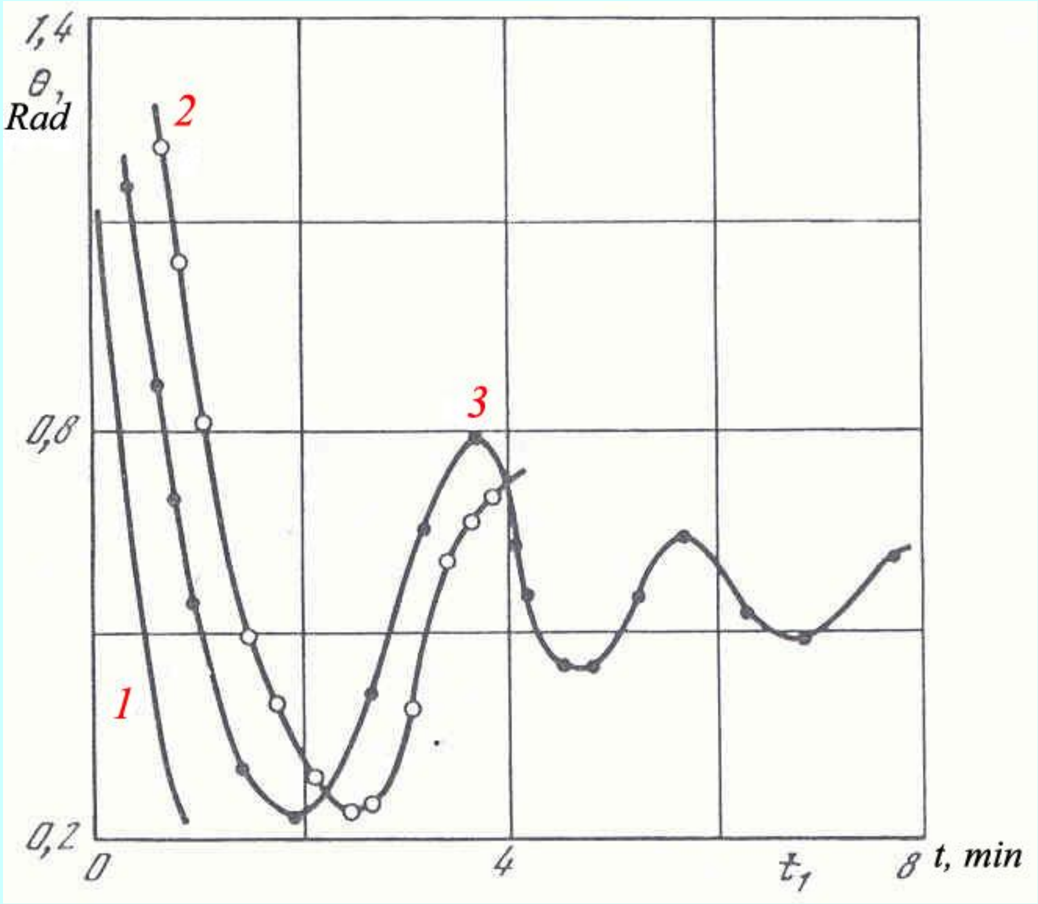
Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла

В.Ю. Ляпидевский, В.В. Пухначёв

Затухание инерционного движения воды, вызванного вращением цилиндра

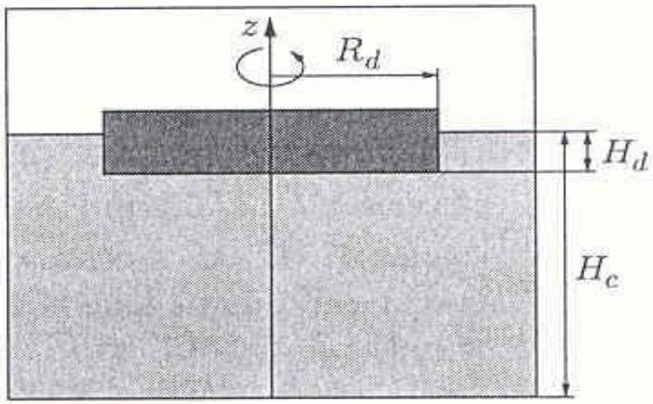


1 – теоретическая кривая для ньютоновской жидкости

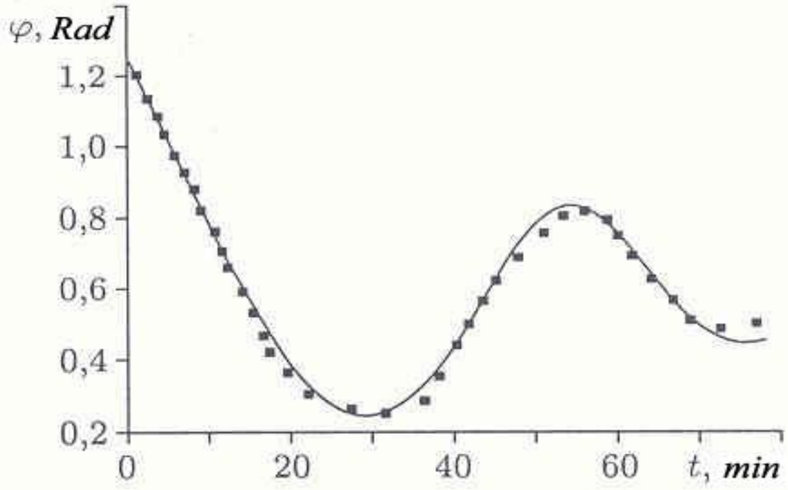
2, 3 – эксперименты в различной геометрии

