# Анализ финансовых пирамид и движения капитала на основе модели Кантора–Липмана

М.П. Ващенко, А.А. Шананин

30 января 2012 г.

# Предположения модели оптимального инвестирования 1

- Инвестиции – реализация инвестиционных проектов
- Инвестиционные проекты стационарны и тиражируемы (их можно использовать неоднократно)
- Доступен ограниченный набор (пул) инвестиционных проектов: в пуле всего $M$ проектов
- Инвестиционный проект полностью описывается своими потоками платежей: $\Phi^k(t)$ – функция, описывающая сальдо потоков платежей $k$-го проекта, нетто сумму полученную или уплаченную инвестором спустя $t$ моментов времени после запуска инвестиционного проекта
- Инвестиционный проект имеет конечное время реализации: $T^k$ – время реализации $k$-го проекта, $T = \max\limits_k T^k$ – горизонт, на котором любой из проектов в пуле будет завершен

# Описание потоков платежей инвестиционного проекта

- $\chi^k$ – заряд, заданный на борелевской $\sigma$-алгебре $\mathfrak{B}$ для вещественных чисел с носителем, выпуклая оболочка которого является подмножеством отрезка $[0;T]$, причем $0 \in supp(\Phi)$

- $\chi^k = \chi_1^k + \chi_2^k$ (разложение Жордана), $[0;T] = A_k^- \cup A_k^+$ (разложение Хана)
  $A_k^- \in \mathfrak{B}$ и $A_k^+ = [0;T] \setminus A^-$ – соответственно отрицательное и положительное относительно заряда $\chi^k$ множетсва, т.е. $\forall B \in \mathfrak{B}$ $\chi^k(A_k^- \cap B) \leq 0$, $\chi^k(A_k^+ \cap B) \geq 0$, а $\chi_1^k = \chi^k([0;T] \cap A_k^-)$, $\chi_2^k = \chi^k([0;T] \cap A_k^+)$

- $\Phi^k(t) = \chi^k((0;t))$, $\Phi_i^k(t) = \chi_i^k((0;t))$ – функции распределения

- $\Phi_1^k(t)$ – монотонно невозрастающая, а $\Phi_2^k(t)$ – монотонно неубывающая функция и $\Phi_i^k(x) = 0$ для $x \leq 0$, $\Phi_i^k(x) = \Phi_i^k(T)$ для $x > T$, $i = 1, 2$

# Предположения модели оптимального инвестирования 2

- Все инвестиционные проекты в начале своей реализации порождают однородный поток платежей: $\forall k \in [1; M]\ \exists \tau_k > 0 :$ $\forall t \in [0; \tau_k]$ или $\Phi_1^k(t) < \Phi_1^k(0)$, или $\Phi_2^k(t) > \Phi_2^k(0)$
- Инвестиционные проекты в пуле масштабируемы, и инвестор управляет интенсивностью их реализации.
  - √ $u^k(t)$ – интенсивность реализации $k$-го проекта, начинаемого в момент времени $t$, $u^k(t) \in L_\infty$
  - √ Поток платежей в момент времени $(t + \tau)$ для инвестора, связанный с этим решением, будет равен $u^k(t) \cdot d\Phi^k(\tau)$

# Предположения модели оптимального инвестирования 3

- Состояние инвестора характеризует его расчетный счет

  $\surd$ $s(t)$ – остаток на р/с в момент времени $t$

  $\surd$ $s(0) > 0$

  $\surd$ $s(t) = s(0) + \sum\limits_{k=1}^{M} \int\limits_{0}^{t} \Phi^k(t - x) u^k(x) dx$

- Не допускаются кассовые разрывы, т.е. остаток на расчетном счете должен быть неотрицательным

- Инвестор планирует фиксировать доходы от инвестиционной деятельности к моменту времени $\hat{T}$

  $\surd$ $u^k(t) = 0 \; \forall \, k = 1, \ldots, M$ при $t \geq \hat{T} - T$

# Задача оптимального инвестирования, определение доходности

$$
\begin{cases}
s(t) = s(0) + \sum\limits_{k=1}^{M} \int\limits_0^t u^k(x) \cdot \Phi^k(t-x)dx, & 0 \le t \le \hat{T}, \\
s(t) \ge 0, \quad u^k(t) \ge 0, \quad u^k(t) \in L_\infty, & \forall t \ge 0,\ \forall k = 1 \dots M, \\
u^k(t) = 0, & t \ge \hat{T} - T,\ \forall k = 1 \dots M, \\
s(\hat{T}) \to \sup .
\end{cases} \tag{1}
$$

- $v(\hat{T})$ — оптимальное значение функционала в задаче (1) при временном горизонте $\hat{T}$, $V(\hat{T}) = v(\hat{T})/s(0)$,
- $\lim\limits_{\hat{T}\to\infty} \dfrac{\ln V(\hat{T})}{\hat{T}}$ – доходность пула инвестиционных проектов

## Классификация пулов инвестиционных проектов

- $\tilde{\phi}^k(p) = \int\limits_0^T e^{-pt} d\Phi^k(t)$,
- $F(p) = \max\limits_k \left\{ \tilde{\phi}^k(p) \right\}$,
- $p^* = \min \{p > 0 | F(p) = 0\}$.

**Определение 1.** *Будем говорить, что пул инвестиционных проектов имеет арбитражную структуру платежей, если* $\forall\ p \geq 0\ F(p) > 0$.

**Определение 2.** *Будем говорить, что пул инвестиционных проектов имеет убыточную структуру платежей, если* $F(0) \leq 0$.

