

Эквациональные области среди полугрупп

Артем Шевляков

7 февраля 2013 г.

Уравнения над группами и полугруппами

Уравнение над группой G в языке $\mathcal{L}_G = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g | g \in G\}$ это равенство вида:

$$xg_1y^{-2}x^2g_2y = 1,$$

Уравнение над полугруппой S в языке $\mathcal{L}_S = \{\cdot\} \cup \{s | s \in S\}$ это равенство вида:

$$xs_1yx^2s_2 = s_3x^3s_4y.$$

Множество, являющиеся решением некоторой системы уравнений, называется **алгебраическим**.

Основное определение

Полугруппа S называется **эквациональной областью**, если любое конечное объединение алгебраических множеств над S снова является алгебраическим множеством. Для групп определение аналогичное.

Утверждение

Конечная полугруппа S является эквациональной областью если и только если для каждого натурального числа n любое множество $M \subseteq S^n$ является алгебраическим.

Критерии

Теорема [DMR]

Группа G в языке $\mathcal{L}_G$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}_{gr} = \{(x, y) | x = 1 \text{ или } y = 1\}$ является алгебраическим.

Теорема [DMR]

Полугруппа S в языке $\mathcal{L}_S$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}_{sem} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_2 \text{ или } x_3 = x_4\}$ является алгебраическим.

Эквациональные области среди групп:

- 1 простые группы;
- 2 свободные некоммутативные группы;
- 3 свободные произведения двух групп (кроме случая $Z_2 * Z_2$).

Эквациональные области среди полугрупп? Не, не слышали

В следующих классах полугрупп эквациональных областей нет:

- 1 коммутативные полугруппы;
- 2 инверсные полугруппы, которые не являются группами;
- 3 в частности, полурешётки;
- 4 свободный моноид;
- 5 полугруппы с нулём.

Основная проблема

Найти полугруппу S такую, что

- 1 S — эквациональная область,
- 2 S не является группой (существенно!!!).

Следовательно, будем исследовать простые конечные полугруппы

Множество I элементов полугруппы S называется **идеалом**, если для каждого элемента полугруппы $s \in S$ выполнены включения $sI \subseteq I$, $Is \subseteq I$. Полугруппа S , имеющая единственный идеал $I = S$ называется **простой**.

Теорема (Рис-Сушкевич)

Для любой конечной простой полугруппы S существует конечная группа G и конечные множества I, Λ такие что, полугруппа S изоморфна множеству троек $[g; \lambda, i]$, где $g \in G, i \in I, \lambda \in \Lambda$.
Умножение на тройках $[g; \lambda, i]$ определяется как

$$[g; \lambda, i][h; \mu, j] = [gp_{i\mu}h; \lambda, j],$$

где $p_{i\mu} \in G$ — элемент матрицы $\mathbf{P}$ со свойствами

- 1 матрица $\mathbf{P}$ состоит из $|I|$ строк и $|\Lambda|$ столбцов;
- 2 элементы матрицы $\mathbf{P}$ суть элементы группы G ;
- 3 элементы первой строки и первого столбца равны 1.

Конечную простую полугруппу S будем обозначать с помощью четвёрки $(G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$.

Правые и левые идеалы

Множество I элементов полугруппы S называется **левым (правым) идеалом**, если для любых элементов $s \in S$, $a \in I$ выполнено $sa \in I$ ($as \in I$). Левый (правый) идеал полугруппы S называется **минимальным**, если он не содержит в себе других левых (правых) идеалов полугруппы S .

Число $|\Lambda|$ ($|I|$) — это количество минимальных правых (левых) идеалов полугруппы S .

Начинаем исследовать необходимые условия

Утверждение

Если для конечной простой полугруппы $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ выполнено $|\Lambda| = 1$ или $|I| = 1$, то S не является эквациональной областью.

Почти все уравнения удовлетворяющее точке $[1; 1, 1]$ удовлетворяют также и $[1; 1, 2]$.

Продолжаем исследовать необходимые условия

Утверждение

Если конечная простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью, то группа G также является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_G$.

Множество пар $\mathcal{M} = \{(x, y) | x = [1; 1, 1] \text{ или } y = [1; 1, 1]\}$ является решением системы полугрупповых уравнению $\mathbf{S}$. Заменяем все константы системы $\mathbf{S}$ по правилу $[g; \lambda, i] \rightarrow g$ и получим систему уравнений над группой G с решением $\{(x, y) | x = 1 \text{ или } y = 1\}$. Следовательно, группа G — эквациональная область.