(Р.А. Апакашев, В.В. Павлов, 1997)

Эксперименты с вращением диска



Фиг. 1



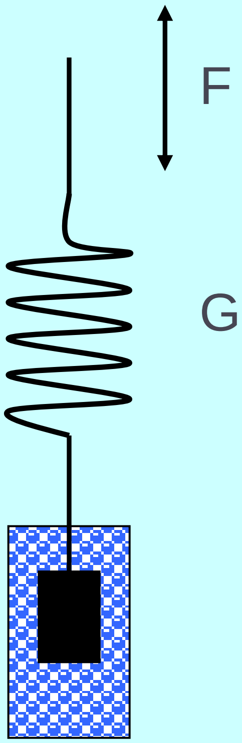
Фиг. 2

- Фиг. 1 – схема эксперимента
- Фиг. 2 – зависимость угла поворота диска от времени в процессе его вращения по инерции под действием начального момента импульса
- (сплошная линия – расчет, точки – эксперимент).

(А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко, 2008)

Модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла

Основные определения



$\tau >> \mathrm{t}$ (время наблюдения t много меньше, чем время релаксации) – упругое тело

$\tau << \mathrm{t}$ (время наблюдения t много больше, чем время релаксации) – ньютонова жидкость

$$\rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) = -\nabla p + div\mathbf{S},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\ \ \mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S},\ \ Tr\mathbf{S} = 0$$

Уравнения движения

$$\tau\frac{\tilde{d}\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}$$

Уравнение состояния

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{W} + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{W})^T$$
$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T\right)$$

Вращательная производная Яуманна

τ – время релаксации, μ – вязкость, P – тензор напряжений,
S – его девиатор, D – тензор скоростей деформаций , p – давление,

Двумерное движение среды Максвелла

Искомые функции: $u(x,y,t), v(x,y,t), p(x,y,t), S_{11}=-S_{22}=A(x,y,t), S_{12}=S_{21}=B(x,y,t)$

Уравнения движения:

$$u_x+v_y=0,$$

$$\rho\,(u_t+u\,u_x+v\,u_y)+p_x-A_x-B_y=0,$$

$$\rho\,(v_t+u\,v_x+v\,v_y)+p_y-B_x+A_y=0,$$

$$A_t+u\,A_x+v\,A_y+B(v_x-u_y)-2\mu\tau^{-1}u_x+\tau^{-1}A=0,$$

$$B_t+u\,B_x+v\,B_y-A(v_x-u_y)-\mu\,\tau^{-1}(u_y+v_x)+\tau^{-1}B=0.$$

Характеристики: $\varphi(x, y, t) = 0.$

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = \pm\rho^{-1/2}[(\frac{\mu}{\tau} + A)\varphi_x^2 + $$

$$+ 2B\varphi_x\varphi_y + (\frac{\mu}{\tau} - A)\varphi_y^2]^{1/2},$$

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0, \qquad \varphi_x = \pm\, i\,\varphi_y.$$

Неустойчивость Адамара возможна при $\tau^2(A^2 + B^2) > \mu^2$

Бесконечная группа, допускаемая уравнениями плоского движения среды Максвелла

$$X_1 = \partial_t$$

$$X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v + 2B\partial_A - 2A\partial_B$$

$$X_3 = \alpha(t)\partial_x + \dot{\alpha}(t)\partial_u - \rho x\ddot{\alpha}(t)\partial_p$$

$$X_4 = \beta(t)\partial_y + \dot{\beta}(t)\partial_v - \rho y\ddot{\beta}(t)\partial_p$$

$$X_5 = \gamma(t)\partial_p$$

где $\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t)$ - произвольные функции класса C^∞ .

Слоистые движения

$$\rho v_t = B_x, \quad \tau\left(A_t + Bv_x\right) + A = 0, \quad \tau\left(B_t - Av_x\right) + B = \mu v_x$$

Условие гиперболичности: $\tau A + \mu > 0$

Асимптотический анализ $(\mu\tau^{-1} = \sigma = \text{const}, \quad \tau \to \infty)$

$$\rho v_t = B_x, \quad A_t = -Bv_x, \quad B_t = \left(\sigma + A\right)v_x \qquad (*)$$

Система (*) имеет интеграл

$$\left(\sigma + A\right)^2 + B^2 = \left[q_0\left(x\right)\right]^2$$

и трансформируется к виду

$$\rho v_t = \left(q_0 \sin\varphi\right)_x, \quad \varphi_t = v_x \qquad (**)$$

где $\operatorname{tg}\varphi = B\left(\sigma + A\right)^{-1}$. Условие гиперболичности (**) : $\left|\varphi\right| < \pi/2$

Газодинамическая аналогия

Если в (**) $q_0 = \mathrm{const} > 0$, то система эквивалентна уравнениям изэнтропического движения газа с плоскими волнами в массовых лагранжевых координатах:

$$V_t = v_x, \quad v_t = -\left[p(V) \right]_x$$

где *V* – удельный объем, *p* – давление и

$$p = C - q_0 \sin V$$

($C > q_0$ - постоянная).

