О промежуточной асимптотике вида системы волн в задаче о распаде разрыва для закона сохранения, уравнения типа Бюргерса, Колмогорова-Петровского-Пискунова, уравнения типа Кортевега-де Фриза-Бюргерса и уравнения Полтеровича-Хенкина

По мотивам кандидатской диссертации (*2007 г.*)
Науч. рук. проф. А. А. Шананин

Гасников А. В.
доцент каф. МОУ ФУПМ, с.н.с. ПреМоЛаб МФТИ
e-mail: avgasnikov@gmail.com

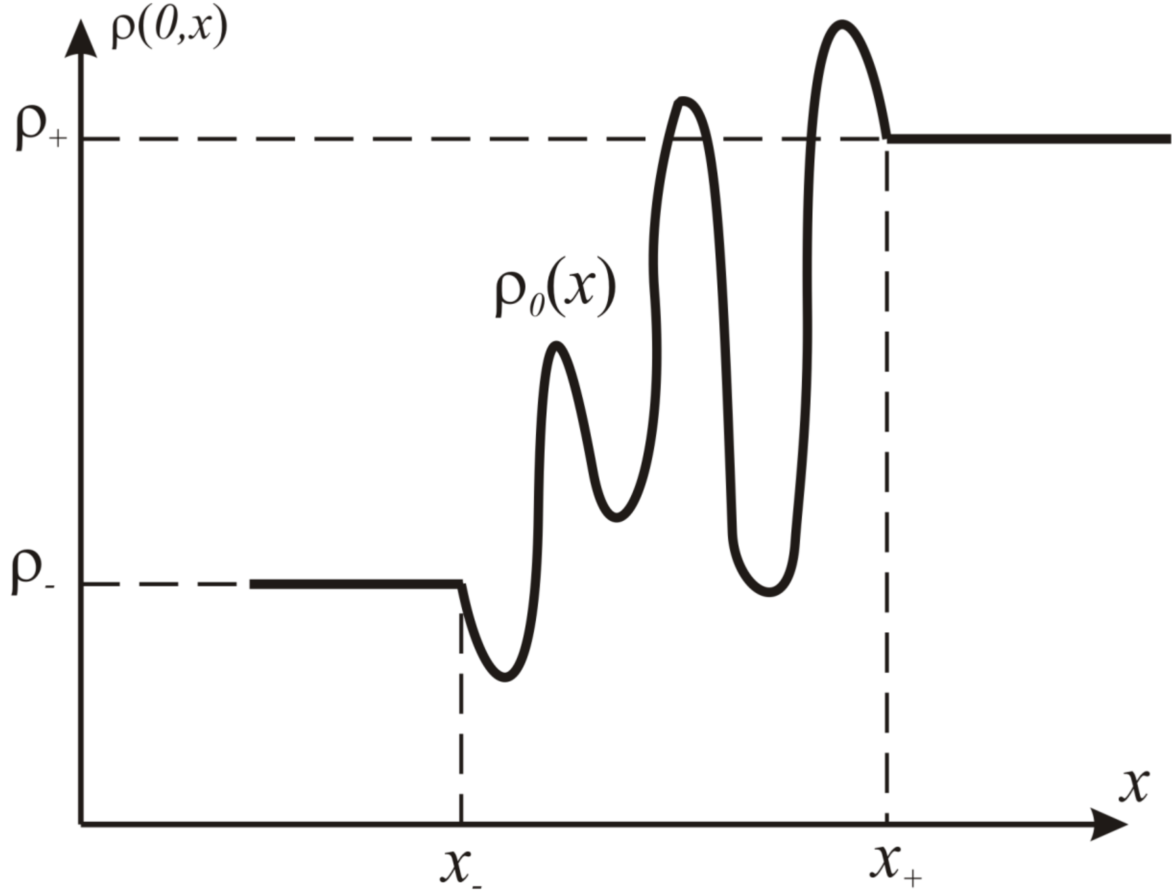
МФТИ, 29 ноября 2012 г.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

Уравнение типа Бюргерса (закон сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=0$$

Закон сохранения



Начальное условие типа разрыва

Уравнение Бюргерса (Х. Бэйтман (1915), Ж. Лерэ (1934), Дж. Бюргерс (1940), Е. Хопф (1950)): $\boxed{\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}}=\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}^2}}$, $\varepsilon>0$. С помощью замены Форсайта–Флорина–Хопфа–Коула: $\boxed{\tilde{\rho}=-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}(\ln w)=-2\varepsilon\frac{w_{\tilde{x}}}{w}}$; начальная задача Коши для уравнения Бюргерса сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde{x}^2},\ w(0,\tilde{x})=\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^{\tilde{x}}\tilde{\rho}_0(\xi)\,d\xi\right).$$

Используя этот факт, Е. Хопф в 1950 г. изучал поведение решения начальной задачи Коши для уравнения Бюргерса. Так, например, им был обоснован предельный переход (получивший название ***метода исчезающей вязкости***) при $\varepsilon\to 0+$ от уравнения Бюргерса к уравнению Хопфа:

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{x}}=0.$$

Казалось бы, что достаточно (следуя идеям Н.М. Гюнтера, С.Л. Соболева, Л. Шварца в линейном случае) понимать обобщенное решение закона сохранения в слабом смысле. Однако (О.А. Олейник (1957)) такое определение решения не обеспечивает его единственности.

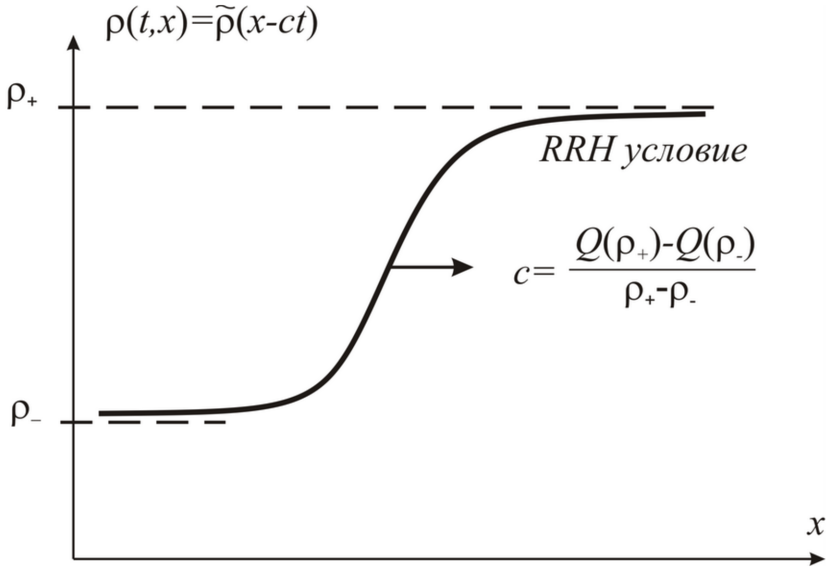
Корректный способ заключается в том, чтобы понимать решения задачи Коши для закона сохранения $\rho(t,x)$, *как предел* (*почти всюду по* x *при любом фиксированном значении* $t>0$) *при*