**Определение 3.** *Будем говорить, что пул инвестиционных проектов имеет стандартную структуру платежей, если он не является пулом с арбитражной или убыточной структурой платежей.*

# Примеры

**Пример 1.** Стандартный проект – проект депонирования средств под ставку $r_d > 0$: $d\Phi(t) = -1 \cdot \delta(t) + e^{r_d T} \cdot \delta(t-T)$, $\tilde{\phi}(p) = -1 + e^{(r_d - p)T}$, $F(p) = \tilde{\phi}(p)$ и $p^* = r_d$.

**Пример 2.** Убыточный проект – проект займа под ставку $r_c > 0$: $d\Phi(t) = 1 \cdot \delta(t) - e^{r_c T} \cdot \delta(t-T)$, $\tilde{\phi}(p) = 1 - e^{(r_c - p)T}$, $F(p) = \tilde{\phi}(p)$ и $F(0) = 1 - e^{r_c T} < 0$.

**Пример 3.** Арбитражный пул – комбинация из проектов депонирования под ставку $r_d$ и займа под ставку $r_c$ при условии, что $r_d > r_c > 0$.

$$F(p) = \begin{cases} -1 + e^{(r_d - p)T}, & p \leq \tilde{p}, \\ 1 - e^{(r_c - p)T}, & p > \tilde{p}, \end{cases}$$

где $\tilde{p} = \frac{\ln\left(e^{r_d T} + e^{r_c T}\right) - \ln 2}{T}$, $r_c < \tilde{p} < r_d$. Можно заметить, что $F(p) > 0$ для $\forall p > 0$.

**Теорема 1.** *В задаче (1)*

1. *Для пула инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей* $\exists p^* = \min\{p > 0 \,|\, F(p) = 0\}$ *и* $\lim\limits_{\hat{T}\to\infty} \dfrac{\ln V(\hat{T})}{\hat{T}} = p^*$.
2. *Для пула инвестиционных проектов с убыточной структурой платежей* $\lim\limits_{\hat{T}\to\infty} \dfrac{\ln V(\hat{T})}{\hat{T}} = 0$.
3. *Для пула инвестиционных проектов с арбитражной структурой платежей* $\exists \hat{T}_0 > T : V(\hat{T}_0) = +\infty$.

В соответствии с теоремой для случая арбитражной структуры платежей доходность пула можно определить как $\lim\limits_{\hat{T}\to\infty} \dfrac{\ln V(\hat{T})}{\hat{T}} = +\infty$.

# Существование «пузырей»

Задача оптимального инвестирования без учета ликвидности финального состояния:

$$
\begin{cases}
s(t) = s(0) + \sum\limits_{k=1}^{M} \int\limits_0^t u^k(x) \cdot \Phi^k(t-x)dx, & 0 \le t \le \hat{T}, \\
s(t) \ge 0, \quad u^k(t) \ge 0, \quad u^k(t) \in L_\infty, & \forall t \ge 0,\ \forall k = 1 \ldots M, \\
s(\hat{T}) \to \sup .
\end{cases}
\tag{2}
$$

**Теорема 2.** *Для пула инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей для любых* $p : F(p) > 0$, $s(0) > 0$, $\hat{T} > T$ *существуют* $u_k(t)$, *допустимые для задачи 2, такие, что*

$$\lim_{\hat{T} \to \infty} \left( \frac{\ln \Big( s(\hat{T})/s(0) \Big)}{\hat{T}} \right) = p.$$