Дивергентная форма уравнений

- Здесь q играет роль энтропии, а φ - удельного
- объема

$$v_t = \rho^{-1}(q\sin\varphi)_x,\ \varphi_t = v_x - \sigma\tau^{-1}\sin\varphi,$$

$$q_t = \tau^{-1}(\sigma\cos\varphi - q)$$

Соответствующий «газ» не удовлетворяет аксиомам нормального газа

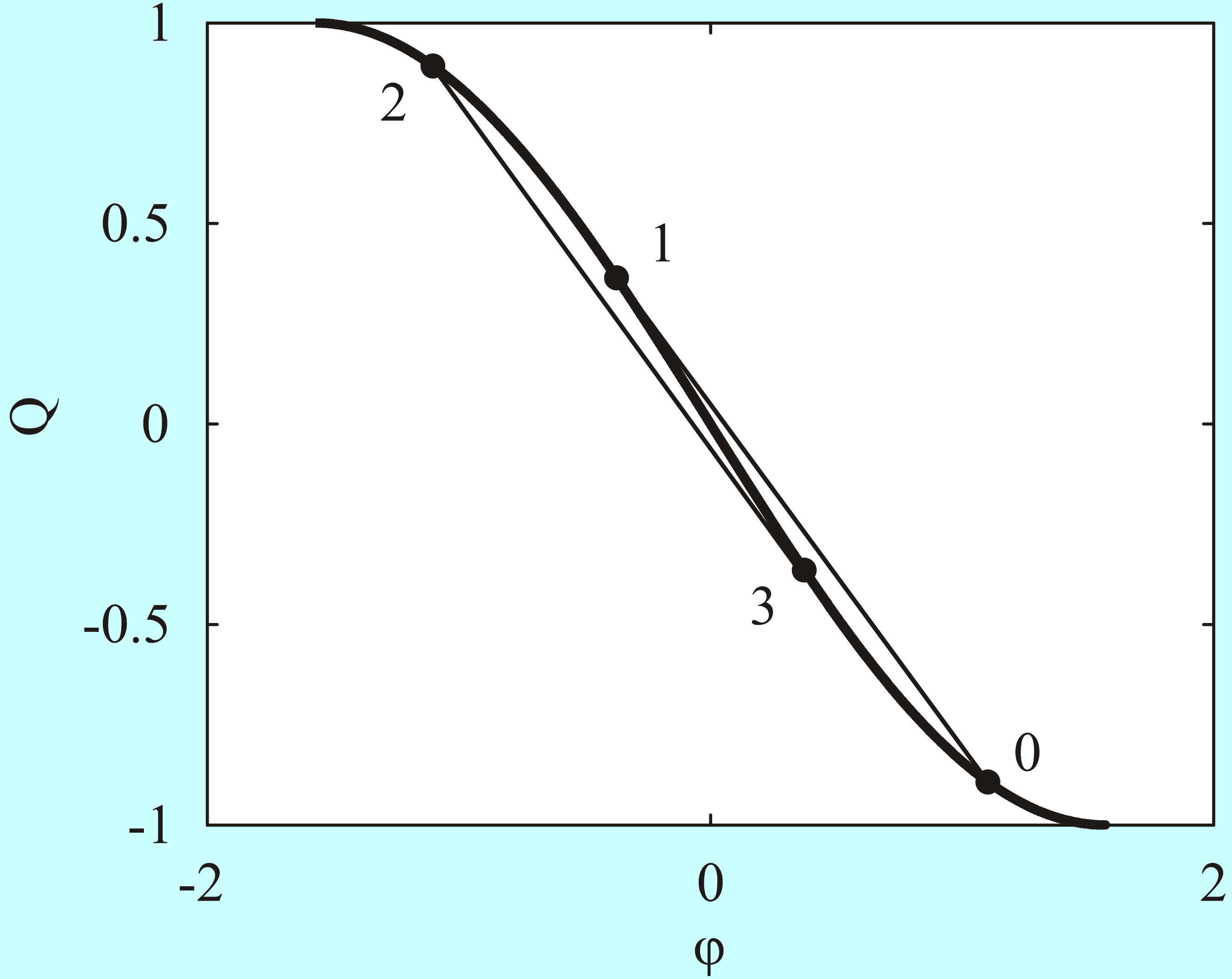
Разрывные решения системы (**)

Пусть $x = l(t)$ - линия сильного контактного разрыва и $dl/dt = N$ - скорость разрыва. Тогда

