

Сильные разрывы в МСС

Ударные адиабаты

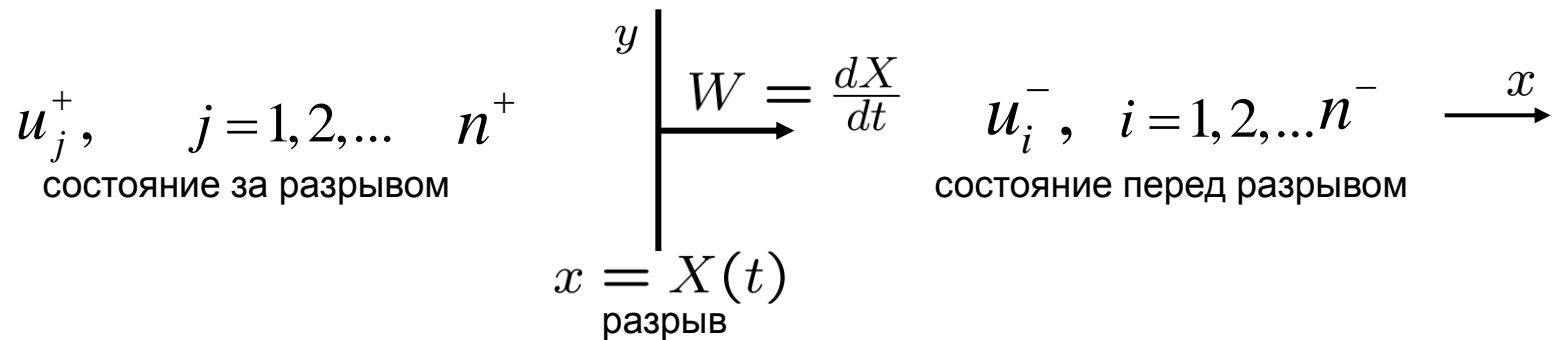
Куликовский Андрей Геннадьевич

Москва 2013

Гиперболические системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij}(u_i) \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Разрывные решения гиперболических систем



Границные условия на разрыве: $\Phi(u_i^-, u_i^+, W) = 0$

(1) основные (N_{och} условий)

(2) дополнительные (N_{don} условий) - условия существования структуры разрыва

Допустимые разрывы удовлетворяют $N = N_{och} + N_{don}$ условиям

Ударная адиабата: множество всех значений \mathcal{U}_j^+ , удовлетворяющих N_{osn} граничным условиям при всевозможных значениях W и при фиксированных \mathcal{U}_i^-

Размерность ударной адиабаты в пространстве $\mathcal{U}_j^+ \quad n^+ + 1 - N_{osn}$

Допустимая ударная адиабата: часть ударной адиабаты, удовлетворяющая, кроме основных, также N_{don} дополнительным граничным условиям

Размерность допустимой ударной адиабаты равна

$$M = n^+ + 1 - N, \quad N = N_{osn} + N_{don}$$

Ударная адиабата может содержать допустимые части разной размерности

Допустимые разрывы эволюционны

$$N = Q^+ + Q^- + 1$$

Q^+, Q^- - число характеристик различного типа, уходящих от разрыва направо и налево

(Условие эволюционности – условие разрешимости задачи о взаимодействии разрыва с малыми возмущениями)

Некоторые примеры

Уравнения законов сохранения. Предполагается, что $n^+ = n^- = n = N_{осн}$

1. Классический случай $N_{don} = 0$

Ударная адиабата $u^+ = u^+(W)$

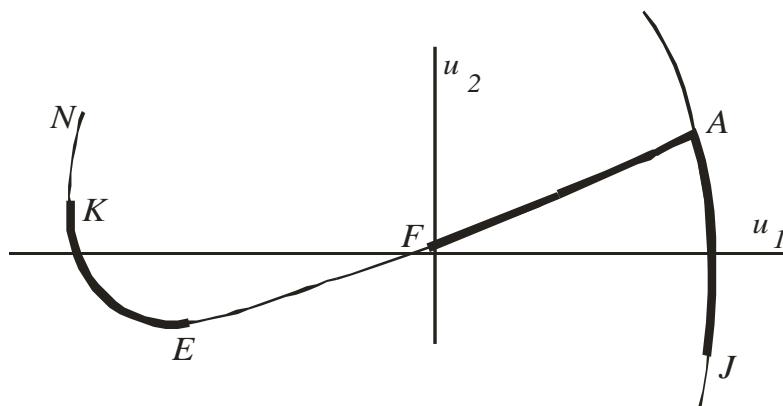
Допустимая ударная адиабата -- добавляются неравенства, например, $S^+ - S^- \geq 0$
(S – энтропия)