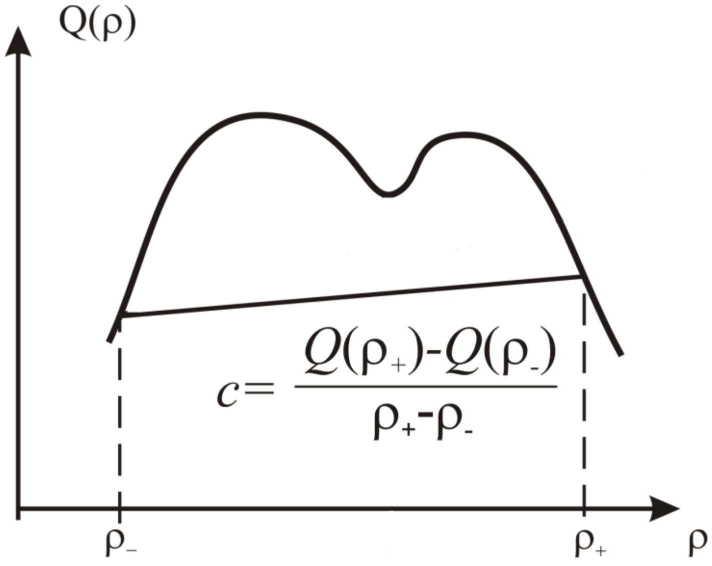
$$\varepsilon \to 0+,\ D(\rho) := \varepsilon D(\rho),\ D(\rho) > 0$$

решений задач Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью $\rho_\varepsilon(t,x)$:

$$\left\|\rho(t,\cdot)-\rho_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = \mathrm{O}\left(\sqrt{\varepsilon t}\right)$$ (*оценка Н.Н. Кузнецова* (1975)).

Так определенное решение принято называть обобщенным решением.

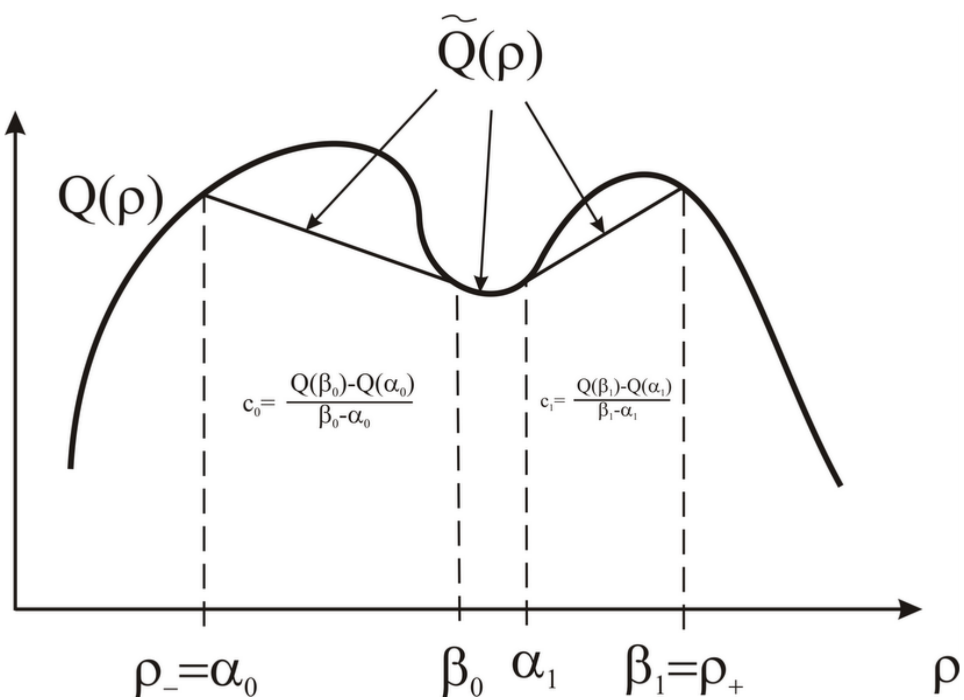


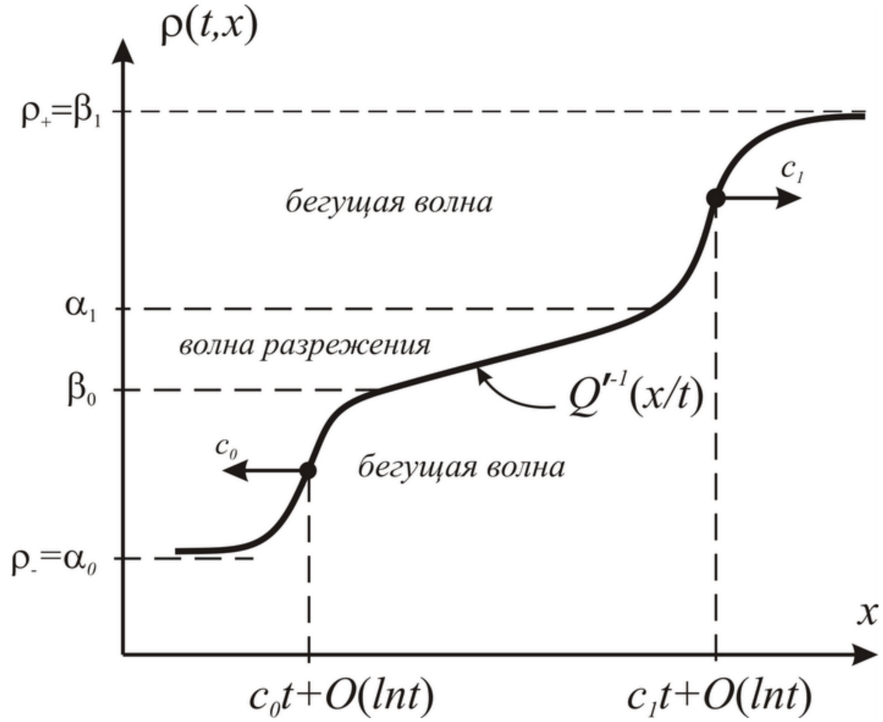


$$\varepsilon \frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon(s)}{ds} = \Big(Q\big(\tilde{\rho}_\varepsilon(s)\big) - c\tilde{\rho}_\varepsilon(s) - \big(Q(\rho_-) - c\rho_-\big)\Big) \Big/ D\big(\tilde{\rho}_\varepsilon(s)\big)$$

