерывной кривой, не проходящей через собственные направления поля v в нуле. ДЛ1

Лемма 2

Для ростка в нуле C^1 -семейства v векторных полей с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ и с гиперболической особой точкой в нуле при $\varepsilon = 0$, не являющейся дикритическим узлом, ростки в нуле $(0, 0, 0)$ двух гладко вложенных поверхностей, содержащих ось параметра, сильно C_v^∞ -эквивалентны, если в плоскости $\varepsilon = 0$ в нуле сечения этих поверхностей касаются друг друга, но ни одно из собственных направлений поля v не касается этих сечений. ДЛ2

Доказательство теоремы о нормальных формах

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Вывод C^r -нормальной формы, $r \geq 1$:

- При $n \gg r$ для поля $\tilde{v}$ получаем C^n -гладкую нормальную форму $(\zeta, \alpha(\varepsilon)\eta)$ для седла и узла и $(\zeta - \alpha(\varepsilon)\eta, \alpha(\varepsilon)\zeta + \eta)$ для фокуса, применяя теорему Ильяшенко и Яковенко и умножая $\tilde{v}$ на не обращающиеся в ноль функции;
- В случае седла и узла, меняя знак ζ при необходимости, можно расположить кривинанту в любом из секторов между собственными направлениями;
- заменой приведем поле к виду $(2\eta, k(\varepsilon)\zeta + \eta)$;
- Считая для седла и узла кривинанту расположенной в секторе с осью $O\zeta$ и используя леммы 1 и 2, переведем поверхность кривинант в эту ось;
- Семейство инволюций $(\zeta, \eta, \varepsilon) \mapsto (\zeta, -\eta, \varepsilon)$ согласовано с полем в нормальной форме $\Rightarrow$ применяя теорему редукции, получаем нужные нормальные формы класса гладкости $\geq r$.

Теорема о нормальных формах доказана.

[1] Давыдов А. А., Чинь Тхи Зиеп Л. Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек // Успехи матем. наук. –2010. – Т. 65, вып.5(395). – С. 189-190.

[2] Davydov A. A., Trinh Thi Diep Linh. Reduction theorem and normal forms of linear second order mixed type PDE families in the plane //TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.2, № 1, 2011, 44-53pp.

[3] Чинь Тхи Зиеп Л. Теорема редукции для нормальных форм сложенных особых точек семейств бинарных уравнений // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическими системам, Суздаль, 2–7 июля 2010 : тезисы докладов. – М.: МИАН, 2010. – С. 193.

[4] Чинь Тхи Зиеп Линь. О нормальных формах семейств уравнений смешанного типа на плоскости //Труды ВлГУ, 2010, С. 133-137.

ОСНОВНЫЕ ССЫЛКИ

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

[1] Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю. Конечно-гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей. Успехи матем. наук, 1991.– Том 46, вып. 1(277), с.3–39.

[2] Кузмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.:Изд-во ЛГУ, 1990.

[3] Acta Mathematica v.7 (1885), 1-6.

[4] F. Tricomi – Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto// Memorie della R.Academia Nazionale dei Lincii, serie V, vol. XIV, fasc. VII (1923).

[5] M.Cibrario –Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto// Ist. Lombardo, Rend., II. Ser. 65 (1932), 889–906.

[6] Давыдов А.А. Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки. Функц. анализ и его приложения, 1985, т. 19, вып. 2, с. 1–10.

[7] A.A. Davydov - Qualitative theory of control systems//
Translations of Mathematical Monographs, Vol. 141, 1994, AMS
in cooperation with MIR (Moscow), Providence, Rhode Island,
147 pp.