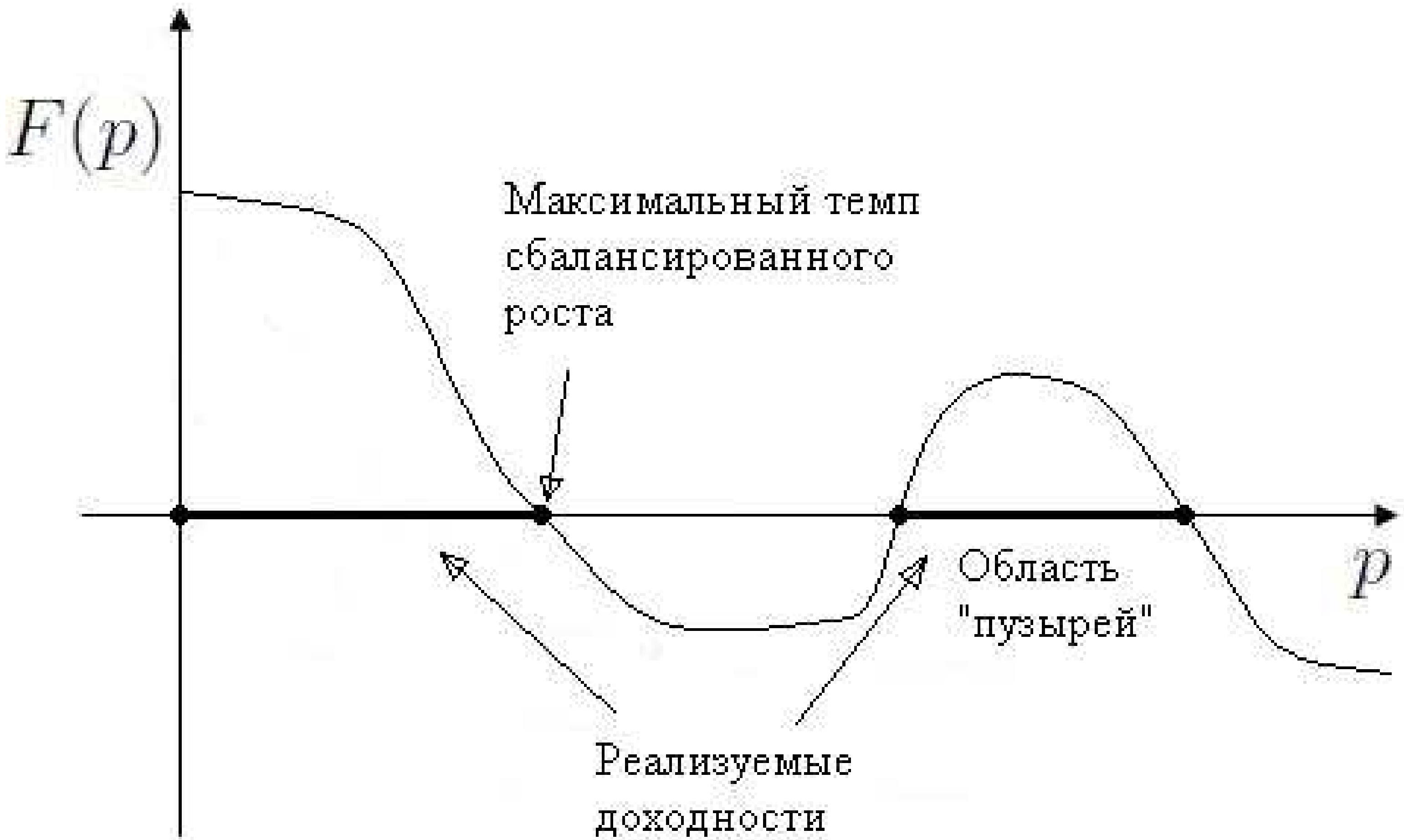
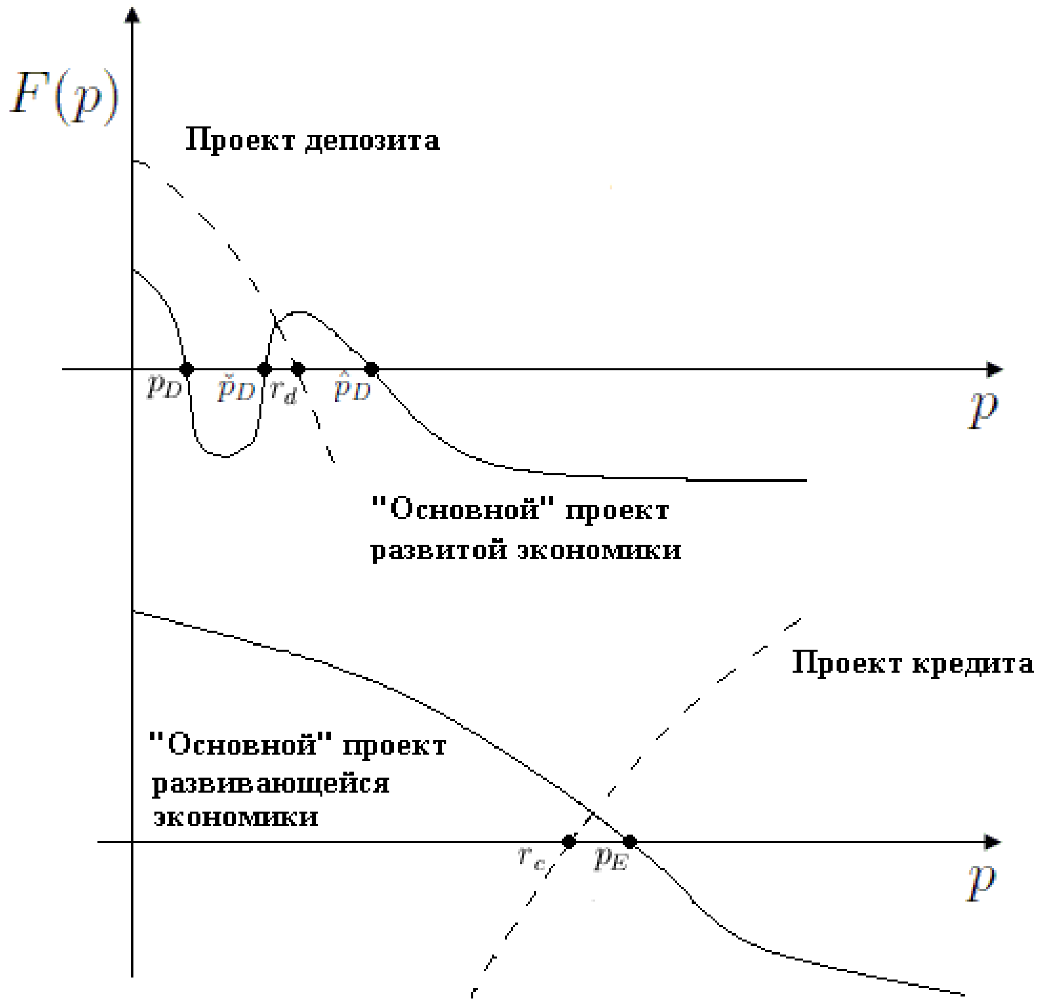