$$b - a = \int_a^b \varepsilon D(\tilde{\rho}_\varepsilon)\Big(Q(\tilde{\rho}_\varepsilon) - c\tilde{\rho}_\varepsilon - \big(Q(\rho_-) - c\rho_-\big)\Big)^{-1} d\tilde{\rho}_\varepsilon \qquad \lim_{s\to\pm\infty} \tilde{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_\pm$$

$$\frac{\partial Q'^{-1}(x/t)}{\partial t} + \frac{\partial Q\big(Q'^{-1}(x/t)\big)}{\partial x} = Q'^{-1}{}'(x/t)\left\{-\frac{x}{t^2} + Q'\big(Q'^{-1}(x/t)\big)\frac{1}{t}\right\} = 0$$





выполняются условия общего положения

$$\tilde{\tilde{\rho}}\left(t,x;\left\{d_k(t)\right\}_{k=0}^{n}\right)=\begin{cases}\rho_-, & x<c_0t-\sqrt{t},\\ \tilde{\rho}^k\left(x-c_kt+d_k(t)\right), & c_kt-\sqrt{t}\le x<c_kt+\sqrt{t},\ k=0,\dots,n,\\ Q'^{-1}(x/t), & c_{k-1}t+\sqrt{t}\le x<c_kt-\sqrt{t},\ k=1,\dots,n,\\ \rho_+, & x\ge c_nt+\sqrt{t}\end{cases}$$

$$d_k(t)=\frac{2}{\beta_k-\alpha_k}\left(\frac{D(\alpha_k)}{Q''(\alpha_k)}-\frac{D(\beta_k)}{Q''(\beta_k)}\right)\varepsilon\ln t+\mathrm{O}\left(\left(\varepsilon\ln t\right)^{2/3}\right)+\mathrm{O}(1),\ \beta_{k-1}<\alpha_k,\ \beta_k<\alpha_{k+1},\ Q''(\alpha_k)>0,\ Q''(\beta_k)>0$$

$$\rho(t,x)=\tilde{\tilde{\rho}}\left(t,x;\left\{d_k(t)\right\}_{k=0}^{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$$

$$\rho(t,x)=\tilde{\tilde{\rho}}\left(t,x;\left\{d_k(t)\right\}_{k=0}^{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)?$$

Основной инструментарий

принцип сравнения:

$$\rho^1(0,x)\le\rho^2(0,x)\Rightarrow\rho^1(t,x)\le\rho^2(t,x),\ t\ge 0$$

принцип сравнения на фазовой плоскости:

$$\left\{\rho^1(0,x)<\rho^2(0,x)\Rightarrow\rho^1(0,x')\le\rho^2(0,x'),\ \ x'\ge x\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\rho^1(t,x)<\rho^2(t,x)\Rightarrow\rho^1(t,x')\le\rho^2(t,x'),\ \ x'\ge x\right\},\ t\ge 0.$$

$d_k(t)$ «разумно» определять из «локализованных законов сохранения»:

$$I_k\left(t; d_k(t)\right) = \int\limits_{c_k t-\sqrt{t}}^{c_k t+\sqrt{t}} \left\{\rho(t,x) - \tilde{\rho}^k\left(x - c_k t + d_k(t)\right)\right\} dx \equiv 0.$$

Если приравнять нулю полную производную по времени от $I_k\left(t; d_k(t)\right)$, используя уравнение, то получим оценку $d_k(t)$ (приняв априорно за гипотезу, которую апостериорно проверим, что $d_k'(t) = o\left(t^{-1/2}\right)$). Точность оценки определяется значениями разностей:

$$\rho\left(t, c_k t \pm \sqrt{t}\right) - \tilde{\rho}^k\left(\pm\sqrt{t} + d_k(t)\right) \text{ и } \rho_x\left(t, c_k t \pm \sqrt{t}\right) - \tilde{\rho}_x^k\left(\pm\sqrt{t} + d_k(t)\right).$$

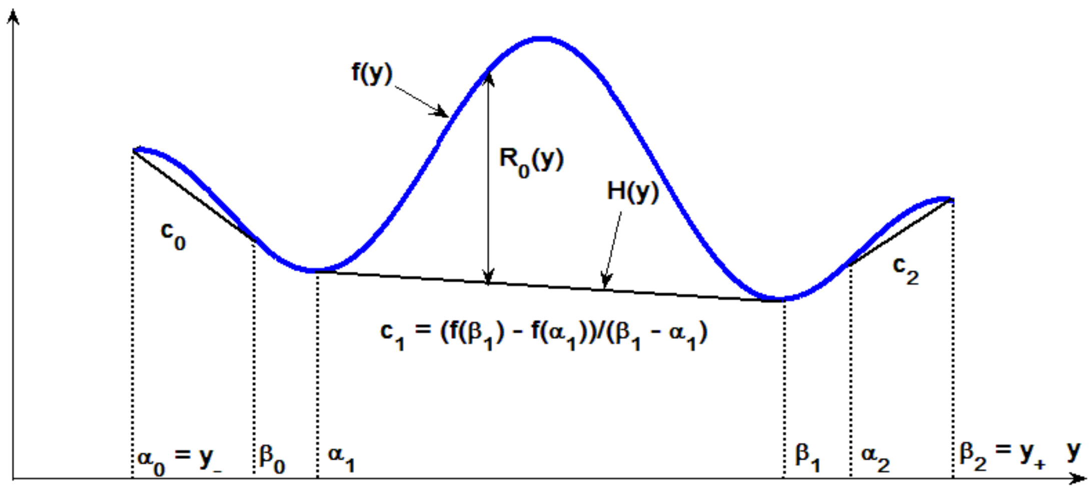
Эти значения в свою очередь определяются исходя из исследования сходимости решения к системе волн на участках, соответствующих поведению «волна разрежения». Оказывается, что выбор зависимости $\sqrt{t}$ в определении системы волн и в определении локализованных законов сохранения даёт наилучшую по точности оценку сдвигов фаз, исходя из имеющихся способов оценки разностей.