[8] F. Tari. Real and Complex Singulaties, LMS Lecture Notes
Series, 1, eds. M. Manuel, M. C.Romero Fuster, C.T.C. Wall,
Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Доказательство теоремы редукции

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- σ_1 и σ_2 – семейства инволюций; возьмём расслоенные лок. координаты, что $\sigma_1 : (x, y, \varepsilon) \mapsto (x, -y, \varepsilon)$ (если $f = f(x, y, \varepsilon)$ и $|f_x(O)| + |f_y(O)| \neq 0$, то можно $x = f + \sigma_1 * f$ и $y = f - \sigma_1 * f$);

- Согласованность семейств $v = (v_1, v_2)$ и $\sigma_1 \Rightarrow$ величина

$$|v - \sigma_{1*}v| = -v_1(x, y, \varepsilon)v_2(x, -y, \varepsilon) - v_1(x, -y, \varepsilon)v_2(x, y, \varepsilon)$$

имеет нуль второго порядка на $y = 0$, в частности $v_1v_2|_{y=0} \equiv 0$.

- Но v трансв. $y = 0$ почти всюду $\Rightarrow$ вектор $= (0, 1, 0)$ собственный на $y = 0$ для σ_{1*} и σ_{2*} с собств. числом $-1 : \Rightarrow$

$$\sigma_2 : (x, y, \varepsilon) \mapsto (x + y^2 r(x, y, \varepsilon), -y + y^2 s(x, y, \varepsilon), \varepsilon)$$

- $\Rightarrow \exists \zeta = x + y^2 R(x, y, \varepsilon), \eta = y + y^2 S(x, y, \varepsilon)$ с $R, S \in C^\infty$, что

$$\sigma_2 : (\zeta, \eta, \varepsilon) \mapsto (\zeta, -\eta, \varepsilon)$$

- Возьмём деформ. $\gamma_t : (\zeta_t, \eta_t, \varepsilon) \mapsto (\zeta_t, -\eta_t, \varepsilon)$ семейств σ_1 в σ_2 с $\zeta_t = x + ty^2 R(x, y, \varepsilon), \eta_t = y + ty^2 S(x, y, \varepsilon); \gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = \sigma_2$.

Доказательство теоремы редукции

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Скорость деформации инволюции – это скорость движения образа точки. Скорость нашей деформации V_t имеет нуль второго порядка на $y = 0$ ($\eta_t = 0$) $\Rightarrow$ (индекс t всюду опускаем)

$$V = \eta^2(h(\zeta, \eta, \varepsilon), r(\zeta, \eta, \varepsilon)) \quad \text{с} \quad h, r \in C^\infty \quad (1)$$

Лемма

Деформ. id со скор. $(s, 0)$ даёт деформ. $\gamma : (\zeta, \eta, \varepsilon) \mapsto (\zeta, -\eta, \varepsilon)$ со скор. $V = (s - \gamma_* s, 0)$, $\gamma_* V = -V$.

- Учитывая $\gamma_* V = -V$ и вид (1), получаем

$$\begin{aligned} h(\zeta, -\eta, \varepsilon) &= -h(\zeta, \eta, \varepsilon) & \Rightarrow & & h(\zeta, \eta, \varepsilon) &= \eta p(\zeta, \eta^2, \varepsilon) \\ r(\zeta, -\eta, \varepsilon) &= r(\zeta, \eta, \varepsilon) & & & r(\zeta, \eta, \varepsilon) &= q(\zeta, \eta^2, \varepsilon) \end{aligned}$$

с некоторыми гладкими p, q .

- Деформ. id со скоростью $(s, 0) = (fv, 0)$ с функцией $f \in C^\infty$ даёт сильную C_v^∞ -эквивалентность $\Rightarrow$ достаточно решить гомологическое уравнение

$$V = fv - (\gamma^* f) \gamma_* v \quad (2)$$

Доказательство теоремы редукции

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- Подставляя в (2) $v = (\eta l(\zeta, \eta, \varepsilon), m(\zeta, \eta, \varepsilon))$ и $f = u(\zeta, \eta^2, \varepsilon) + \eta w(\zeta, \eta^2, \varepsilon)$ с некоторыми $l, m, u, w \in C^\infty$, и приравнивая чётную и нечётную по η части, получим линейную систему уравнений на u, w :

$$\begin{cases} u(l + l_-) + w\eta(l - l_-) = \eta^2 p \\ u(m + m_-) + w\eta(m - m_-) = \eta^2 q \end{cases} \quad \text{с} \quad \begin{cases} l_- = l(\zeta, -\eta, \varepsilon) \\ m_- = m(\zeta, -\eta, \varepsilon) \end{cases}$$