2. Фронт горения. $N_{don} = 1$

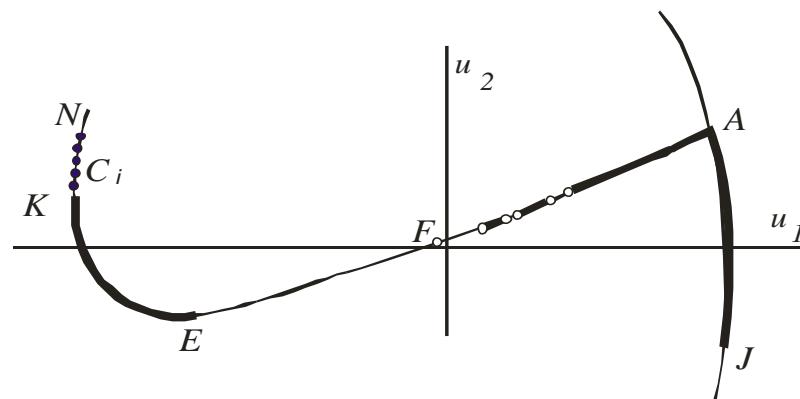
Допустимая ударная адиабата – одна точка

3. Разрывы, в структуре которых существенна дисперсия $N_{don} = 1$

(ударные волны в композитах, разрывы электромагнитного поля в нелинейных магнетиках и диэлектриках)



Допустимая ударная адиабата
в отсутствии дисперсии



Допустимая ударная адиабата
при наличии дисперсии

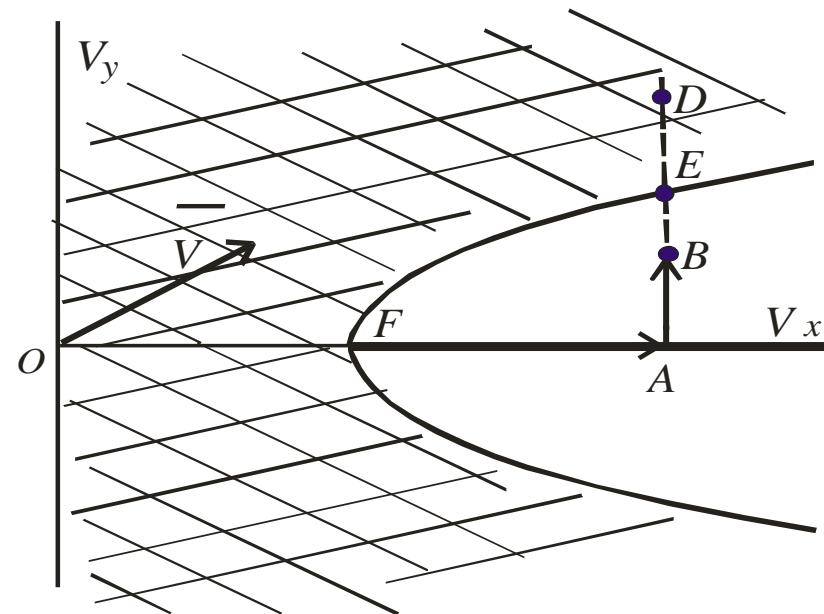
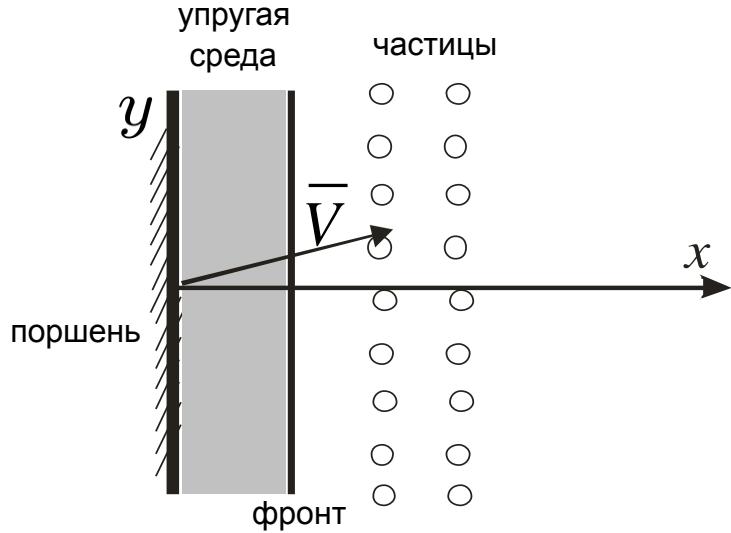
Случаи допустимой ударной адиабаты размерности более 1

