УДК 517.956.4

А.А. Белолипецкий[1], *А.М. Тер-Крикоров*[2]

[1]Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

О решении одной сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения*

Изучается смешанная задача Коши для линейного сингулярно возмущенного параболического уравнения со специальными краевыми условиями. Для малых значений параметра приведены приближенные выражения для неизвестных функций. Доказано существование и единственность решения, для которого построенное приближение является асимптотическим по малому параметру. Такие задачи возникают в математических моделях заполнения лазерных мишеней газообразным термоядерным топливом.

Ключевые слова: параболическое уравнение, сингулярное возмущение, погранслойное решение, лазерная мишень.

Введение

В работах [1, 2] были изучены математические модели заполнения тонкостенных оболочек газом. Такие задачи возникают при исследовании технологических процессов производства лазерных мишеней для инерциального термоядерного синтеза [3–5]. В статье [1] поставленная задача в безразмерных переменных сводилась к решению сингулярно возмущенного параболического уравнения для задачи Коши со специальными краевыми условиями. Решение строилось в виде асимптотического ряда. При этом автор ограничивался лишь первым членом ряда для регулярной составляющей решения, пренебрегая погранслойной частью, учитывающей начальные условия. Оправданием применимости такого метода являлся тот факт, что погранслойная составляющая быстро затухает и решение «забывает» начальные условия. В настоящей работе доказана теорема о существовании и единственности решения более общей задачи, чем та, что исследовалась в [1, 2]. Построено решение ее нулевого приближения в виде суммы регулярной и погранслойной составляющей и дана равномерная оценка остаточных членов асимптотического ряда.

I. Постановка задачи

Рассмотрим центрально-симметричное параболическое уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right), \\ \varepsilon \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Граничные условия неоднородные:

$$u(r_0, t) = f(t) + \mu(t), \quad u(r_1, t) = \mu(t). \tag{1.2}$$

Функция $f(t)$ считается известной, а функцию $\mu(t)$ следует определить. Уравнения для определения функции $\mu(t)$ имеют следующий вид:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \alpha \frac{\partial u(r_1, t)}{\partial r}, \quad \mu(0) = b. \tag{1.3}$$

Начальное условие

$$u(r, 0) = U(r). \tag{1.4}$$

Будем предполагать выполненными условия согласования

$$U(r_1) = b, \quad U(r_0) = b + f(0). \tag{1.5}$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. Если функции $f'(t)$ и $U''(r)$ непрерывны и выполнены условия согласования (1.5), то найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение задачи (1.1) – (1.4) существует, единственно и может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{gathered}u(r, t, \varepsilon) = u_0(r, t) + u_1(r, t, \varepsilon) + \varepsilon u_2(r, t, \varepsilon), \\ \mu(t) = \mu_0(t) + \varepsilon \mu_1(t, \varepsilon).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Функции $\mu_0(t)$, $u_0(r, t)$ являются решениями вырожденной задачи:

$$\mu_0(t) = b + \frac{\alpha r_0}{r_0 - r_1}\int_0^t f(s)\, ds, \tag{1.7}$$

$$u_0(r,\ t) = \mu_0(t) + \frac{r_0}{r}\frac{r - r_1}{r_0 - r_1} f(t). \tag{1.8}$$

Погранслойная функция $u_1(r, t, \varepsilon)$ компенсирует невязку в начальных условиях:

$$u_1(r, \tau) = \frac{2}{r(r_1 - r_0)} \times$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/12136.

$$\times \int\limits_{r_0}^{r_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \tau}}{\lambda_n^2} \sin\lambda_n(r_1 - s)\sin\lambda_n(r_1 - r) \right) \times$$
$$\times (sU''(s) + 2U'(s))ds. \quad (1.9)$$

Функции $u_2(r, t, \varepsilon)$, $\mu_1(t, \varepsilon)$ равномерно ограничены. □