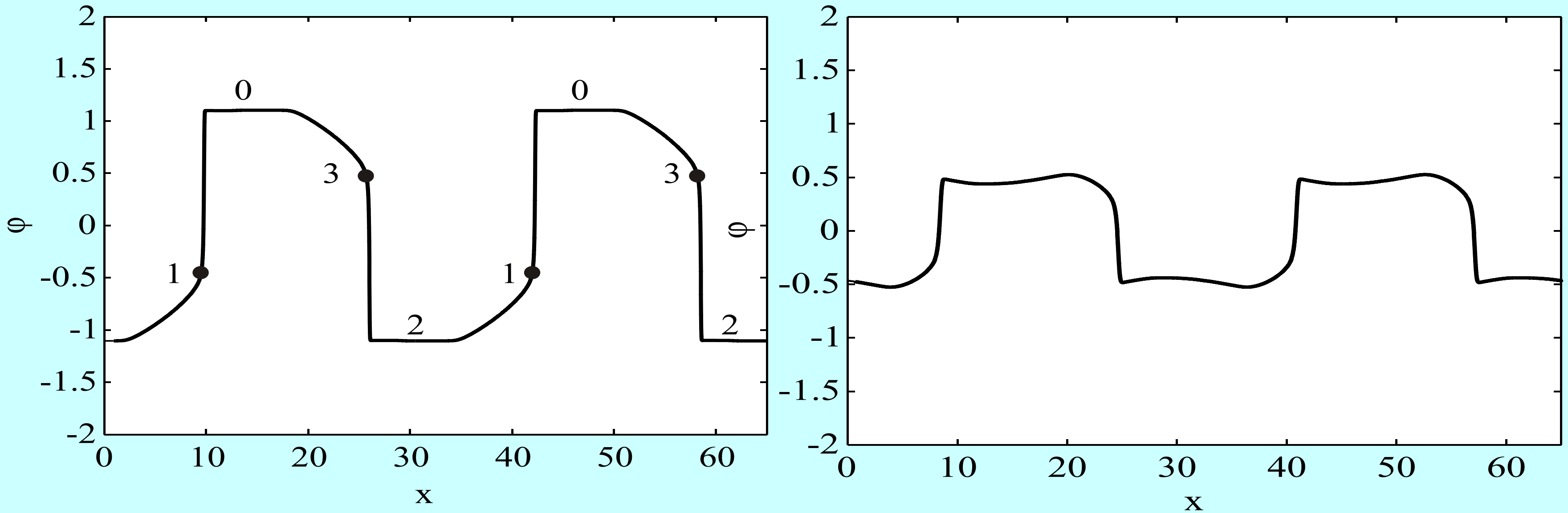
$$|N| = \left[\frac{q_0}{\rho} \cdot \frac{\sin\varphi^+ - \sin\varphi^-}{\varphi^+ - \varphi^-} \right]^{1/2}.$$

Касательное напряжение терпит разрыв, а нормальное непрерывно.

Ударные переходы на плоскости Q, φ



Периодические поперечные волны в жидкости Максвелла для изэнтропического (слева) и неизэнтропического (справа) течений



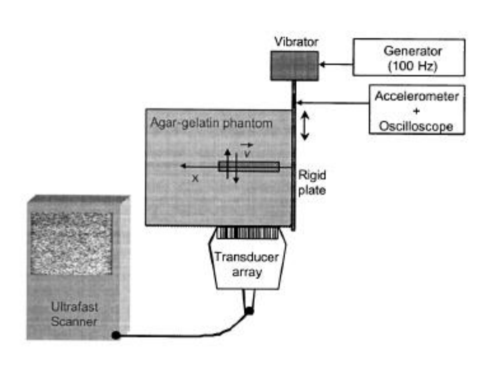
Гиперболическая подмодель вязкоупругой среды Максвелла

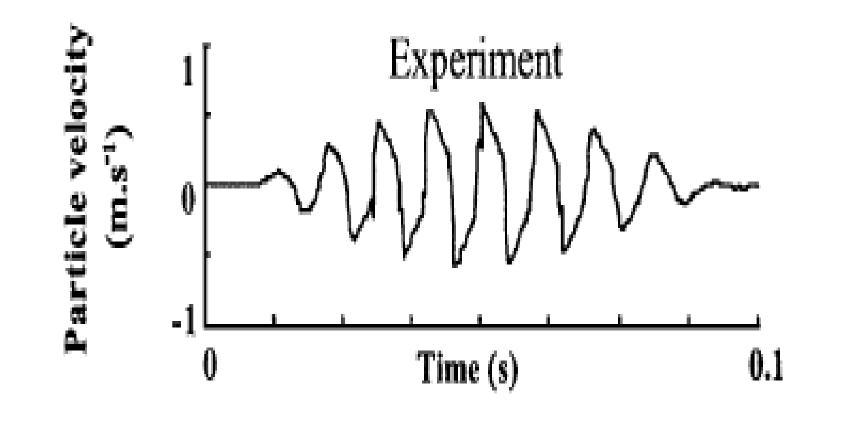
$$\varphi_t = v_x,\ v_t = \rho^{-1}(q\sin\varphi)_x,\ q_t = 0.$$