Продолжаем исследовать необходимые условия

Матрица $\mathbf{P}$ называется **вырожденной**, если в ней есть одинаковые строки (столбцы).

Утверждение

Если для конечной простой полугруппы $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ матрица $\mathbf{P}$ вырождена, то S не является эквациональной областью.

Если в матрице $\mathbf{P}$ столбцы с номерами λ, μ одинаковы, то элементы $[1; \lambda, 1]$, $[1; \mu, 1]$ не различимы никаким термом $t(x)$, не начинающимся на переменную. Например, подстановка в терм $[g; \nu_1, i]x[h; \nu_2, j]$ даёт

$$\begin{aligned}[g; \nu_1, i][1; \lambda, 1][h; \nu_2, j] &= [gp_{i\lambda}1; \nu_1, 1][h; \nu_2, j] = \\ &= [gp_{i\lambda}1p_{1\nu_2}h; \nu_1, j] = [gp_{i\lambda}h; \nu_1, j]\end{aligned}$$

$$[g; \nu_1, i][1; \mu, 1][h; \nu_2, j] = [gp_{i\mu}h; \nu_1, j].$$

Поскольку $p_{i\lambda} = p_{i\mu}$, то значения терма $t(x)$ одинаковы.

Необходимые условия

Если конечная простая полугруппа S является эквациональной областью, то

1 $|G|^{| \Lambda | - 1} < |I|;$

2 $|G|^{| I | - 1} < | \Lambda |;$

Критерий

Теорема

Конечная простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1 матрица $\mathbf{P}$ невырождена;
- 2 группа G является эквациональной областью (в групповом языке $\mathcal{L}_G$).

Пример эквациональной области

Пусть простая полугруппа ED_{240} определяется следующей четвёркой $(G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$: $G = A_5$ (знакопеременная группа порядка 5), $\Lambda = I = \{1, 2\}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & g \end{pmatrix},$$

где g — произвольный неединичный элемент группы A_5 . Порядок полугруппы ED_{240} равен $|A_5| \cdot 2 \cdot 2 = 240$. Поскольку группа A_5 является эквациональной областью и матрица $\mathbf{P}$ невырождена, то по критерию полугруппа ED_{240} является эквациональной областью.

Переходим к непростым полугруппам

Если в полугруппе S существует минимальный двусторонний идеал, то он единственный и называется **ядром** (обозначается $Ker(S)$). Ядро всегда является простой полугруппой. В конечных полугруппах ядро всегда существует.

Если $S = Ker(S)$, то S — простая полугруппа.

Если ядро полугруппы S является группой, то S называется **гомогруппой**.

А что насчет непростых полугрупп?

Пусть $S = (G, \mathbf{P}, I, \Lambda)$ — конечная простая полугруппа. Если это не группа, то в ней нет единицы (элемент $[1; 1, 1]$ единицей не является!). Пусть $S^* = S \cup \{1\}$ — моноид, полученный из полугруппы S . Полугруппа S^* имеет идеал S , то есть она не проста.

Теорема

Если полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_S$, то полугруппа S^* — эквациональная область в языке $\mathcal{L}_{S^*}$.

Центр полугруппы

Центр полугруппы S — это множество всех элементов $z \in S$, которые коммутируют со всеми элементами полугруппы.

Теорема

Пусть I — левый (правый) идеал полугруппы S , элемент $e \in S$ коммутирует со всеми элементами идеала I , и существует элемент $a \in I$ для которого $ea \neq a$. Тогда полугруппа S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_S$.

Теорема

Любая полугруппа S с неединичным центром (то есть в S существуют центральный элемент e и $a \in S$ такие, что $ae \neq a$) не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_S$.

Следствие

Верны следующие утверждения:

- 1 любая нетривиальная полугруппа S с нулем не является эквациональной областью;
- 2 любая нетривиальная коммутативная полугруппа S не является эквациональной областью;
- 3 если гомогруппа S является эквациональной областью, то S — группа (иными словами $S = \text{Ker}(S)$).

Теорема

Если полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_S$, то ядро $K \subseteq S$, является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_K$.

Следствие

Пусть конечная полугруппа S — эквациональная область и не является группой, тогда $|S| \geq 240$.

Следующие проблемы остаются открытыми:

Следующие проблемы остаются открытыми:

Гипотеза

Пусть K — простая конечная полугруппа. Тогда существует такое число $n(K)$, что любая полугруппа S при $|S| > n(K)$ и ядром изоморфным K не может быть эквациональной областью.

Из положительного решения проблемы будет следовать отсутствие эквациональных областей среди бесконечных полугрупп с конечным идеалом.