$$M = n^+ + 1 - N = (Q^+ + P^+) + 1 - (Q^+ + Q^- + 1) = P^+ - Q^-$$

Фронты фазовых превращений (разные уравнения, $n^+ \neq n^-$)

а) Фронты ионизации в магнитном поле

б) Фронт образования нелинейно упругой среды при консолидации частиц



Сильные разрывы в среде с остаточными деформациями

Простой пример среды с разрывами $M > 1$

Среда анизотропная, продольные волны упругие, поперечные волны сопровождаются остаточными деформациями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P(\varepsilon)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = K(\varepsilon) \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

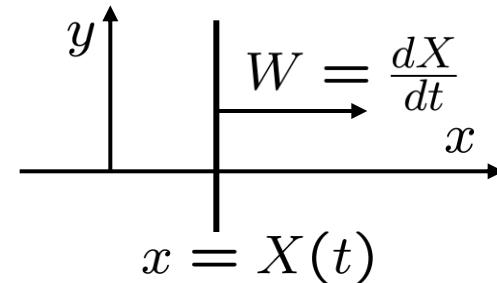
$0 \leq K \leq 1$, $K = 1$ – упругая среда

$K = 0$ – отсутствие сдвиговых напряжений ($\sigma = 0$)

$$P = -P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2 \quad \sigma = \sigma_1 u + \sigma_2 u^2 \quad K = K_0 - K_1 \varepsilon$$

При $\mu = 0$ система гиперболическая
характеристические скорости:

$$c_1 = \sqrt{P_1/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{K\sigma_1/\rho}$$



x – Лагранжева переменная
 v_x, v_y – компоненты скорости по осям x, y

ε – продольная деформация (по оси x)