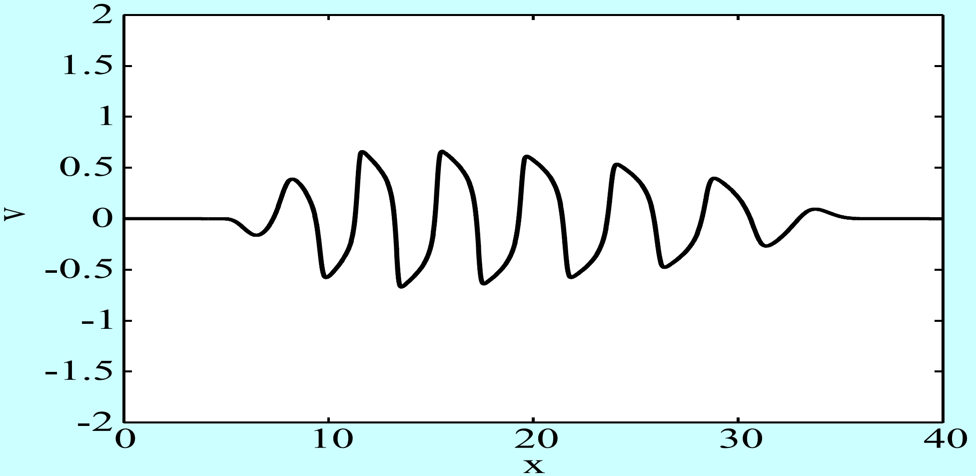
$$(\varphi, v)|_{t=0} = (\varphi_1, v_1), \quad x > 0,$$

$$v(t,0) = v_b(t), \qquad t > 0 \qquad (1)$$

$$v_b(t) = V(t)\sin\omega t, V(t) = V_0 \sin(\pi t / T)\mathrm{sgn}(T-t)$$







S. Catheline, J.-L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink
PH YSICA L R EV I EW L ET T ERS, V. 91, No. 16, 2003

Расчет нестационарной задачи (1)

Wave Motion

2011

Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium

V.Yu. Liapidevskii [a,b], V.V. Pukhnachev [a,b,*], A. Tani [c]

[a] Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Lavrentyev Prospect 15, Novosibirsk 630090, Russia
[b] Novosibirsk State University, Pirogova str. 2, Novosibirsk 630090, Russia
[c] Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

Жидкость Олдройда с малым временем ретардации

- Уравнения движения аналогичны уравнениям
- одномерного движения вязкого газа (ε- малый
- параметр, пропорциональный отношению времен ретардации и релаксации)

$$v_t + Q_x = \varepsilon v_{xx},\ \varphi_t - v_x = 0,$$

$$q_t = 0,\ Q = C - \rho^{-1} q \sin\varphi$$

Новый класс точных решений

Решение, инвариантное относительно оператора

$X = \partial_y + \Omega\,(t\,\partial_x + \partial_v),\ \Omega = const,$ имеет вид

$$u = \Omega y + f(\xi, t),\ v = g(\xi, t),\ p = p(\xi, t),\ A = a(\xi, t),\ B = b(\xi, t),$$

где $\xi = x - \Omega y t$ и

$$g_t = 2\rho^{-1}\Omega t(1+\Omega^2 t^2)^{-1} a_\xi + \rho^{-1}(1-\Omega^2 t^2)(1+\Omega^2 t^2)^{-1} b_\xi - 2\Omega^2 t(1+\Omega^2 t^2)^{-1} g,$$

$$a_t = [2\mu\tau^{-1}\Omega t - (1+\Omega^2 t^2) b] g_\xi - \tau^{-1} a + \Omega b, \qquad \text{(S)}$$

$$b_t = (\mu\tau^{-1} - a)\Omega + [\mu\tau^{-1}(1-\Omega^2 t^2) + (1+\Omega^2 t^2) a] g_\xi - \tau^{-1} b.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm\rho^{-1/2}[\mu\tau^{-1}(1+\Omega^2 t^2) + (1-\Omega^2 t^2) a - 2\Omega t\, b]^{1/2}.$$

Полиномиальные решения системы (S)

- Такие решения имеют вид

$$g = g^{(1)}\xi + g^{(0)},\ a = a^{(2)}\xi^2 + a^{(1)}\xi + a^{(0)},\ b = b^{(2)}\xi^2 + b^{(1)}\xi + b^{(0)},$$

где функции $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}, g^{(0)}, g^{(1)}$ удовлетворяют системе обыкновенных уравнений. Ее простейшее решение:

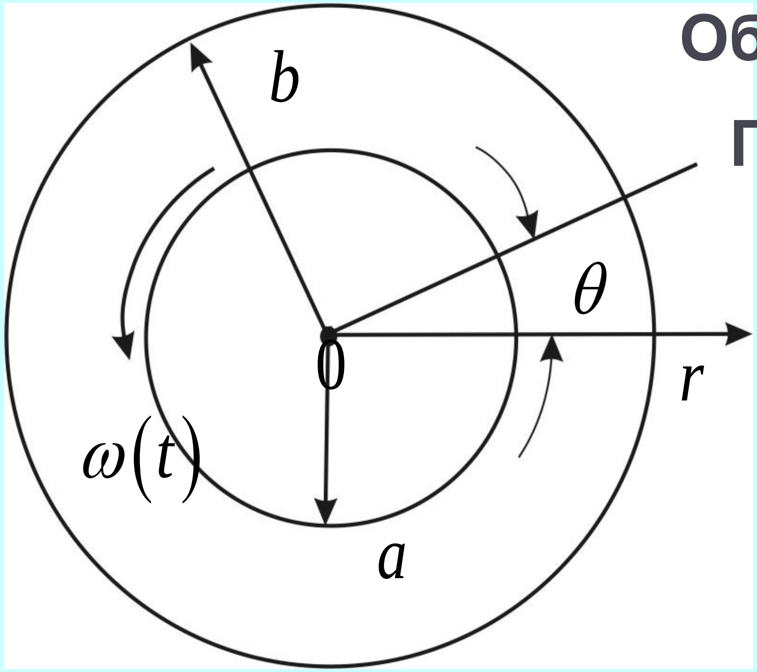
$$g = \frac{c_0}{1+\Omega^2 t^2},\ a = \frac{\omega^2 \mu}{\tau(\omega^2+1)} + c_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos\Omega t + c_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin\Omega t,$$

$$b = \frac{\omega\mu}{\tau(\omega^2+1)} + c_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos\Omega t - c_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin\Omega t.$$