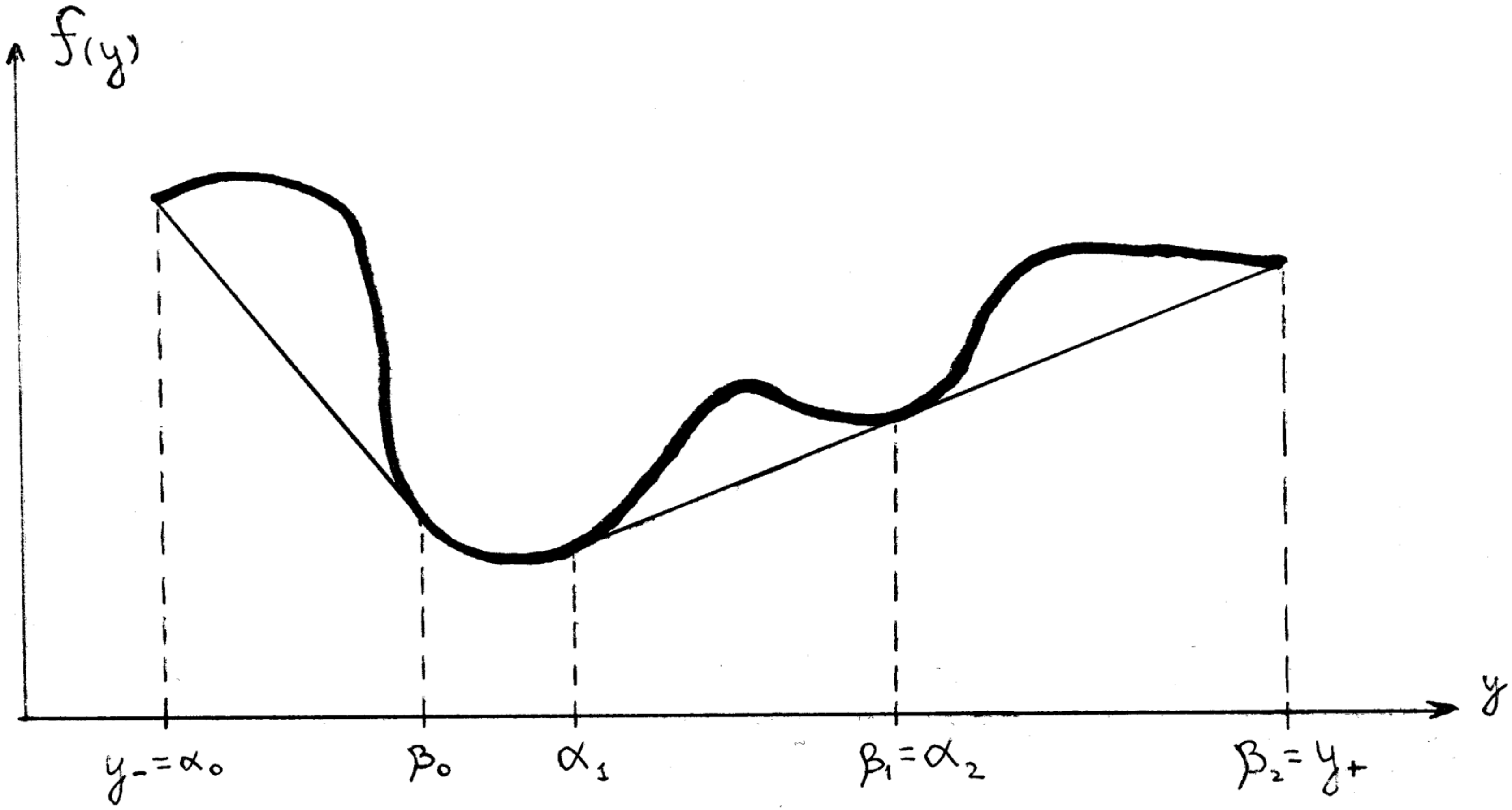
Схема доказательства

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \nu(y)}{\partial x^2}$$

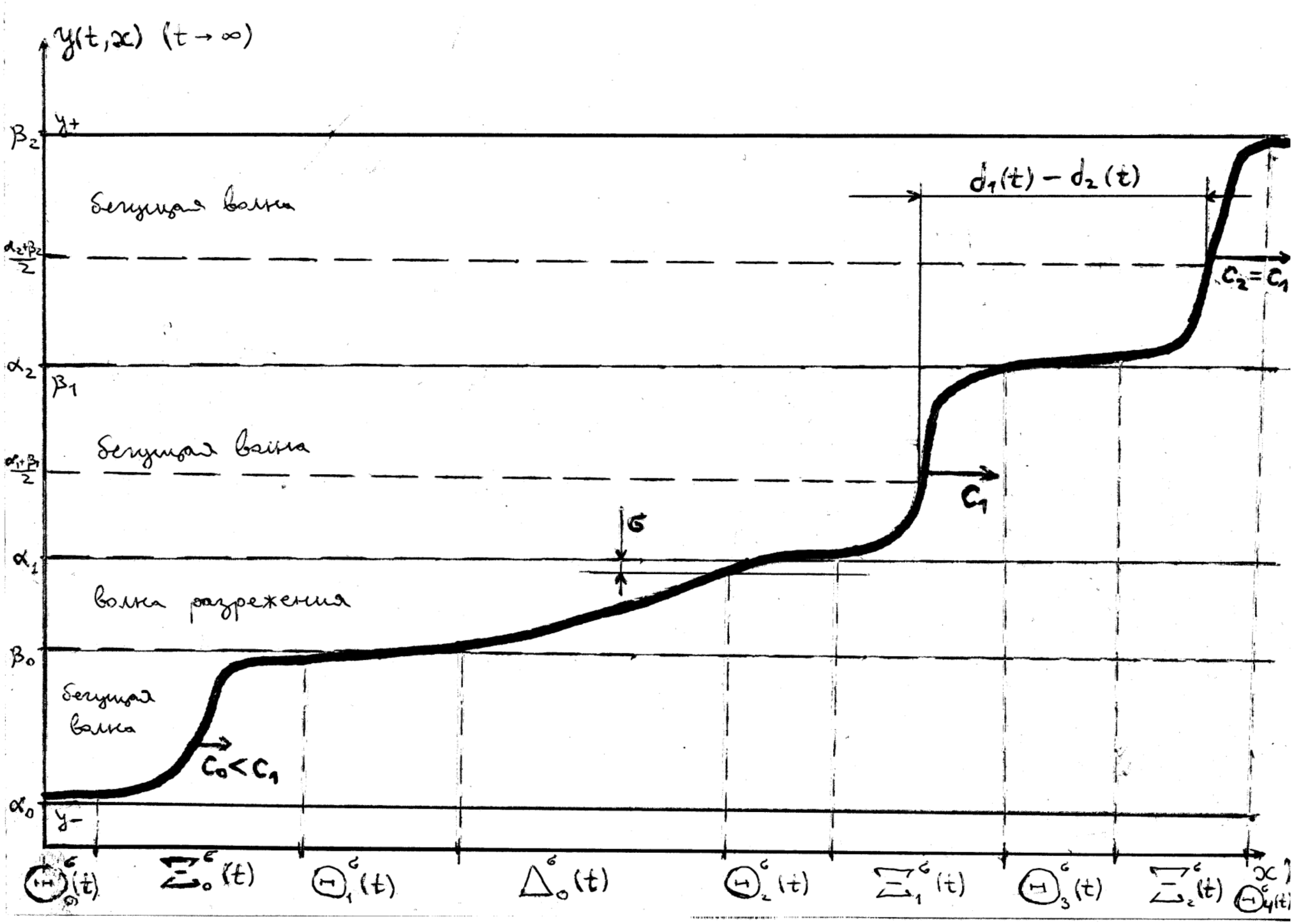
$$y(0,x) = y_0(x), \quad \lim_{x\to\pm\infty} y_0(x) = y_\pm$$