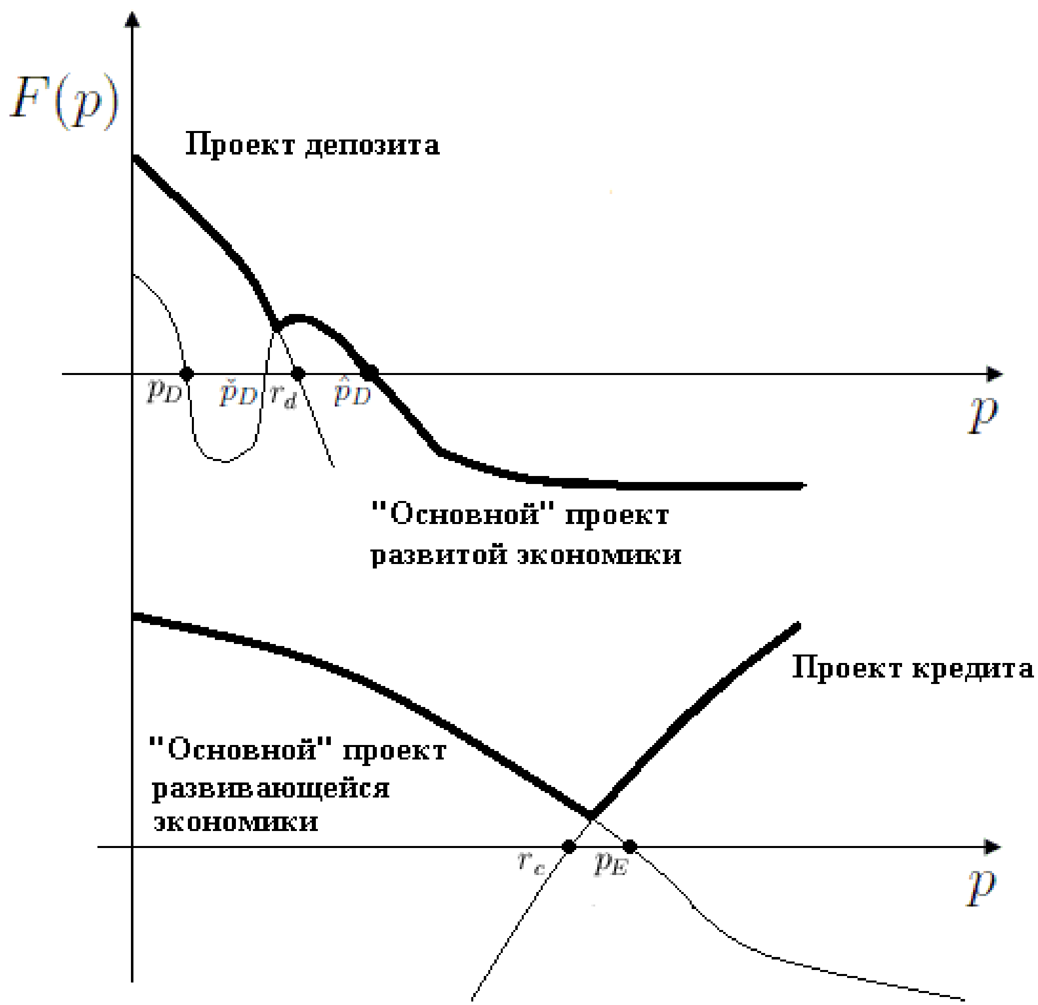