u – поперечный упругий сдвиг

$P(\varepsilon)$ – давление по нормали к фронту

$\sigma(u)$ – касательное напряжение

μ – коэффициент вязкости

$\rho_0 = \text{const}$ Лагранжева плотность

Законы сохранения

$$1) W[\varepsilon] + [v_x] = 0, \quad W = \frac{dX}{dt}$$

$$2) \rho W[v_x] - [P(\varepsilon)] = 0$$

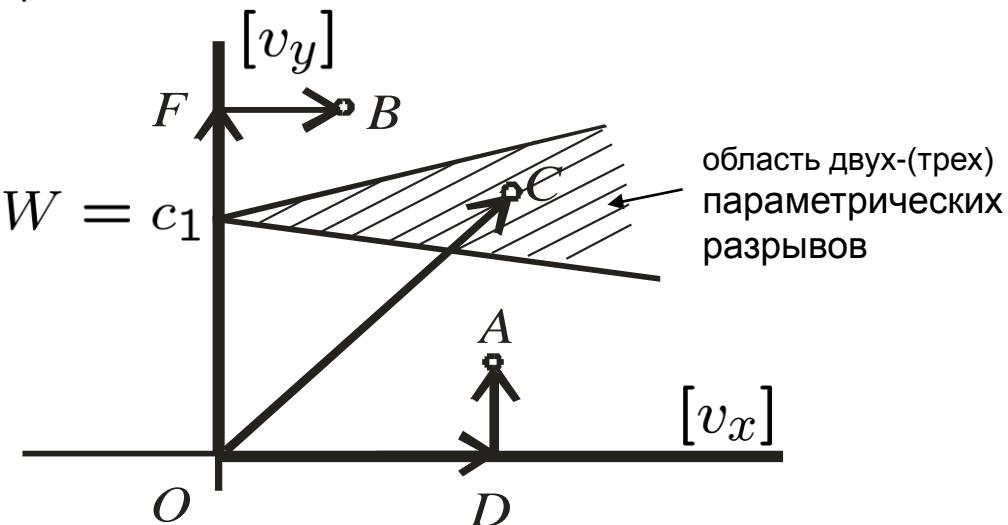
$$3) \rho W[v_y] + [\sigma(u)] = 0$$

При заданном W находится $[v_x]$, а $[v_y]$ остается неопределенным

Ударная адиабата : $[v_x]$ и $[v_y]$ произвольны

Требование допустимости

Задача о поршне



Слияние двух 1-параметрических разрывов \rightarrow 2-параметрический разрыв

При слиянии возникает разрыв с меньшим N , чем у однопараметрических

Ударные волны, их образование и структура в упругопластической среде Прандтля-Рейсса с упрочнением

Модель Прандтля-Рейсса

Предполагается, что деформации и скорости – малые. $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\rho = \text{const}$

$$\sigma_{ij} = D_{ij} - p \delta_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad k = 1, 2, 3$$

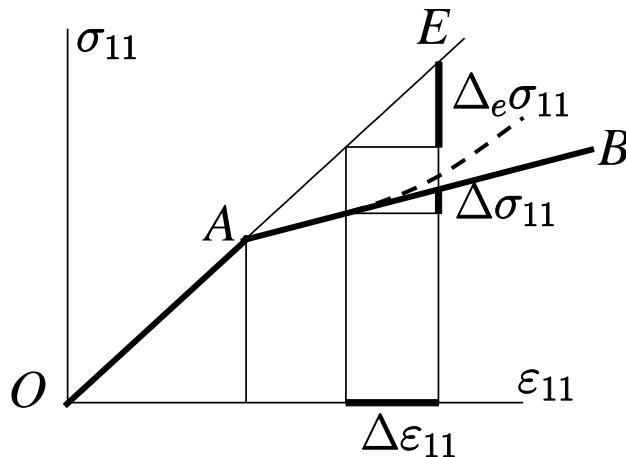
Поверхность нагружения: $D_{ij} D_{ij} = D^2$ при нагружении $\frac{dD}{dt} \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad \lambda, \mu = \text{const} \text{ - коэффиц. Ламе} \\ \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \mu(1 - q(D)) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \frac{D_{kl} D_{ij}}{D^2}, \quad 0 \leq q(D) \leq 1 \end{array} \right.$$

система уравнений гиперболического типа

Свойства plasticити среды определяются функцией $q(D)$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = q(D) \frac{\partial_e D}{\partial t}$$



Растяжение стержня.

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} / \frac{d_e \sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = q(D), \quad D = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}$$

Волны Римана.

все величины зависят от $\varphi(x, t)$

$$\frac{dx}{dt} = c = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} / \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{линия } \varphi(x, t) = \text{const} \text{ - характеристика}$$

Каменярж, 1972
Балашов, 1992

Показано, что если $\frac{dq}{dD} \leq 0$, то волны Римана не опрокидываются.

Найдены некоторые интегралы уравнений волн Римана.

Обозначения: $D_{1i} = D_i$, $i = 1, 2, 3$ 1 — направление оси $x \equiv x_1$

Скорости характеристик:

1. Начальные остаточные деформации $c_0 = 0$
2. Вращательные волны $D_1 = \text{const}$, $D_2^2 + D_3^2 = \text{const}$, $c_{sp}^2 = \mu/\rho$
(пластические эффекты отсутствуют)
3. Плоскополяризованные упругопластические волны $\pm c_1$, $\pm c_2$

$$0 \leq c_1 \leq \sqrt{\mu/\rho} \leq c_2 \leq \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$$

Исследование сводится к изучению решений двух ОДУ для D_1 и D_2

Изменения скоростей находятся квадратурами.