- Определитель этой системы имеет вид

$$\eta^2 [L + h(\zeta, \eta, \varepsilon)] \quad \text{с} \quad L = 2[l(0, 0, 0)m_\eta(0, 0, 0) - l_\eta(0, 0, 0)m(0, 0, 0)]$$

и $h \in C^\infty, h(0) = 0$. Имеем $L \neq 0$ в силу согласованности семейств v и γ . Следовательно, последняя система и уравнение (2) гладко разрешимо.

Теорема редукции доказана.

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Доказательство леммы1

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

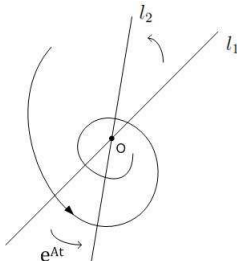
Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

- Необходимость: диффеоморфизм, сохраняющий фазовые кривые поля v , переводит в себя каждый из открытых секторов, на которые пространство направлений в нуле (это одномерное проективное пространство) разбивается собственными направлениями поля v в нуле.

- Достаточность: два направления из одного сектора поля $\tilde{v} = Ax + \dots$, имеющего в нуле невырожденную особую точку, переводятся одно в другое отображением e^{At} при подходящем t , что нетрудно видеть $\Rightarrow$ преобразование g^t осуществляет такой же перевод. Лемма доказана.



Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Доказательство леммы2

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

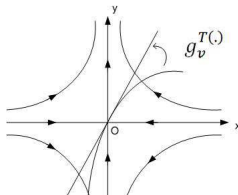
Folded
singular
points

Reduction
Theorem

• Пусть $(\tilde{v}, \dot{\varepsilon} = 0)$ задаёт $(v : 0)$ и имеет при $\varepsilon = 0$ невыр. ос. т. в нуле: $\Rightarrow$ при малых ε есть близкая ос. т. $(x = X(\varepsilon), y = Y(\varepsilon), \varepsilon)$, $X, Y \in C^\infty$). Заменой x, y сдвинем её в ноль.

• При малых ε сделаем σ -процесс по x, y с центром в нуле; π_1 и π_2 станут гладко вложенными поверхностями, проходящими при $\varepsilon = 0$ через одну и ту же точку вклеенной проективной прямой трансверсально этой прямой. Поле $\tilde{v}$ – продолжается в эту точку регулярно и касается вклеенной прямой;

• $\Rightarrow$ время движения с полем $(\tilde{v}, 0)$ от π_1 до π_2 – C^∞ -функция τ на π_1 . Нужную C_v^∞ -эквивалентность даёт $g^{T(\cdot)}(\cdot)$, где T – гладкое продолжение функции τ в окрестность нуля, а g^t – отображение фазового потока поля $(\tilde{v}, \dot{\varepsilon} = 0)$. Лемма доказана.



Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Определение

Reduction
theorem and
normal
forms of
linear second
order PDEs
on the plane

Alexey
Davydov

Examples
and History

Concur of
Swedish-
Norway King
Oscar II

Folded
singular
points

Reduction
Theorem

Определение

Особая точка поля направлений уравнения называется сложеной, если эта точка – критическая точка складки Уитни складывания уравнения. Поле направлений типичного уравнения имеет лишь невырожденные особые точки (типов седло, узел и фокус), и каждая из них является сложеной.

Теорема(Уитни)

Отображение двумерного многообразия в двумерное устойчиво в точке тогда и только тогда, когда в подходящих локальных координатах (x_1, x_2) в прообразе и (y_1, y_2) в образе отображение записывается в одном из трех видов:

- 1) $y_1 = x_1, y_2 = x_2$ (регулярная точка);
- 2) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2$ (складка);
- 3) $y_1 = x_1^2 + x_1 x_2, y_2 = x_2$ (сборка)
(рассматриваемая точка имеет координаты $x_1 = x_2 = 0$).