$F(p)$
Максимальный темп
сбалансированного
роста
Область
"пузырей"
$p$
Реализуемые
доходности

Рис. 1.



$F(p)$
Проект депозита
$p_D$
$\check{p}_D$
$r_d$
$\hat{p}_D$
$p$
"Основной" проект
развитой экономики
Проект кредита
"Основной" проект
развивающейся
экономики
$r_c$
$p_E$
$p$


Рис. 2.



$F(p)$
Проект депозита
$p_D$
$\check{p}_D$
$r_d$
$\hat{p}_D$
$p$
"Основной" проект
развитой экономики
Проект кредита
"Основной" проект
развивающейся
экономики
$r_c$
$p_E$
$p$


Рис. 3.

# Изменение темпов роста – динамика индексов акций, полученных ОНП

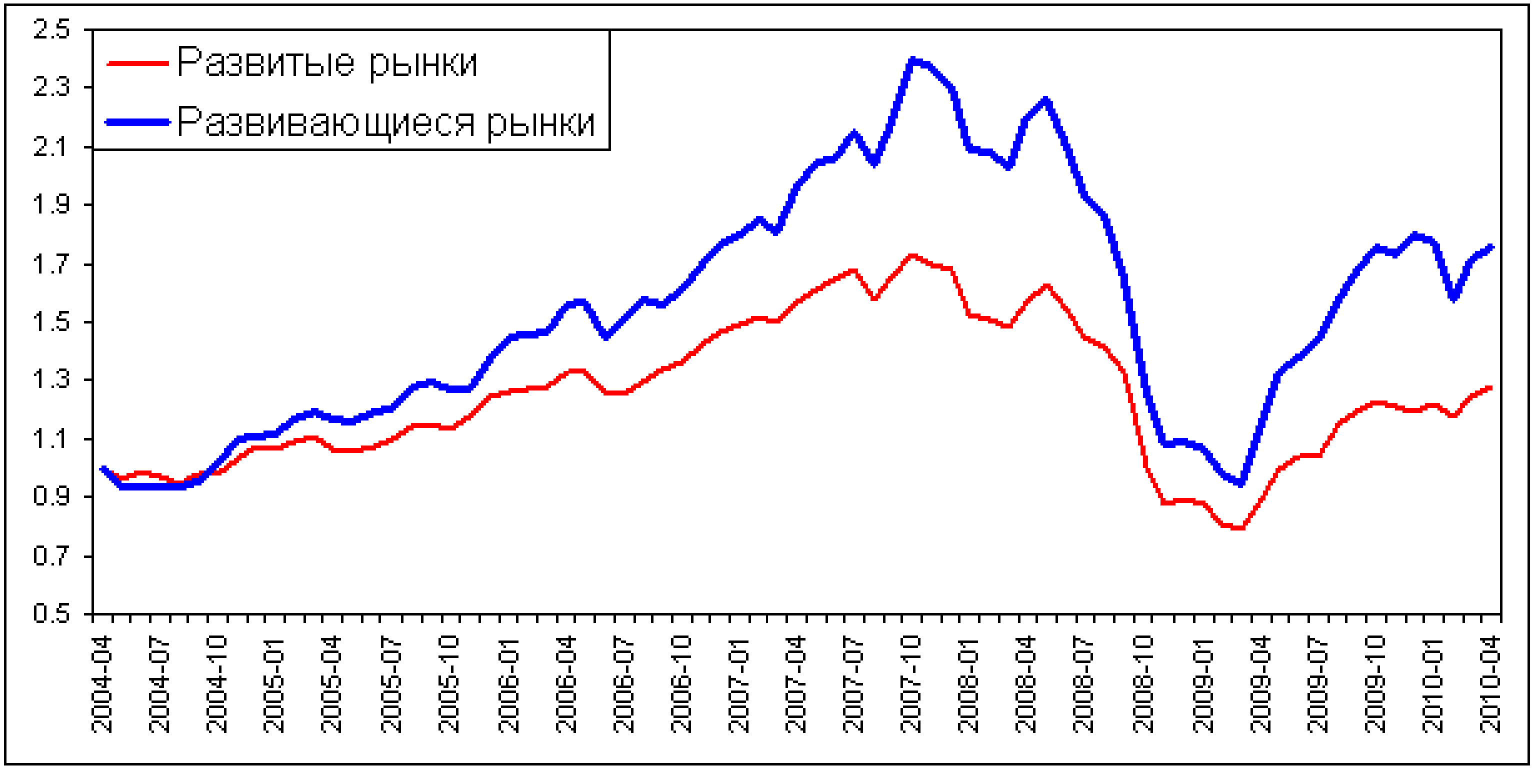



Рис. 4.

# Состояние сектора финансов

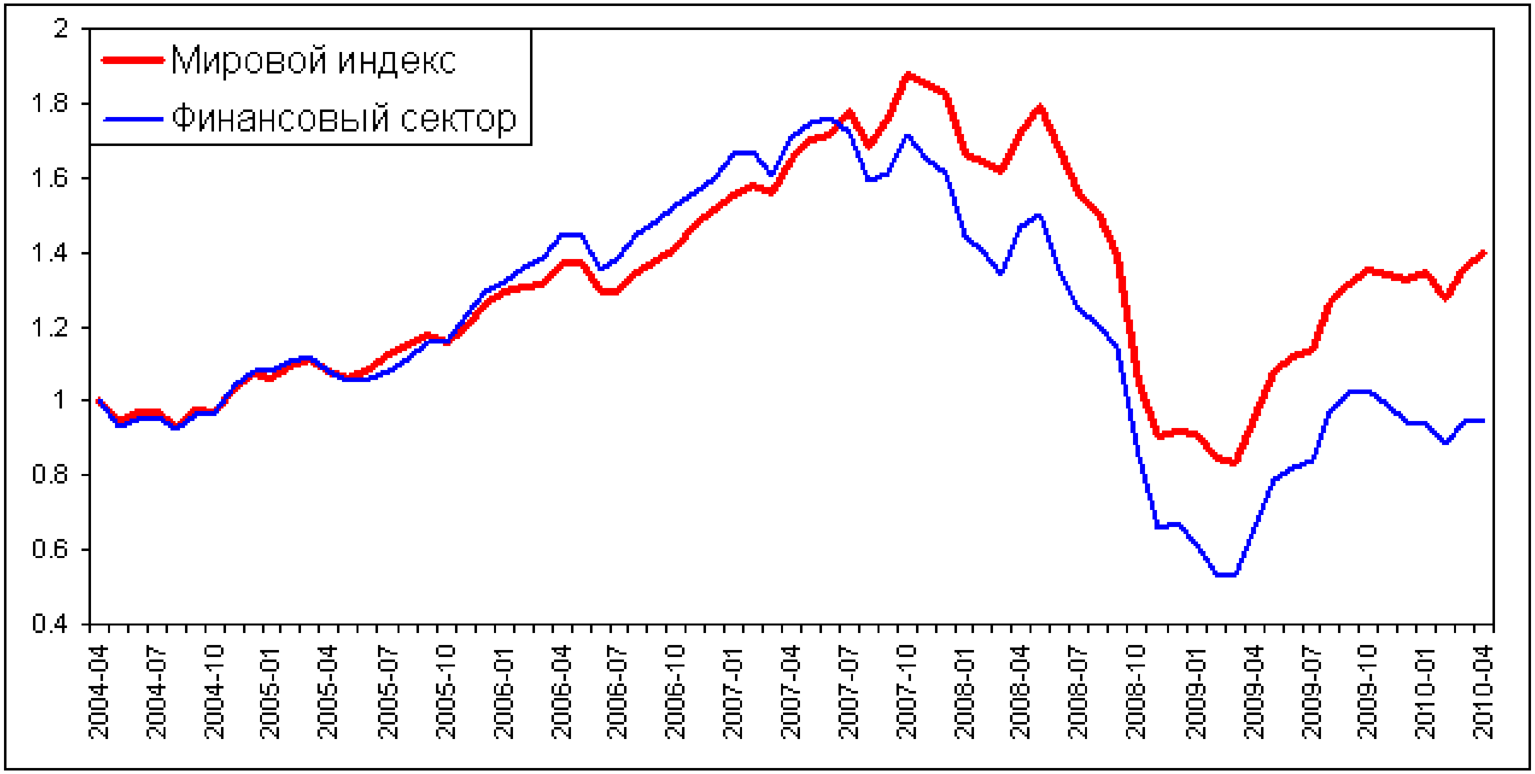



Рис. 5.