Поле скоростей и напряжений (последние не зависят от координат):

$$u = \Omega y + \frac{c_0 \Omega t}{1+\Omega^2 t^2},\ v = \frac{c_0}{1+\Omega^2 t^2},\quad S_{11} = -S_{22} = a,\ S_{12} = S_{21} = b$$

Задача Куэтта для вязкоупругой среды Максвелла



Область течения: $a < r < b$

Поля скоростей и напряжений: $v_r = 0,\ v_\theta = v(r,t),$

$$S_{rr} = M(r,t),\ S_{r\theta} = N(r,t)$$

Начальные условия: $v(r,0) = v_0(r),$

$$M(r,0) = M_0(r),\ N(r,0) = N_0(r)$$

Краевые условия: $v = 0,\ r = b,\ t > 0\ ,$

$$I\frac{\partial v}{\partial t} = 2\pi a^3 N,\ r = a,\ t > 0.$$

(инерционное вращение внутреннего цилиндра)

Уравнения движения

$$\rho U_t - N_r - \frac{2N}{r} = 0 \qquad M_t + N(U_r - \frac{U}{r}) + \frac{M}{\tau} = 0 \qquad N_t - (M + \frac{\mu}{\tau})(U_r - \frac{U}{r}) + \frac{N}{\tau} = 0$$

Характеристики: $C^0: \ \lambda = 0, \qquad C^{\pm}: \ \lambda = \pm\left[\rho^{-1}\left(M + \mu\tau^{-1}\right)\right]^{1/2}$

Условие гиперболичности: $\tilde{M} = M + \mu\tau^{-1} > 0$

Стационарные решения: $U = \omega r; \ \omega = \omega_a, r = a; \ \omega = \omega_b, r = b;$

$$N = \pm\frac{\mu c^2}{2\tau r^2} \ (c = const < a), \ 2\tilde{M} = \mu\tau^{-1} \pm \sqrt{\mu^2\tau^{-2} - 4N^2}.$$

$$\omega_1(r) = \frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{r}{c}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^4 - 1} - \arcsin\left(\frac{c}{r}\right)^2\right] + \omega_0$$

$$(\omega_0 = \text{const})$$

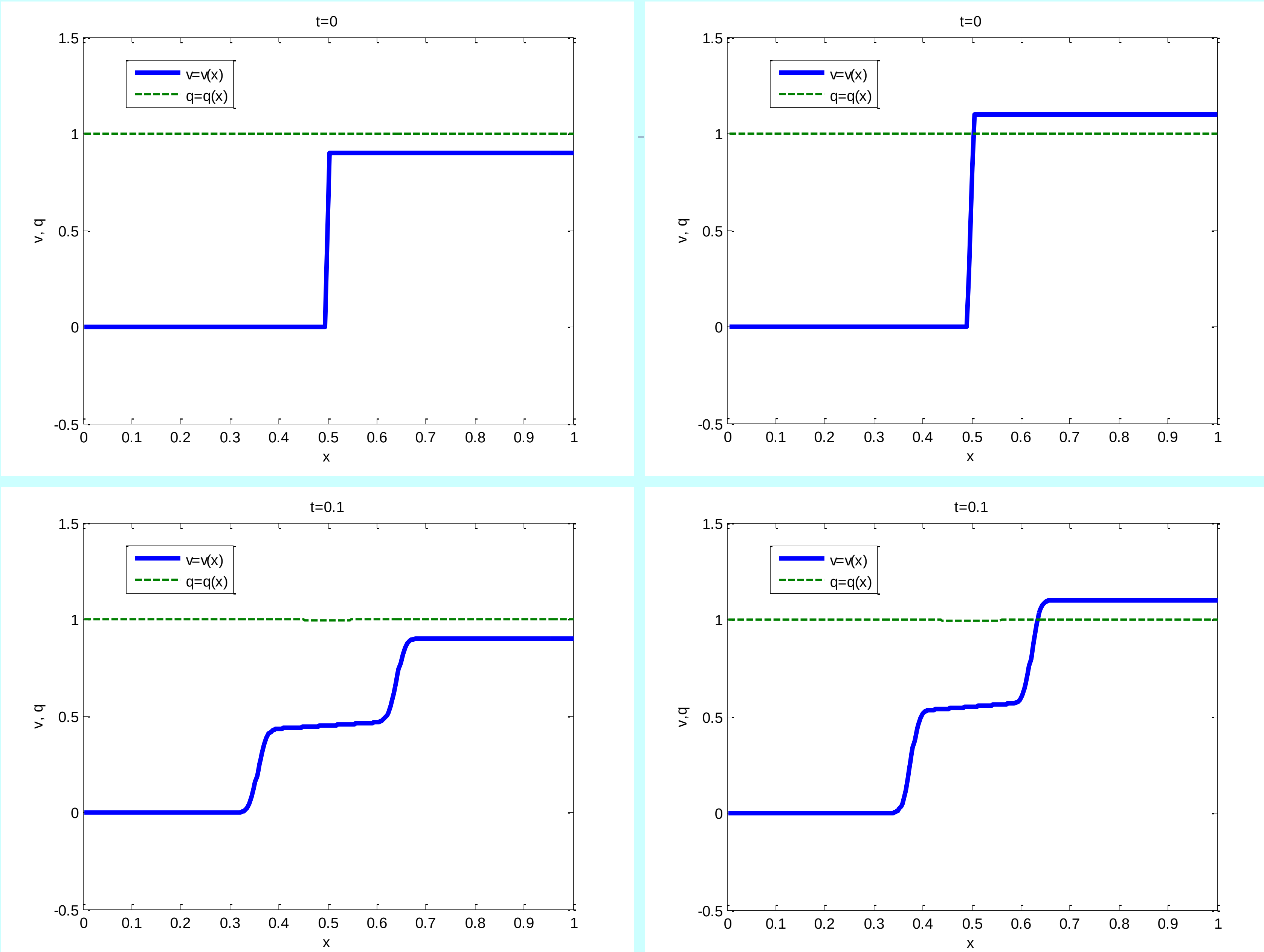
$$\omega_2(r) = \frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{r}{c}\right)^4 - 1} + \arcsin\left(\frac{c}{r}\right)^2\right] + \omega_0$$