Упростим постановку задачи при помощи замены зависимых переменных:

$$v\,(r,\ t) = r\mu\,(t) + r_0 \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f\,(t) - ru\,(r,\ t)\,. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.1) – (1.5) принимают следующий вид:

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \varepsilon r\mu'(t) + \varepsilon r_0 \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f'(t), \quad (1.7')$$
$$v(r_0, t) = 0, \quad v(r_1, t) = 0, \quad (1.8')$$
$$\frac{d\mu(t)}{dt} =$$
$$= -\frac{\alpha}{r_1} \frac{\partial v(r_1, t)}{\partial r} - \frac{\alpha r_0}{r_1(r_1 - r_0)} f(t), \quad \mu(0) = b, \quad (1.9')$$
$$v(r, 0) = -rU(r) + rb + \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f(0). \quad (1.10')$$

II. Решение вырожденной задачи и уравнений погранслоя

При $\varepsilon = 0$ мы получаем вырожденную задачу

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} = 0, \quad v_0(r_0, t) = 0, \quad v_0(r_1, t) = 0,$$
$$\frac{d\mu_0}{dt} = -\frac{\alpha r_0}{r_1(r_1 - r_0)} f(t), \quad \mu_0(0) = b.$$

Начальное условие (1.10) в общем случае не может быть удовлетворено. Решение вырожденной задачи имеет следующий вид:

$$v_0(r, t) = 0, \quad \mu_0(t) = b - \frac{\alpha r_0}{r_1(r_1 - r_0)} \int\limits_0^t f(s)ds. \quad (2.1)$$

Положим в уравнениях (1.7') – (1.10)

$$\tau = t/\varepsilon, \quad \mu(t, \varepsilon) = \mu_0(t) + z(t, \varepsilon). \quad (2.2)$$

Тогда система уравнений (1.7') – (1.10') принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \varepsilon r z'(\varepsilon\tau) + \varepsilon r_0 \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f'(\varepsilon\tau), \quad (2.3)$$
$$v(r_0, \tau) = 0, \quad v(r_1, \tau) = 0, \quad (2.4)$$
$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \frac{\varepsilon\alpha}{r_1} \frac{\partial v(r_1, \tau)}{\partial r}, \quad z(0) = 0, \quad (2.5)$$
$$v(r, 0) =$$
$$= -rU(r) + r\mu(0) + r_0 \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f(0) = \psi(r). \quad (2.6)$$

Вследствие условий согласования (1.5)

$$\psi(r_0) = -r_0(U(r_0) - b - f(0)) = 0,$$
$$\psi(r_1) = r_1(U(r_1) - b) = 0. \quad (2.7)$$

Полагая в системе (2.3) – (2.6) параметр $\varepsilon = 0$, получаем систему для определения погранслойных функций:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2}, \quad \tilde{v}(r_0, t) = 0,$$
$$\tilde{v}(r_1, t) = 0, \quad \tilde{v}(r, 0) = \psi(r), \quad (2.8)$$

$$\frac{dz_0(\tau)}{d\tau} = 0, \quad z_0(0) = 0. \quad (2.9)$$

Из уравнений (2.9) следует, что $z_0(\tau) = 0$.

Рассмотрим ортогональную на отрезке $[r_0, r_1]$ систему функций

$$\varphi_n(r) = \sin\lambda_n(r_1 - r), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{r_1 - r_0}\,. \quad (2.10)$$

Лемма 2.1. Если функция $U(r)$ имеет непрерывную производную второго порядка, то решение смешанной задачи (2.8) имеет следующий вид:

$$\tilde{v}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \tau} \sin\lambda_n(r_1 - r), \quad (2.11)$$
$$\gamma_n = \frac{2}{r_1 - r_0} \int\limits_{r_0}^{r_1} (sU''(s) + 2U'(s)) \sin\lambda_n(r_1 - s)\, ds.$$

Функция $\tilde{v}(r, \tau)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}$, причем

$$\frac{\partial \tilde{v}(r_1, \tau)}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 \tau}. \quad \square \ (2.12)$$