Имеется интеграл (Балашов), позволяющий выразить D как функцию F ,

$$\text{где } F = \sqrt{\frac{3}{2}D_1^2 + 2D_2^2}$$

$D = F$ при изотропии начального состояния в плоскости x_2, x_3 ,

когда $(D_{22} - D_{33})_o = 0$

Уравнения для упругопластических волн Римана

$$\frac{C^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 + 2\Psi \frac{D_1^2}{F^2} \right)}{1 - \frac{1}{C^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right)} D'_1 - 2\Psi \frac{D_1 D_2}{F^2} D'_2 = 0 \quad ()' = \frac{d}{d\varphi} ()$$

$$-\frac{2\Psi \frac{D_1 D_2}{F^2}}{1 - \frac{1}{C^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right)} D'_1 + \left[C^2 - \left(1 + 2\Psi \frac{D_2^2}{F^2} \right) \right] D'_2 = 0$$

$$C = c\sqrt{\rho/\mu}$$

$\Psi = \Psi(D)$ - функция, выражающаяся через $q(D)$ и $(D_{22} - D_{33})_o$

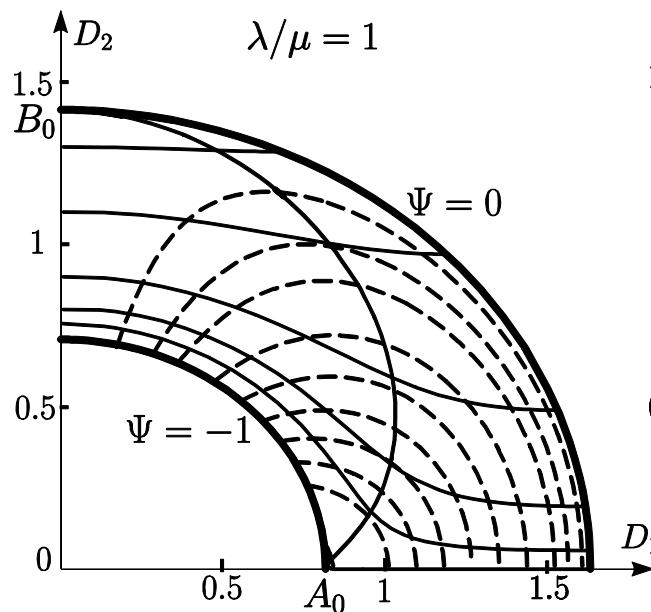
(если перед волной $(D_{22} - D_{33})_o = 0$, то $\Psi(D) = q(D) - 1$, $D = F$)

$\frac{D_i D_j}{F^2}$ – функция от $\frac{D_2}{D_1}$, где $F^2 = \frac{3}{2}D_1^2 + 2D_2^2$

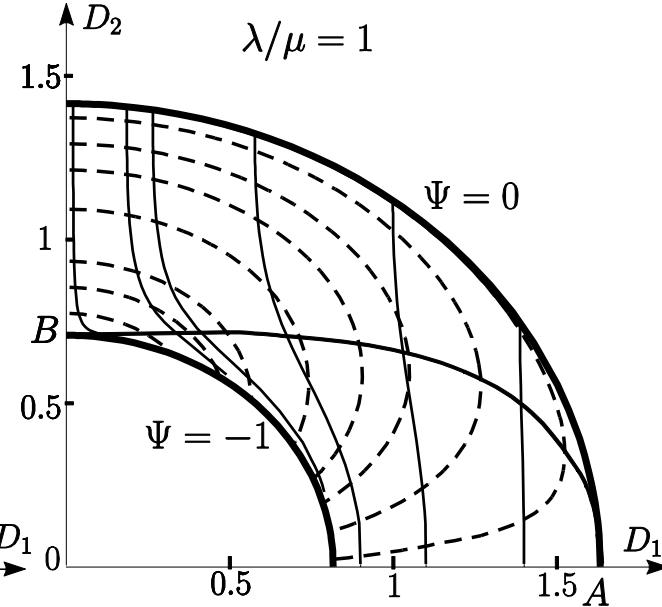
$$C^2 = C_{1,2}^2 \left(\frac{D_2}{D_1}, \Psi \right), \quad \frac{D'_2}{D'_1} = \Phi \left(\frac{D_2}{D_1}, \Psi \right), \quad \Psi = \Psi(F)$$