Влияние выбора материальной производной на устойчивость плоского течения Куэтта

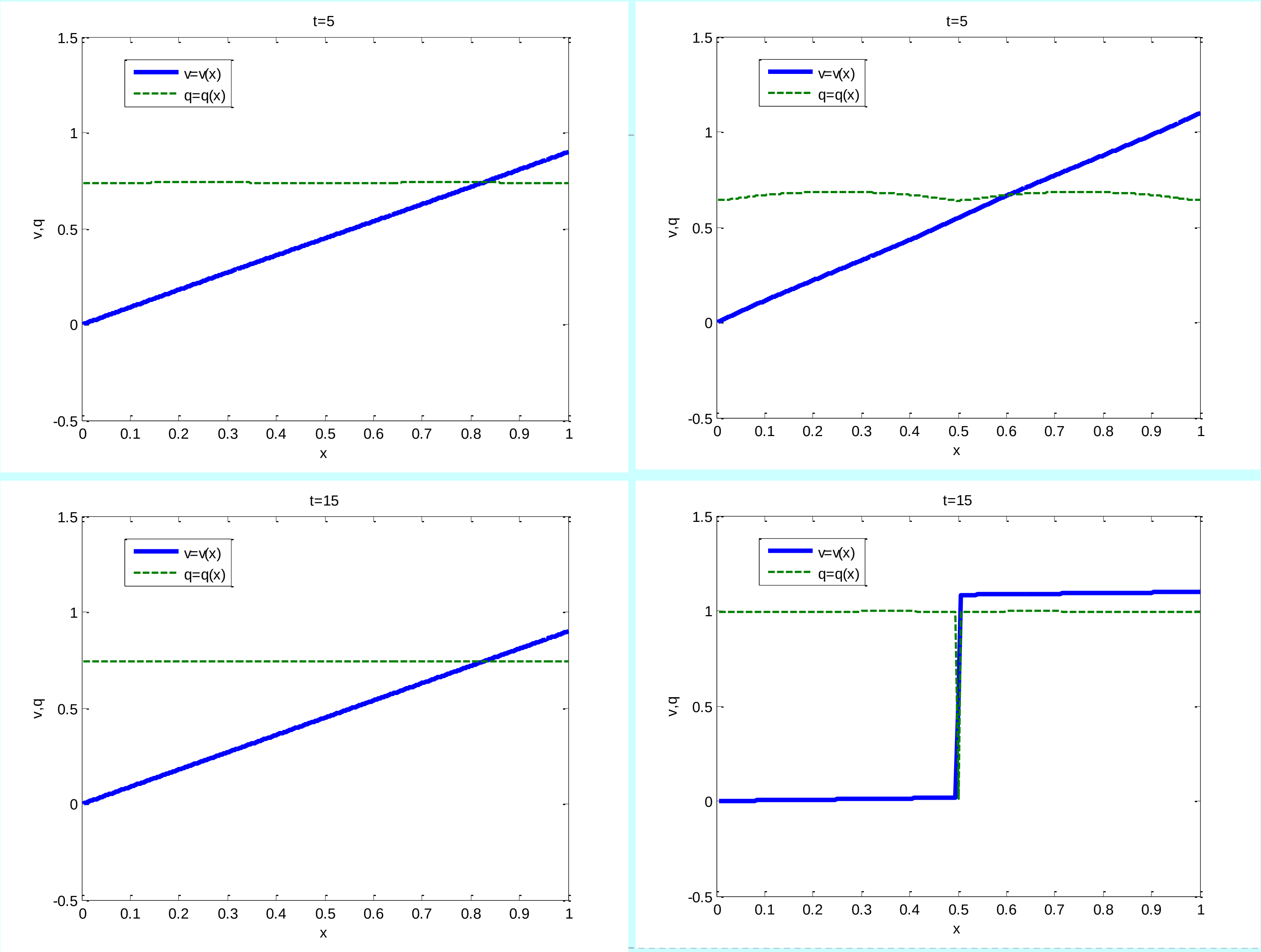
- Верхняя материальная производная: $\tau\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla S - \nabla\mathbf{v}\cdot S - S\cdot\nabla\mathbf{v}^T\right) + S = 2\mu D$
- Уравнения слоистого движения:

$$A_t + A = 0,\ \rho v_t = B_x,\ \tau(B_t - Av_x) + B = \mu v_x,\ \tau(C_t - 2Bv_x) + C = 0$$