$$y_x(y,t) \xrightarrow[t\to\infty]{L_\infty(Y)} R_0(y)/\nu'(y) \xleftarrow[t\to\infty]{L_\infty(Y)} \tilde{y}_x\left(y,t;\{d_k(t)\}_{k=0}^n\right)$$





f(y)
y
y₋ = α₀
β₀
α₁
β₁ = α₂
β₂ = y₊


y(t, x) (t → ∞)
β2
y+
бегущая волна
d1(t) − d2(t)
(α2+β2)/2
c2 = c1
α2
β1
бегущая волна
(α1+β1)/2
c1
σ
α1
волна разрежения
β0
бегущая волна
c0 < c1
α0
y−
x
Δ0(t)

Сходимость на участках $\Delta_k^{\sigma}(t)$

$$\exists\ \sigma_0 > 0 : \forall\ \sigma_0 > \sigma > 0,\ k = 0,\dots,n-1$$

$$\exists\ C_\Delta^k > 0 : \forall\ t \ge \mathrm{T}_\Delta^k(\sigma) = C_\Delta^k \sigma^{-2}$$

$$\sup_{x \in \Delta_k^{\sigma_0}(t)} \left| y(t, x) - g_k(x/t) \right| \le \sigma.$$

$$g_k(x/t) = \begin{cases} \beta_k, & x < f'(\beta_k)t \\ f'^{-1}(x/t), & f'(\beta_k)t \le x < f'(\alpha_{k+1})t \\ \alpha_{k+1}, & x \ge f'(\alpha_{k+1})t \end{cases}$$

Сходимость на фазовой плоскости

$$\exists\ C,\sigma_0>0:\ \forall\ \sigma_0>\sigma>0\ \exists\ T(\sigma)=C\sigma^{-3/2}:$$

$$\forall\ t\ge T(\sigma),\, y\in(y_-,\, y_+)\rightarrow\left|y_x(y,\, t)-R_0(y)/\nu'(y)\right|\le\sigma.$$

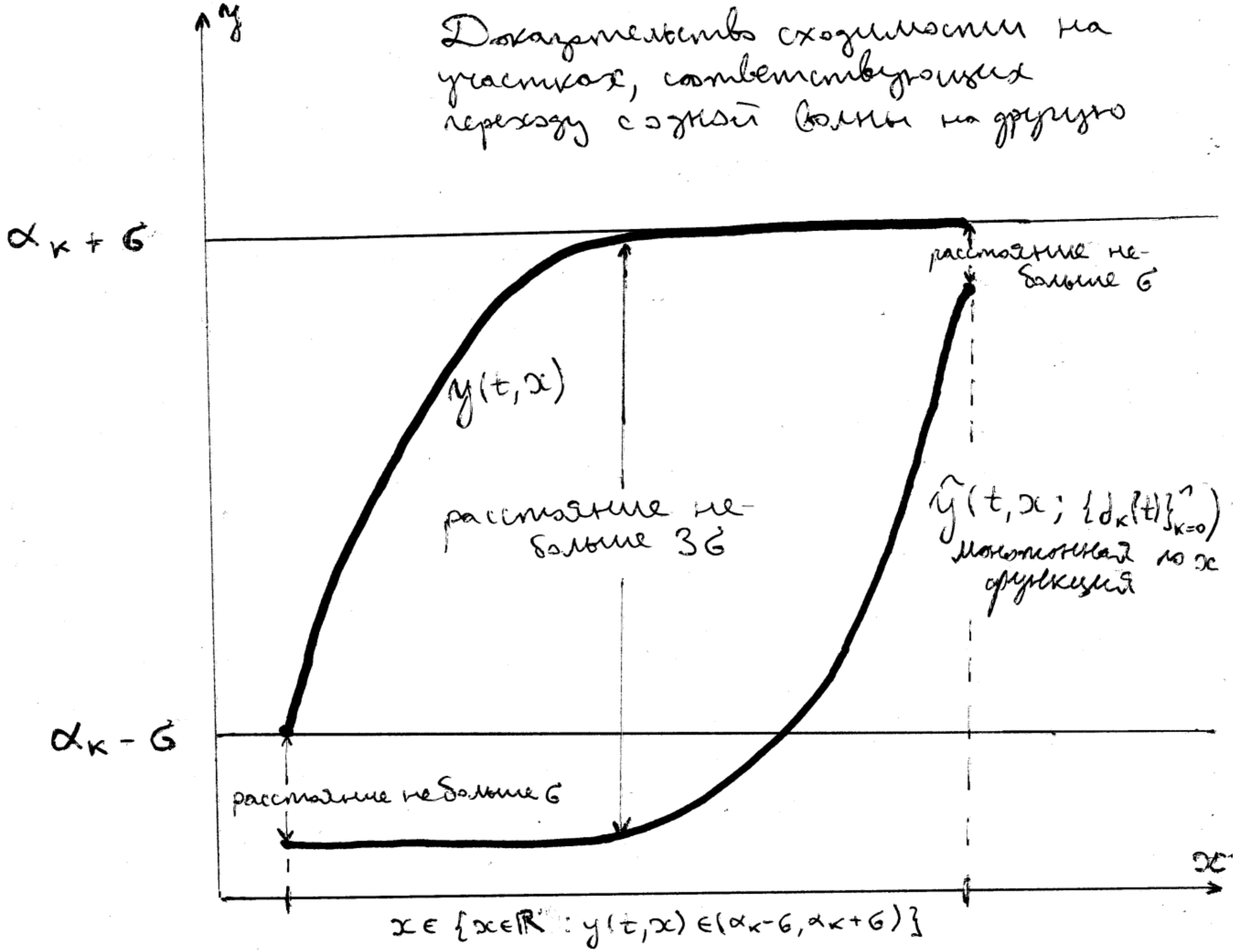
Сходимость на участках $\Xi_k^\sigma(t)$