На плоскости D_1, D_2 можно универсальным образом изобразить зависимости $D_2(D_1)$, если принять, например, что $\Psi = \sqrt{\frac{3}{2}D_1^2 + 2D_2^2 - 2}$

Интегральные кривые и линии $C = \text{const}$



быстрые волны Римана



медленные волны Римана

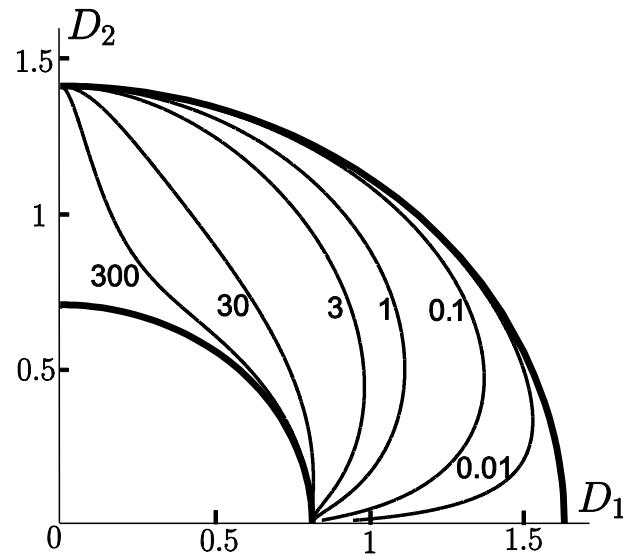
$$\frac{dD}{dt} \geq 0$$

Если заданы значения q и D_2/D_1 , то на рисунках можно найти соответствующие точки и значения C и D'_2/D'_1 .

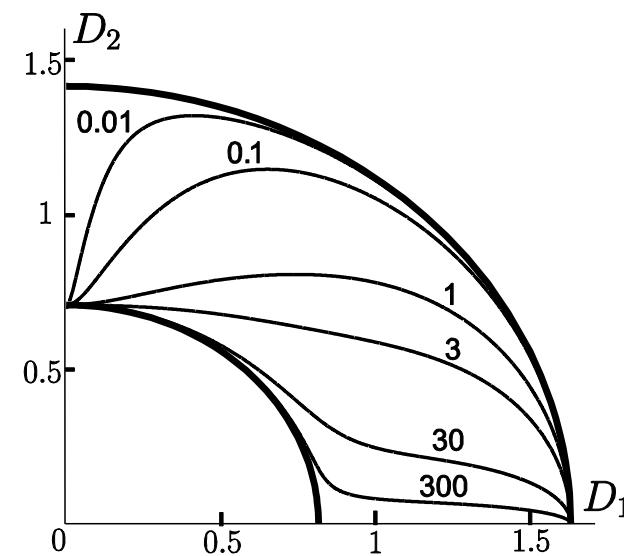
Опрокидывание волны Римана, помимо q и D_2/D_1 , зависит от dq/dD

Численно найдены критические значения $(dq/dD)_{kp}$

Изолинии критических значений dq/dD

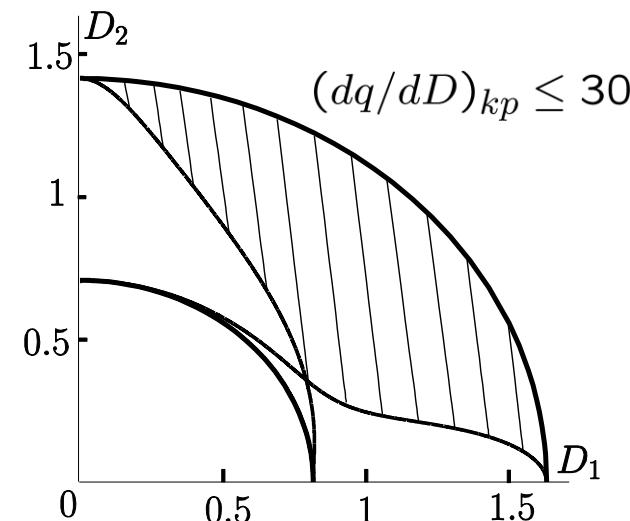
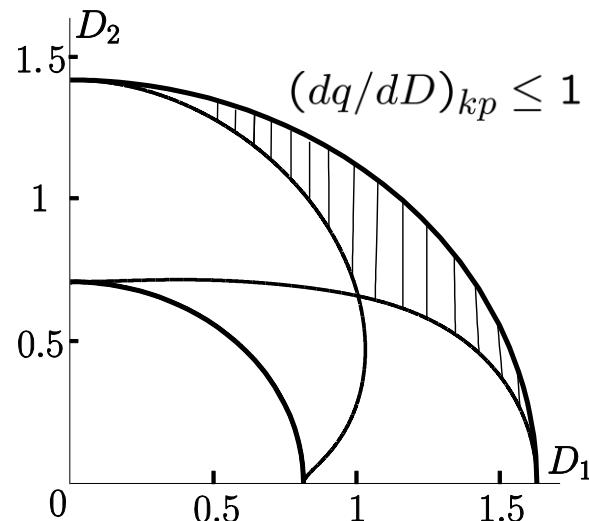