Доказательство. Разложим функцию $\psi(r)$ по ортогональной системе (2.10). Так как $\psi(r_0) = \psi(r_1) = 0$ в силу (2.7), а в силу равенства (2.6) $\psi''(r) = -rU''(r) - 2U'(r)$, то

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(r),$$
$$b_k = \frac{2}{r_1 - r_0} \int\limits_{r_0}^{r_1} \psi(s) \sin\lambda_k(r_1 - s)\, ds =$$
$$= -\frac{2}{(r_1 - r_0)\lambda_k} \int\limits_{r_0}^{r_1} \psi'(s) \cos\lambda_k(r_1 - s)\, ds =$$
$$= -\frac{2}{(r_1 - r_0)\lambda_k^2} \int\limits_{r_0}^{r_1} \psi''(s) \sin\lambda_k(r_1 - s)\, ds = \frac{1}{\lambda_k^2} \gamma_k,$$

$$\gamma_n = \frac{2}{r_1 - r_0} \int\limits_{r_0}^{r_1} (sU''(s) + 2U'(s)) \sin \lambda_n (r_1 - s)\, ds.$$

Решение смешанной задачи (2.8) имеет вид

$$\tilde{v}(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \tau} \sin \lambda_n (r_1 - r). \qquad (2.13)$$

В силу неравенства Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty$, а в силу неравенства Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} < +\infty$. Следовательно, ряды (2.13) и (2.12) сходятся равномерно и справедлива формула (2.12). Теорема доказана.

III. Доказательство теоремы существования и единственности решения интегрального уравнения для функции $z(\tau, \varepsilon)$

Положим

$$\begin{gathered} v(r,\tau) = \tilde{v}(r,\tau) + w(r,\tau), \quad w(r,0) = 0, \\ w(r_0,\tau) = 0, \quad w_1(r,\tau) = 0. \end{gathered} \qquad (3.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.3) – (2.6), получаем уравнения для функций w и z:

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = -\varepsilon r z'(\tau) - \varepsilon r_0 \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} f'(\varepsilon\tau), \qquad (3.2)$$

$$w(r_0,\tau) = 0, \quad w(r_1,\tau) = 0, \quad w(r,0) = 0, \qquad (3.3)$$

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \frac{\varepsilon\alpha}{r_1} \frac{\partial w(r_1,\tau)}{\partial r} - \frac{\varepsilon\alpha}{r_1} \frac{\partial v_0(r_1,\tau)}{\partial r}. \qquad (3.4)$$

Сведем задачу определения функции $z(\tau)$ к решению интегрального уравнения. Для этого воспользуемся разложениями

$$\begin{gathered} r = (r_1 - r_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n (r - r_1), \\ a_n = 2((-1)^n r_0 - r_1), \\ r - r_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n (r - r_1)}{\lambda_n}. \end{gathered} \qquad (3.5)$$

Запишем уравнение (3.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = -\varepsilon (r_1 - r_0) z'(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n (r - r_1) - \frac{\varepsilon r_0}{r_1 - r_0} f'(\varepsilon\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n (r - r_1)}{\lambda_n}.$$

Следовательно,

$$w = -\varepsilon (r_1 - r_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n (r - r_1) \times \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} z'(\xi)\, d\xi - \frac{\varepsilon r_0}{r_1 - r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n (r - r_1)}{\lambda_n} \times \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} f'(\varepsilon\xi)\, d\xi, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial w(r_1,\tau)}{\partial r} = -\varepsilon (r_1 - r_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} z'(\xi)\, d\xi - \frac{\varepsilon r_0}{r_1 - r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} f'(\varepsilon\xi)\, d\xi. \qquad (3.7)$$

Так как

$$\begin{gathered} \left| \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} z'(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{\lambda_n^2} \|z'\|, \\ \left| \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} f'(\varepsilon\xi)\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{\lambda_n^2} \|f'\|, \end{gathered} \qquad (3.8)$$

то ряды в формулах (3.6) и (3.7) равномерно сходящиеся.