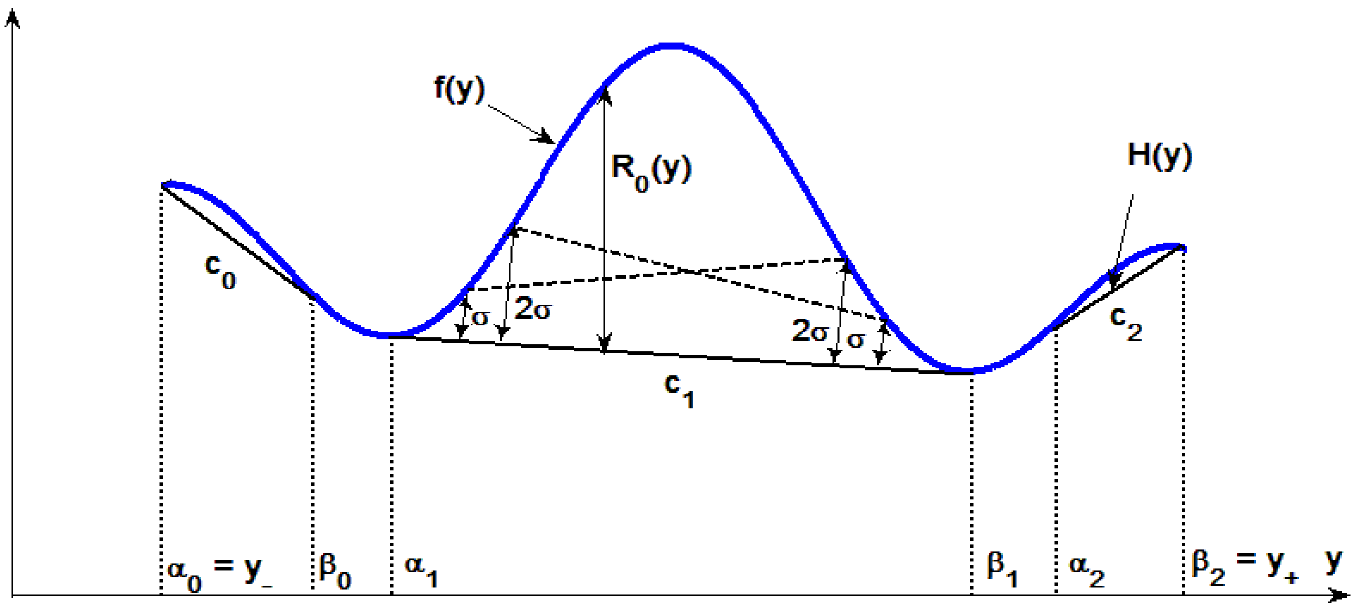
$$\exists\ C,\sigma_0>0:\forall\ \sigma_0>\sigma>0,\, k=0,\ldots,n\ \exists\ \omega_k(\sigma)=C\sigma^{-2}:$$

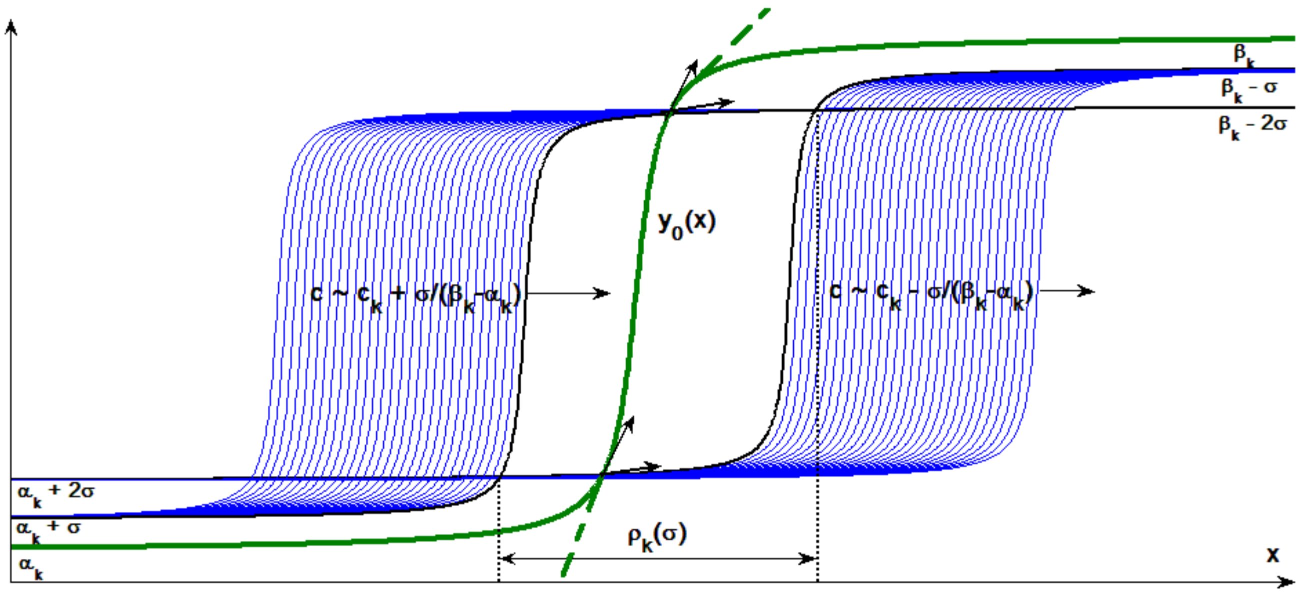
$$\forall\ t\ge T\left(\omega_k(\sigma)\right)\overset{def}{=}T_\Xi^k(\sigma)$$