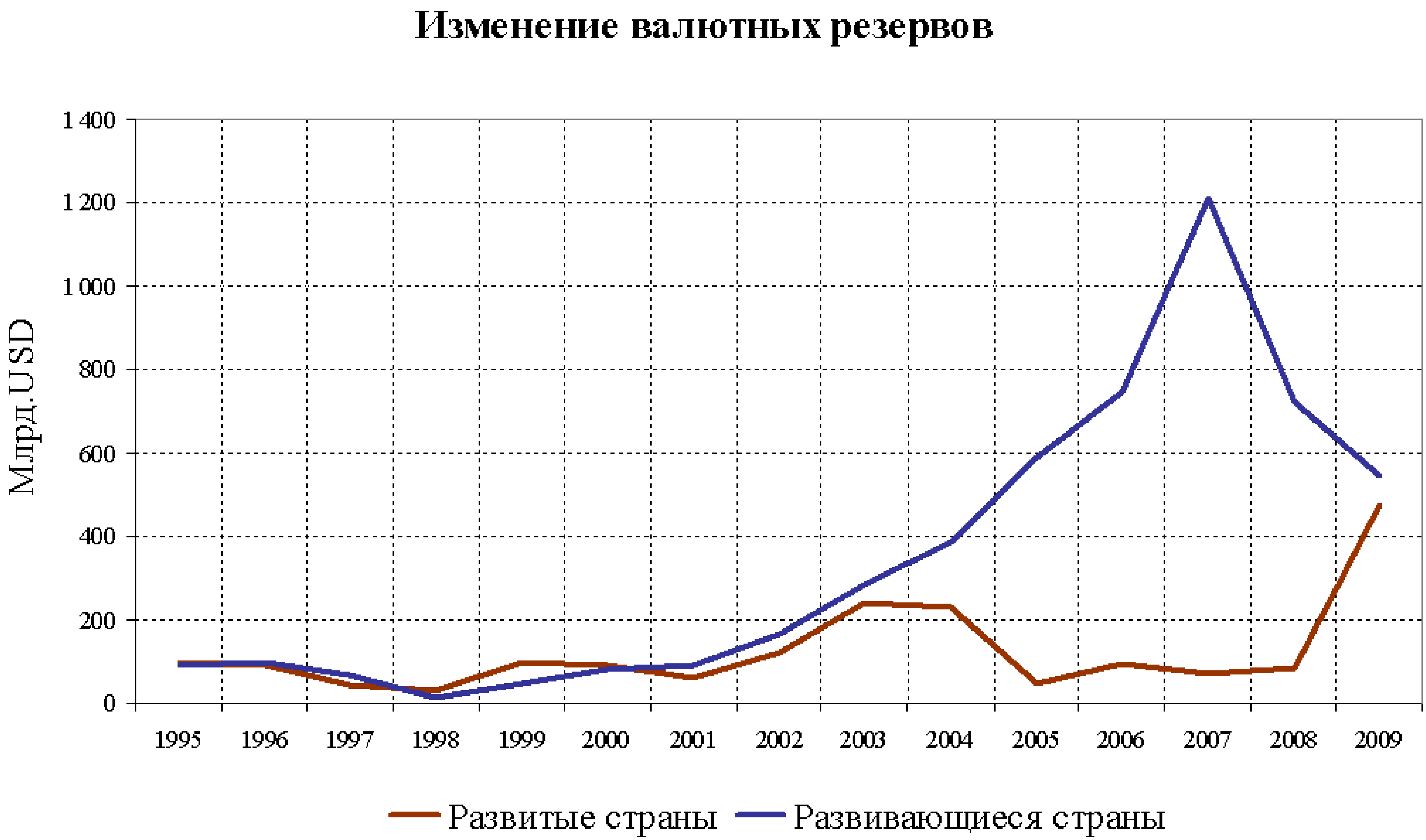



Рис. 6. Источник – МВФ

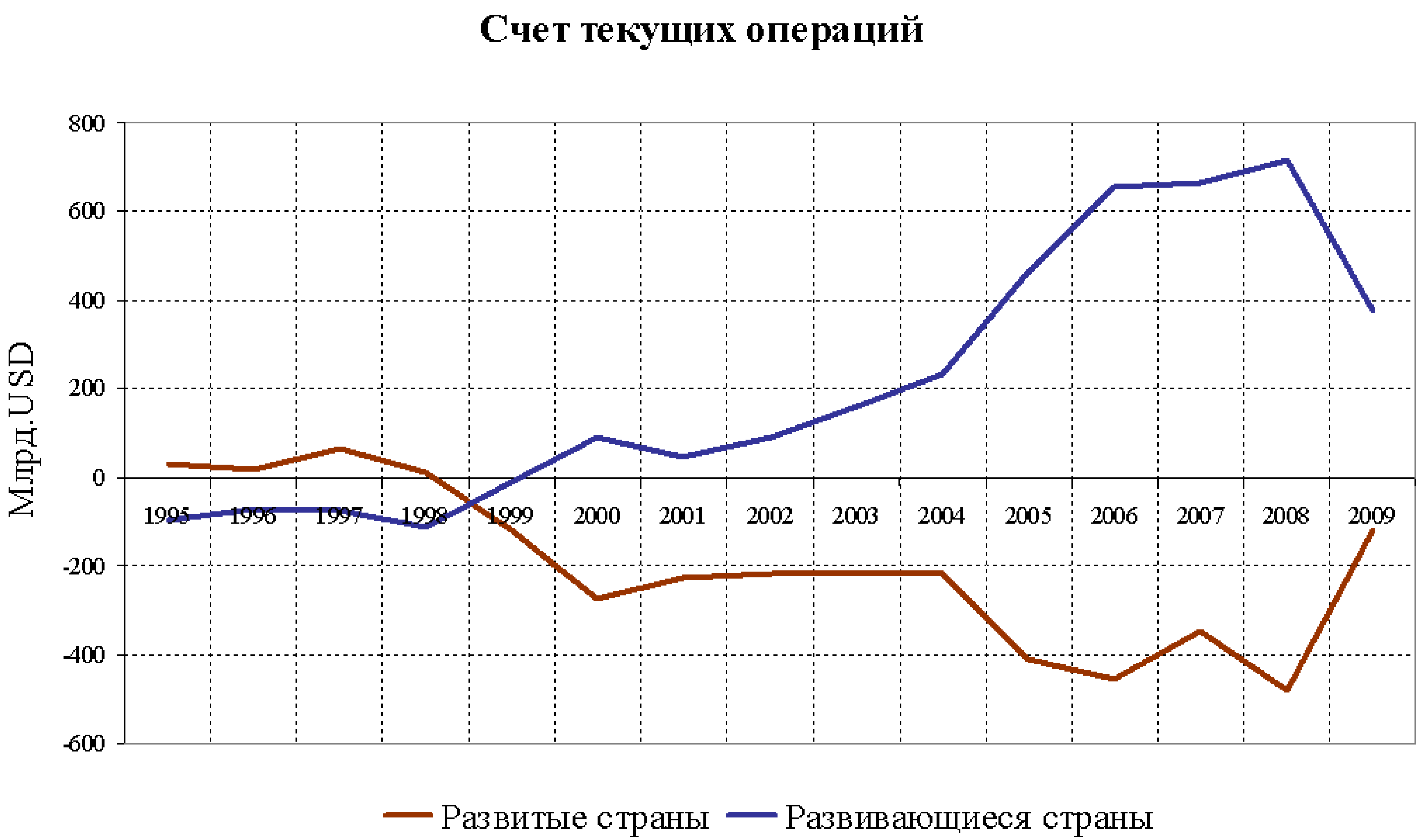



Рис. 7. Источник – МВФ

# Оценка сверху

**Утверждение 1.** *Для пула инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей* $\exists p^* = \min\{p > 0 \,|\, F(p) = 0\}$.

**Утверждение 2.** *Для случая пула инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей для любого допустимого решения задачи (1) справедливо неравенство* $s(\hat{T}) \leq s(0)e^{p^*\hat{T}}$.

*Схема доказательства.*

$$\int\limits_0^T e^{-p^*t} d\Phi^k(t) \leq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, N.$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^*t} d\Phi^k(t) = p^* \cdot \int\limits_0^{+\infty} \Phi^k(t) e^{-p^*t} dt$$

$$\int\limits_0^{+\infty} s(t) e^{-p^*t} dt =$$

$$s(0) \int\limits_0^{+\infty} e^{-p^*t} dt + \sum_{k=1}^{M} \left( \int\limits_0^{+\infty} e^{-p^*x} u_k(x) dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} \Phi^k(\tilde{t}) e^{-p^*\tilde{t}} d\tilde{t} \right)$$