быстрые волны Римана



медленные волны Римана

Область опрокидывания быстрых и медленных волн.



Ударные волны в упругопластической среде Прандтля-Рейсса, структура которых определяется релаксацией напряжений.

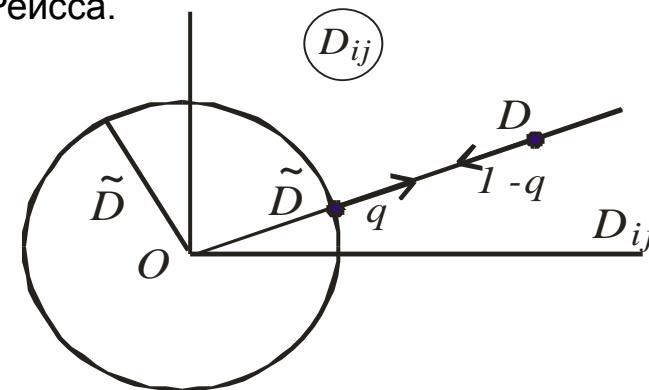
Уравнения среды Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ \quad \rho, \lambda, \mu = \text{const} \\ \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - (1-q)h(D - \tilde{D}) \frac{D_{ij}}{D}, \\ \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = q h(D - \tilde{D}), \quad D_{ij}D_{ij} = D^2, \quad h = \text{const}, \quad q = q(\tilde{D}, D) \end{array} \right.$$

Предполагается $\frac{d\tilde{D}}{dt} \geq 0 \quad (D > \tilde{D})$ $q = a(\tilde{D}) + b(D - \tilde{D}, \tilde{D})$ $b(0, \tilde{D}) = 0$

При $h \rightarrow \infty$ или при медленных процессах

эти уравнения переходят в уравнения Прандтля-Рейсса.



Стационарная структура:

решение зависит от $\xi = x + Wt, \quad W = \text{const}$

$$\frac{d}{d\xi}(\cdot) = (\cdot)'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} WD'_1 - \frac{4}{3}\mu v'_1 - h(1-q)(D - \tilde{D})\frac{D_1}{D} \\ WD'_2 = \mu v'_2 - h(1-q)(D - \tilde{D})\frac{D_2}{D} \\ WD' = 2\mu \frac{D_1}{D}v'_1 + 2\mu \frac{D_2}{D}v'_2 - h(1-q)(D - \tilde{D}) \\ W\tilde{D}' = hq(D - \tilde{D}) \end{array} \right.$$

$$v'_1 = \frac{D'_1}{\rho W - \frac{1}{W}(\lambda + \frac{2}{3}\mu)}$$

$$v'_2 = \frac{D'_2}{\rho W}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D'_1 = -\psi(W)\frac{D_1}{D}H' \\ D'_2 = -\chi(W)\frac{D_2}{D}H' \\ D' = -\left[2\mu\left(\psi_1(W)\frac{D_1^2}{D^2} + \chi(W)\frac{D_2^2}{D^2}\right) + 1\right]H' \\ \tilde{D}' = \frac{q}{1-q}H' \quad q = a(\tilde{D}) + b(D - \tilde{D}, \tilde{D}) \quad b(0, \tilde{D}) = 0 \\ H' = h(1-q)(D - \tilde{D}) \end{array} \right.$$