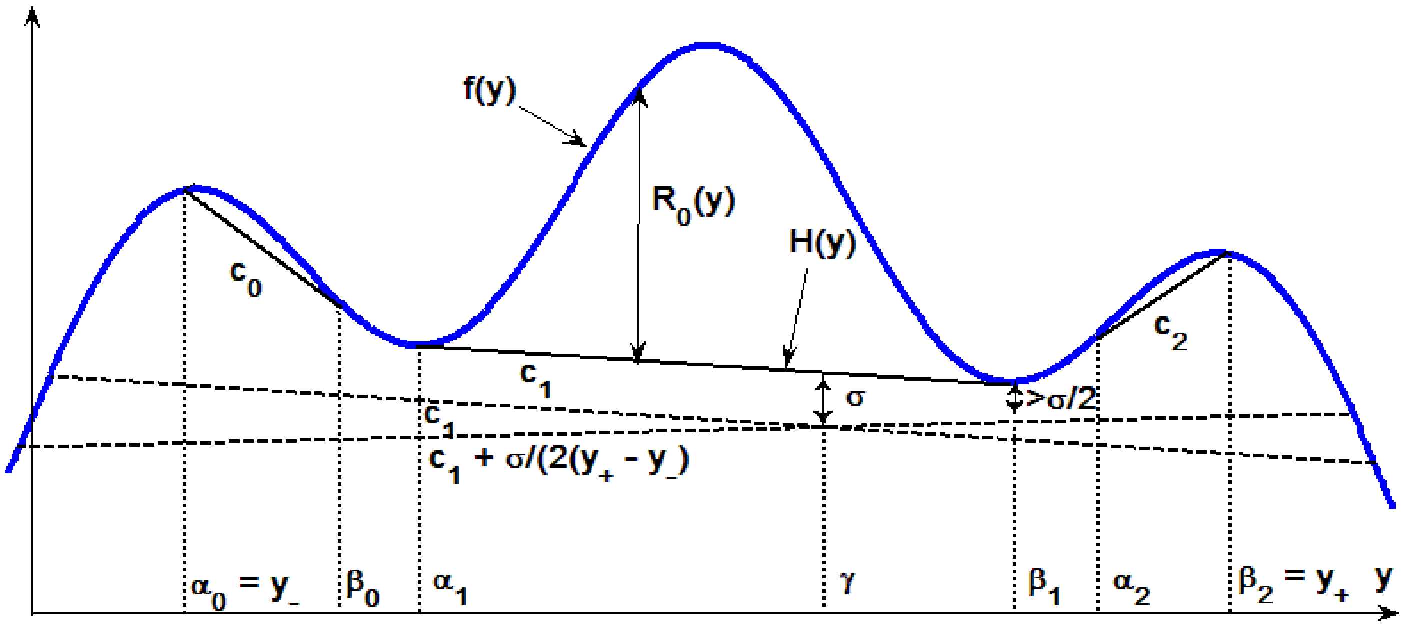
$$\sup_{x\in\Xi_k^\sigma(t)}\left|y(t,\, x)-\tilde{y}\left(t,x,\,\left\{d_k(t)\right\}_{k=0}^n\right)\right|\le\sigma.$$

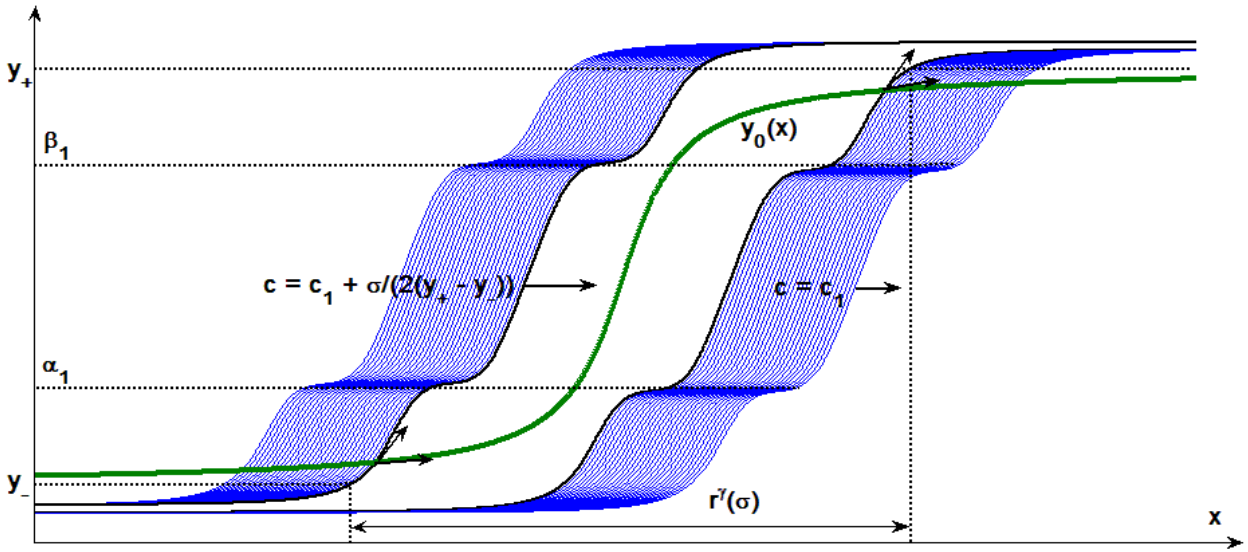
Сходимость на участках $\Theta_k^{\sigma}(t)$




f(y)
R0(y)
H(y)
c0
2σ
σ
2σ
σ
c2
c1
α0 = y_
β0
α1
β1
α2
β2 = y+
y


βk
βk - σ
βk - 2σ
y0(x)
c ~ ck + σ/(βk-αk)
c ~ ck - σ/(βk-αk)
αk + 2σ
αk + σ
αk
ρk(σ)
x


f(y)
R0(y)
H(y)
c0
c1
c2
σ
>σ/2
c1
c1 + σ/(2(y+ - y_)
α0 = y_
β0
α1
γ
β1
α2
β2 = y+
y


y+
β1
α1
y_
y0(x)
c = c1 + σ/(2(y+ - y_))
c = c1
rγ(σ)
x

Две подряд идущие бегущие волны

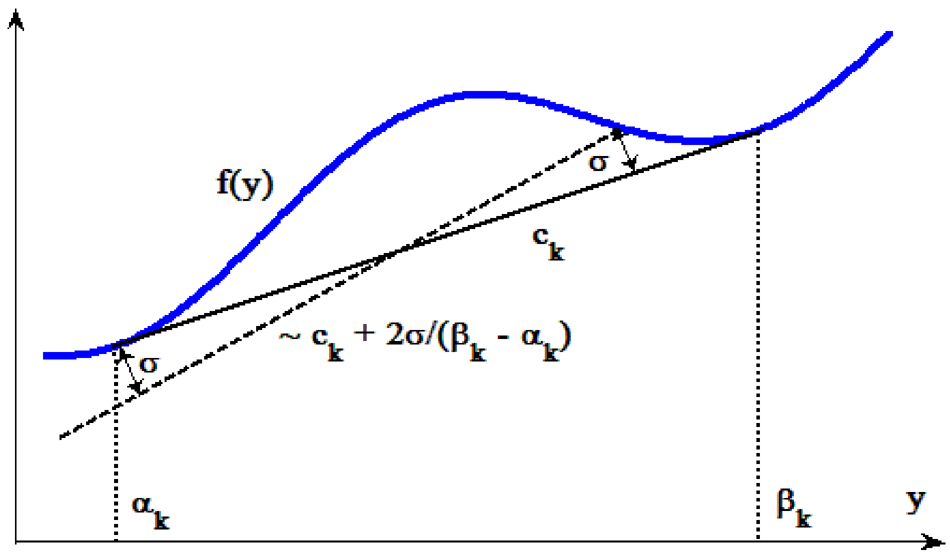
$$\exists\ C,\varsigma,\sigma_0>0:\ \forall\ \sigma_0>\sigma>0,\ t\geq T(\sigma)=C\sigma^{-3/2}$$