- Течение Куэтта $v = \Omega\chi$ устойчиво в линейном приближении по отношению к одномерным возмущениям в моделях с верхней и нижней конвективными производными и неустойчиво в модели с вращательной производной Яуманна. Условие неустойчивости имеет вид $We > 1$, где $We = \Omega\tau$ - число Вейсенберга.

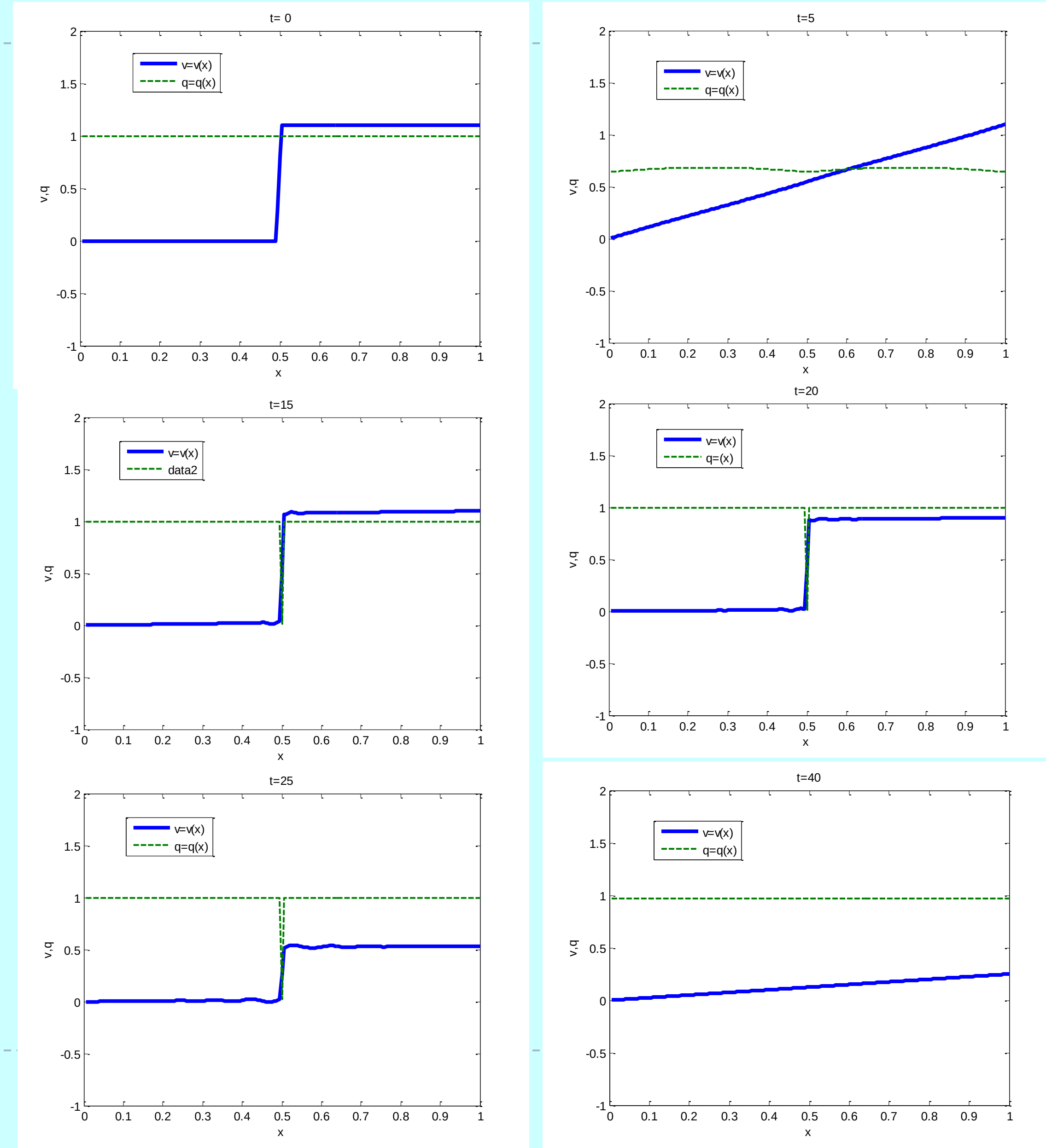


Плоское течение Куэтта: We= 0.9 (левый столбец), We=1.1 (правый столбец)



- Плоское течение Куэтта: We= 0.9 (левый столбец), We=1.1 (правый столбец)

Плоское течение Куэтта с переменной скоростью правой пластины (гистерезис в переходе к стационарному непрерывному течению)



Спасибо за внимание!