$$\psi(W) = -\frac{\rho W^2 - (\lambda + \frac{2}{3}\mu)}{\rho W^2 - (\lambda + 2\mu)}$$

$$\chi(W) = -\frac{\rho W^2}{\frac{1}{\rho W^2} - \mu}$$

$$\psi_1(W) = \frac{1}{\rho W^2 - (\lambda + 2\mu)}$$

$$\chi(W) = \frac{1}{\rho W^2 - \mu}$$

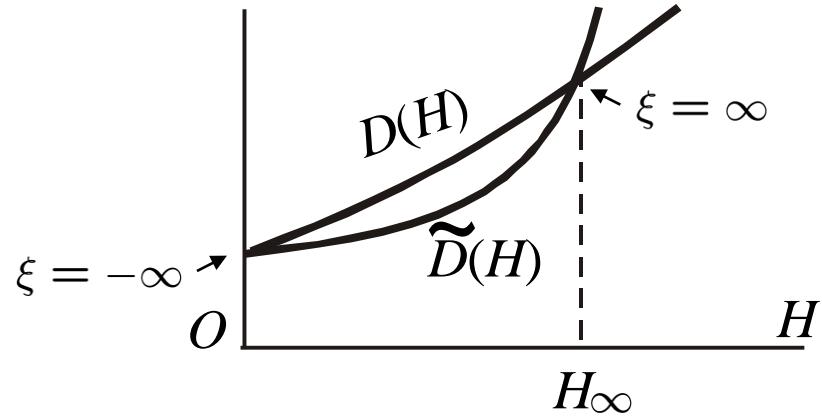
Первые четыре уравнения последней системы определяет производные от неизвестных функций по переменной H

Решения системы представлены функциями $D_1(H), D_2(H), D(H), \tilde{D}(H), \xi(H)$, 15 зависящими от W как от параметра

$$\frac{dD_2}{dD_1} = f(W) \frac{D_2}{D_1}, \quad f(W) = \frac{\chi(W)}{\Psi(W)}, \quad D_2 = AD_1^{f(W)}, \quad A = \text{const}$$

При $\xi = \pm\infty \quad D = \tilde{D}, \quad H' = 0$

При $\xi = -\infty \quad \frac{dD}{dH} > \frac{d\tilde{D}}{dH}$



$$\frac{d\tilde{D}}{dH} = \frac{q}{1-q}$$

$$H_\infty = \lim_{\xi \rightarrow \infty} H$$

Значение H_∞ и всех остальных величин при $\xi = \infty$ зависит от вида функции

$$q(\tilde{D}, D) = a(\tilde{D}) + b(D - \tilde{D}, \tilde{D}), \quad b(0, \tilde{D}) = 0$$

и, в частности, от второго слагаемого $b(D - \tilde{D}, \tilde{D})$, не входящего в модель упругопластической среды

Интегральные кривые уравнений структуры образуют веер кривых, выходящих из начальной точки, каждая из которых соответствует некоторому W .



На каждой кривой имеется точка, соответствующая $\xi = \infty$, в которой $\tilde{D} = D$.

Положение этой точки определяется процессом релаксации девиатора напряжений.

Интегральная кривая при $W = c_1$ или $W = c_2$ и ударные адиабаты касаются соответствующей интегральной кривой волны Римана в начальной точке.

Для разных функций $b(D - \tilde{D}, \tilde{D})$ (не входящих в модель упругопластической среды) допустимая ударная адиабата будет разной.

Выводы

1. В упругопластической среде Прандтля-Рейсса с принятой моделью релаксации напряжений в структуре разрывов движущиеся разрывы – однопараметрические.

Помимо законов сохранения на допустимых разрывах должны выполняться два дополнительных соотношения, зависящих от процессов внутри структуры разрыва. Это отличает такие разрывы от привычных ударных волн.

2. Разные мелкомасштабные механизмы, проявляющиеся в структуре разрывов, приводят к разным соотношениям на разрывах и, как следствие, к зависимости решений задач в целом от микропроцессов в структуре.