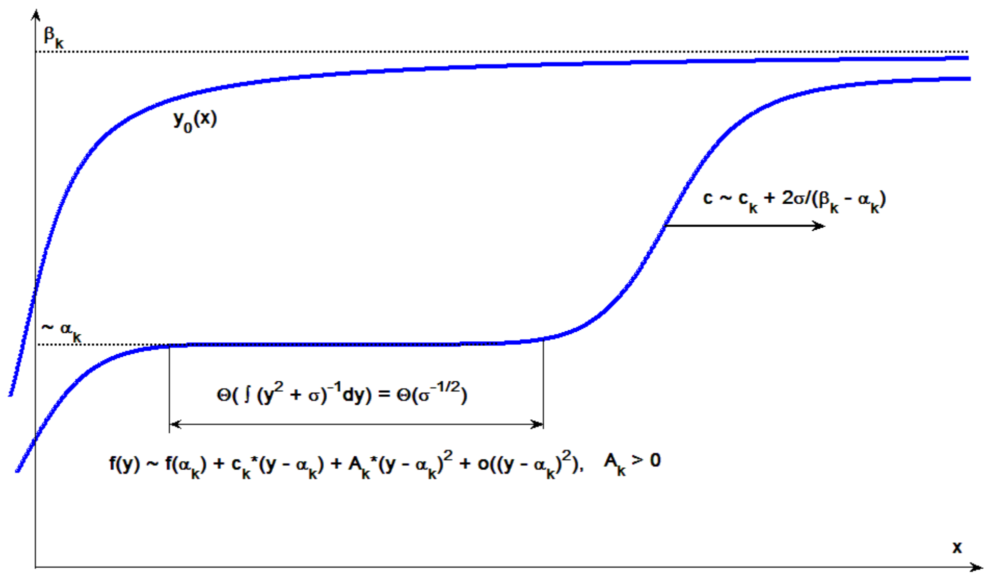
$$d_k(t)-d_{k+1}(t)=\int\limits_{(\alpha_k+\beta_k)/2}^{(\alpha_{k+1}+\beta_{k+1})/2}\frac{dy}{y_x(y,t)}\geq$$

$$\geq\int\limits_{(\alpha_k+\beta_k)/2}^{(\alpha_{k+1}+\beta_{k+1})/2}\frac{dy}{R_0(y)/\nu'(y)+\sigma}\geq\int\limits_{(\alpha_k+\beta_k)/2}^{(\alpha_{k+1}+\beta_{k+1})/2}\frac{dy}{\varsigma\cdot(y-\alpha_{k+1})^2+\sigma}$$

$$\alpha_{k+1}=\beta_k,\ \ f''(\alpha_{k+1})>0$$

$$\exists\ c>0,\ t_0\geq 0:\ \forall\ t\geq t_0\rightarrow\ d_k(t)-d_{k-1}(t)\geq c\sqrt[3]{t}$$





$$\exists\ \sigma_0 > 0:\ \forall\ t \ge 0,\ \sigma_0 > \sigma > 0 \to d_k(t) = \mathrm{O}\left(\sigma^{-1/2}\right) + \mathrm{O}(\sigma)t.$$

Зафиксировав большое t, положим $\sigma \sim t^{-2/3}$. Получим, что $d_k(t) = \mathrm{O}\left(\sqrt[3]{t}\right)$.

Аналогичным образом можно получить оценку $-d_{k-1}(t) = \mathrm{O}\left(\sqrt[3]{t}\right)$.

$$\exists\ C > 0,\ t_0 \ge 0:\ \forall\ t \ge t_0 \to d_k(t) - d_{k-1}(t) \le C\sqrt[3]{t}.$$

$$\boxed{\exists\ C > c > 0,\ t_0 \ge 0:\ \forall\ t \ge t_0 \to c\sqrt[3]{t} \le d_k(t) - d_{k-1}(t) \le C\sqrt[3]{t}}$$

Уравнение типа Колмогорова–Петровского–Пискунова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + F(\rho)$$

Уравнение Полтеровича–Хенкина

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \varphi(\rho_n)(\rho_n - \rho_{n-1})$$

Уравнение типа Кортевега–де Фриза–Бюргерса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}$$

$$4 \sup_{\rho \in (\rho_-, \rho_+)} \left(c - \frac{Q(\rho) - Q(\rho_+)}{\rho - \rho_+} \right) \le \frac{\varepsilon^2}{\mu}$$

Литература

Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. № 6. Т. 1. С. 1–26.

Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.

Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // УМН. 1959. Т. 14. № 2(86). С. 87–158.

Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Матем. сб. 1960. Т. 51(93). № 2. С. 191–216.

Osher S., Ralston J. L^1 stability of traveling waves with application to convective porous media flow // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. P. 737–749.

Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 5(257). С. 3–40.

Weinberger H. F. Long-time behavior for regularized scalar conservation law in absence of genuine nonlinearity // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire. V. 7. 1990. P. 407–425.

Наумкин П. И., Шишмарев И. А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 1. С. 21–32.

Henkin G. M., Polterovich V. M. A difference-differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development // Discrete and continuous dynamic systems. 1999. V. 5. № 4. P. 697–728.

Mejai M., Volpert Vit. Convergence to systems of waves for viscous scalar conservation laws // Asymptotic Analysis. 1999. V. 20. P. 351–366.

Henkin G. M., Shananin A. A. Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. Math. Purés Appl. 2004. V. 83. P. 1457–1500.

Henkin G. M. Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. fixed point theory appl. 2007. V. 1. № 2. P. 239–291.

Гасников А. В. Асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью // Известия РАН. Серия математическая. Т. 76. 2009. № 6. С. 39–76.

Разжевайкин В. Н. Решения типа бегущей волны для уравнения реакции – нелинейной диффузии // Труды МФТИ (специальный выпуск, посвященный юбилею ФУПМа). 2009. Т. 1. № 4. С. 99–119.