# Идея доказательства оценки снизу 1

Дискретизация системы (1):

$h(n) = T/n$ – шаг сетки для отрезка $[0;T]$

$\vec{a}^{k,h(n)} = \left\{a_0^{k,h(n)}, a_1^{k,h(n)}, \dots, a_n^{k,h(n)}\right\}$, где

$$a_j^{k,h(n)} = \Phi_1^k\left((j+1)h(n)\right) - \Phi_1^k(jh(n)) + \Phi_2^k(jh(n)) - \Phi_2^k\left((j-1)h(n)\right),\ j > 0$$

$$a_0^{k,h(n)} = \Phi_1^k(h(n)) - \Phi_1^k(0).$$

$$\begin{cases} s^{h(n)}(j \cdot h(n)) = s(0) + \sum\limits_{k=1}^{M} \sum\limits_{l=0}^{j} u_l^{k,h(n)} \left( \sum\limits_{j=0}^{j-l} a_j^{k,h(n)} \right), & j = 0, 1, \dots, \dfrac{\hat{T}}{h(n)}, \\ s^{h(n)}(j \cdot h(n)) \geq 0, \quad u_l^{k,h(n)} \geq 0, & \\ u_l^{k,h(n)} = 0, & l \geq \dfrac{\hat{T}}{h(n)} - \left[\dfrac{T}{h(n)}\right], \\ s^{h(n)}(\hat{T}) \to \max. & \end{cases} \qquad (3)$$

## Идея доказательства оценки снизу 2

$\tilde{a}^{k,h(n)}(p) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j^{k,h(n)} e^{-jh(n)p}$, $A^{h(n)}(p) = \max\limits_k \tilde{a}^{k,h(n)}(p)$,

$p^*_{h(n)} = \min\left\{p > 0 | A^{h(n)}(p) = 0\right\}$.