Подставляя (3.7) и (2.12) в формулу (3.4), получаем интегральное уравнение для определения функции $z(\tau)$:

$$z'(\tau) = -\frac{\varepsilon^2 \alpha (r_1 - r_0)}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} z'(\xi)\, d\xi - \frac{\varepsilon^2 r_0 \alpha_0}{r_1 - r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} f'(\varepsilon\xi)\, d\xi - \frac{\varepsilon\alpha}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 \tau}. \qquad (3.9)$$

Найдем уравнение для $z(\tau)$. Так как $z(0) = 0$, то

$$\int\limits_0^{\tau} ds \int\limits_0^{s} e^{-\lambda_n^2(s-\xi)} z'(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^{\tau} z'(\xi) \int\limits_{\xi}^{\tau} e^{-\lambda_n^2(s-\xi)} ds = \frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_0^{\tau} z'(\xi) \left(1 - e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}\right) d\xi = \frac{1}{\lambda_n^2} \left(z(\xi) \left(1 - e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}\right)\right)\Big|_0^{\tau} + \int\limits_0^{\tau} z(\xi) e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} d\xi = \int\limits_0^{\tau} z(\xi) e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} d\xi,$$

$$\int_0^\tau ds \int_0^\tau e^{-\lambda_n^2(s-\xi)} f'(\varepsilon\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\lambda_n^2}\, f(0)\left(1 - e^{-\lambda_n^2\tau}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau f(\varepsilon\xi) e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)} d\xi.$$

Используя эти равенства, получаем выражение для $z(\tau)$:

$$z(\tau) = -\frac{\varepsilon^2\alpha(r_1 - r_0)}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \int_0^\tau z(\xi)e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}d\xi -$$
$$-\frac{\varepsilon\alpha r_0 f(0)}{r_1(r_1 - r_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - e^{-\lambda_n^2\tau}}{\lambda_n^2} -$$
$$-\frac{\varepsilon\alpha r_0}{r_1(r_1 - r_0)}\int_0^\tau f(\varepsilon\xi)e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}d\xi -$$
$$-\frac{\varepsilon\alpha}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda_n^3}\,(1 - e^{-\lambda_n^2\tau}). \quad (3.10)$$

Так как в силу (3.5) $|a_n| \leqslant 2(r_0 + r_1)$, то

$$\left|\frac{\varepsilon^2\alpha(r_1 - r_0)}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_0^\tau z(\xi)e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon^2\alpha(r_1 - r_0)(r_0 + r_1)}{r_1}\,\|z\|\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\tau e^{-\lambda_n^2(\tau-\xi)}d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 C\|z\|,$$
$$C = \frac{\varepsilon^2\alpha(r_1^2 - r_0^2)}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Отсюда следует, что интегральное уравнение (3.10) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ имеет единственное решение $z(\tau, \varepsilon)$, причем $\|z\| < C_1\varepsilon$. Аналогичное утверждение верно и для уравнения (3.9). Следовательно $\|z'\| \leqslant C_2\varepsilon^2$.

Из формул (1.10), (2.11), (3.1) и результата п. 3 следует утверждение основной теоремы п. 1.

Литература

1. *Белолипецкий А.А.* Нелинейная математическая модель заполнения тонкостенных оболочек газом. // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2000. – № 2. – С. 7–10.

2. *Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A.* Mathematical models for filling polymer shells with a real gas-fuel // Laser and Particle Beams. – 1999. – V. 17, N 4. – P. 701–712.

3. Проблемы лазерного термоядерного синтеза: сб. статей / под ред. А.А. Филюкова. – М.: Атомиздат, 1976. – 295 с.

4. *Дюдерштадт Дж., Мозес Г.* Инерциальный термоядерный синтез. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 302 с.

5. *Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р.* Состояние проблемы криогенных топливных мишеней в современной программе инерциального термоядерного синтеза // Вестн. РАЕН. – 2007. – № 2. – С. 15–20.

Поступила в редакцию 20.02.2011