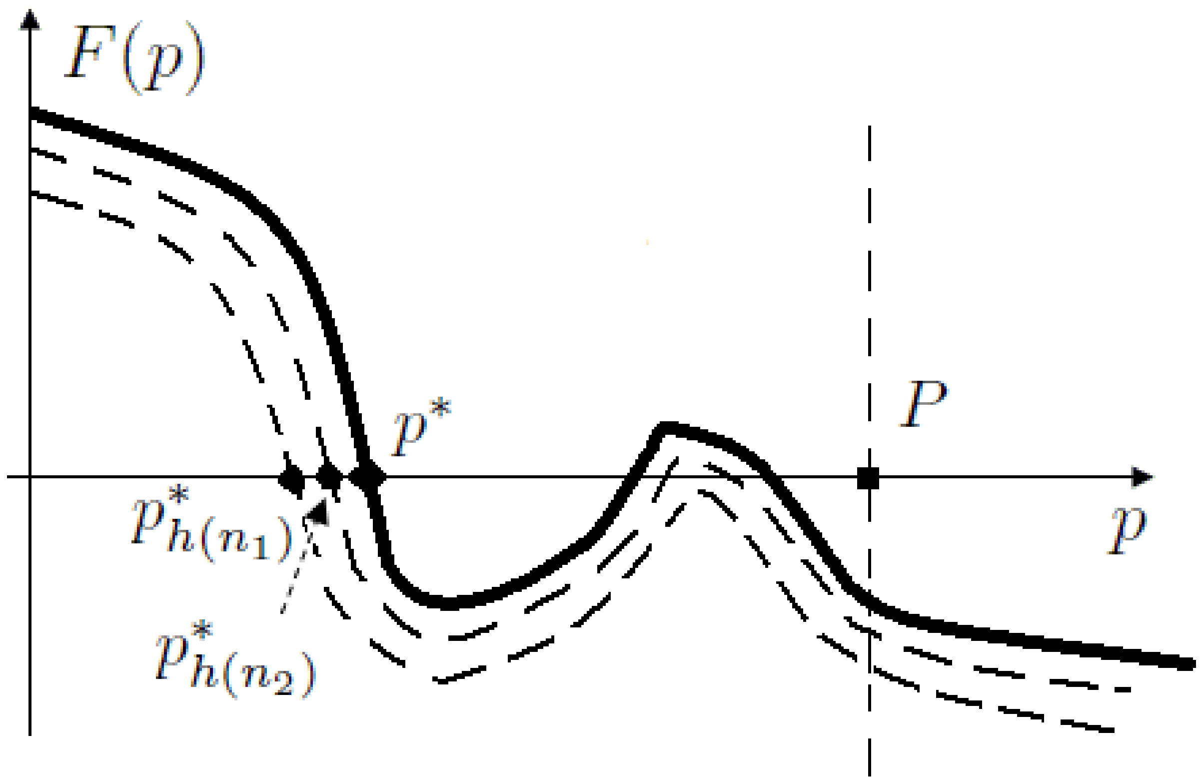



Рис. 8.

# Оценка снизу 1

**Лемма 1.** *Для любого фиксированного $P>0$ функциональная последовательность $A^{h(n)}(p)$ сходится равномерно по норме в $C[0;P]$ к функции $F(p)$ на отрезке $[0;P]$.*

**Лемма 2.** *Для любого $p \in [0;+\infty)$ справедливо, что $F(p) \geq A^{h(n)}(p)$.*

**Лемма 3.** *Для пула инвестиционных проектов $\left\{\Phi^k(t)\right\}_{k=1}^{M}$ с арбитражной структурой платежей $\exists\, k \in [1;M]$, $\tau_a > 0 : \forall t \in [0;\tau_a]$ $\Phi_2^k(t) > \Phi_2^k(0)$.*

**Лемма 4.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\left\{\Phi^k(t)\right\}_{k=1}^{M}$ – пул инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей, то $\exists N$ такое, что для $\forall\, n > N$ верно, что $\exists p_*^{h(n)} \in (0;p^*]$ $A^{h(n)}(p_*^{h(n)}) = 0$.*
2. *Если $\left\{\Phi^k(t)\right\}_{k=1}^{M}$ – пул инвестиционных проектов с арбитражными структурой платежей, то $\exists N$ такое, что для $\forall\, n > N$ верно, что $A^{h(n)}(p) > 0$ $\forall p > 0$.*

# Оценка снизу 2

Теорема Кантора–Липмана [4] утверждает, что

1. Для случая стандартных потоков платежей $\exists\ \lambda > 0:$ $s^{h(n)}(\hat{T}) \geq \lambda s(0) e^{p^*_{h(n)}\hat{T}}$, где $p^*_{h(n)} = \min\left\{p > 0 \,\middle|\, \tilde{A}^{h(n)}(p) = 0\right\}$ — внутренняя норма доходности пула инвестиционного проекта с дискретными потокомами платежей $\left\{\vec{a}^{k,h(n)}\right\}_{k=1}^{N}$.
2. Для случая арбитражного потока платежей $s^h(\hat{T}) = +\infty$.

Стратегия, реализующая требуемый темп роста:

$$u^{k,h(n)}(t) = \sum_{l=0}^{\hat{T}/h(n)} u_l^{k,h(n)} \delta(t - lh(n)).$$

$$u_\varepsilon^{k,h(n)}(t) = \sum_{l=0}^{\hat{T}/h(n)} u_l^{k,h(n)} \omega_\varepsilon(t - lh(n)), \text{ где}$$

$$\omega_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{\varepsilon} - \left(\dfrac{4}{\varepsilon}\right)^2 \left|x - \dfrac{\varepsilon}{4}\right|, & 0 \leq t \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (\dfrac{\varepsilon}{2}; +\infty), \end{cases} \quad \varepsilon = h(n)/100.$$

# Оценка снизу 3

**Лемма 5.** *Набор стратегий* $u_\varepsilon^{k,h(n)}(t)$ *является допустимым для задачи (1) и при ее применении* $s(\hat{T}) = s^{h(n)}(\hat{T})$ .

**Утверждение 3.** *Для случая пула инвестиционных проектов со стандартнами потоками платежей внутренняя норма доходности пула дискретных проектов* $\left\{\vec{a}^{k,h(n)}\right\}$ *стремится к внутренней норме доходности пула проектов с потоками платежей* $\left\{d\Phi^k\right\}_{k=1}^N$ *при* $n \to \infty$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} p^*_{h(n)} = p^*$.

# Список литературы

[1] Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets // Econometrica. 1983. **51**. N 4. P.1121–1144.

[2] Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turn pikes in an investment model // Economic theory. 1995. **5**. P.383–400.

[3] Presman E.L., Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and financial bubbles// Working paper, WP/2000/103. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences. 2000. 33p.

[4] Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects// Econometrica. 1995. **63**. N 5. P.1231–1240.

[5] Беленький В.З. Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана-Гейла. Препринт WP/2002/137/ - М.: ЦЭМИ РАН, 2002. - 78 с.

[6] Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики. Понятийный аппарат. Одномерные модели.

Беллмановский подход. - М.: Наука, 2007г., 259 с.

[7] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории финкций и функционального анализа, Наука, 1989, 623 с.

[8] М.П. Ващенко, А.А Шананин. Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // "Математическое моделирование 2012 (принята в печать).