

# Распространение возмущений и развитие неустойчивости в тонком слое жидкости

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

[chesnokov@hydro.nsc.ru](mailto:chesnokov@hydro.nsc.ru)

Работа выполнена совместно с А. К. Хе, студентами НГУ Е. Ю. Князевой и П. В. Ковтуненко.

Международная конференция “Современные проблемы механики”,  
посвященная 80-летию академика А. Г. Куликовского  
18–19 марта 2013 г., МИАН, г. Москва

## Общая характеристика работы

На основе предложенной **В. М. Тешуковым** концепции гиперболических систем с операторными коэффициентами изучены свойства нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающих распространение длинных волн в идеальной и вязкой жидкости.

- Дан ответ на вопрос: “Возможно ли затухание Ландау в сдвиговом течении идеальной жидкости?”
- Изучены слабые разрывы решений уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости. Предложена многослойная модель пленочного течения.
- Показано соответствие условий гиперболичности уравнений теории длинных волн известным критериям устойчивости. Установлено, что учет дисперсии вносит стабилизирующий эффект в области резкого изменения скорости потока.

## Асимптотика малых возмущений сдвигового течения

Система уравнений (D. Benney, 1973)

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad h_t + \left( \int_0^h u \, dy \right)_x = 0, \quad v = - \int_0^y u_x \, dy$$

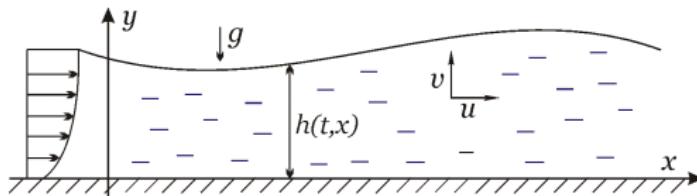
описывает распространение нелинейных длинноволновых возмущений в слое идеальной жидкости со свободной границей в поле силы тяжести.

Кинетическая формулировка (B. E. Захаров, 1980)

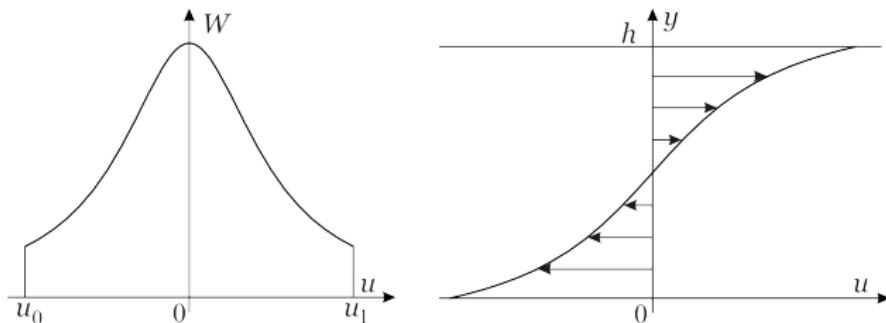
$$W_t + uW_x - gh_x W_u = 0, \quad h = \int_{u_0}^{u_1} W \, du,$$
$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + gh_x = 0, \quad u_{1t} + u_1 u_{1x} + gh_x = 0.$$

Здесь  $W(t, x, u) = 1/u_y \geq 0$  — аналог функции распределения,  $u_0 = u(t, x, 0)$ ,  $u_1 = u(t, x, h)$  — скорость на дне и свободной границе.

Плазменные волны затухают со временем (эффект затухания Ландау). Возникает вопрос, поставленный **А. Г. Куликовским**, о существовании такого эффекта для волн на сдвиговом потоке.



Аналогия: функция распределения  $\sim$  завихренность $^{-1}$



$$(u_c - u)W'(u) \geq 0 \iff (u(y) - u_c)u''(y) \geq 0$$

Рассмотрим малые возмущения заданного стационарного решения

$$W = \bar{W}(u) + \tilde{W}(t, x, u),$$

$$u_0 = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0(t, x), \quad u_1 = \bar{u}_1 + \tilde{u}_1(t, x).$$

Система для определения возмущений

$$\tilde{W}_t + u \tilde{W}_x - g \bar{W}_u \tilde{h}_x = 0,$$

$$\tilde{u}_{0t} + \bar{u}_0 \tilde{u}_{0x} + g \tilde{h}_x = 0, \quad \tilde{u}_{1t} + \bar{u}_1 \tilde{u}_{1x} + g \tilde{h}_x = 0,$$

$$\tilde{h}(t, x) = \bar{W}_1 \tilde{u}_1(t, x) - \bar{W}_0 \tilde{u}_0(t, x) + \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} \tilde{W}(t, x, u) du.$$

Подставим в линейные уравнения решения вида

$$\tilde{W} = F(t, u) e^{ikx}, \quad \tilde{h} = \Phi(t) e^{ikx},$$

$$\tilde{u}_0 = V_0(t) e^{ikx}, \quad \tilde{u}_1 = V_1(t) e^{ikx}.$$

В силу линейной системы уравнений амплитуды малых возмущений  $F$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  и  $\Phi$  в образах Лапласа выражаются по формулам

$$F_p(u) = \frac{F(0, u)}{p + iku} + \frac{ikg\bar{W}_u(u)}{p + iku}\Phi_p,$$

$$V_{0p} = \frac{V_{00}}{p + ik\bar{u}_0} - \frac{ikg}{p + ik\bar{u}_0}\Phi_p,$$

$$V_{1p} = \frac{V_{10}}{p + ik\bar{u}_1} - \frac{ikg}{p + ik\bar{u}_1}\Phi_p,$$

$$\Phi_p = \frac{\frac{\bar{W}_1 V_{10}}{p + ik\bar{u}_1} - \frac{\bar{W}_0 V_{00}}{p + ik\bar{u}_0} + \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} \frac{F(0, u) du}{p + iku}}{1 + ikg \left( \frac{\bar{W}_1}{p + ik\bar{u}_1} - \frac{\bar{W}_0}{p + ik\bar{u}_0} - \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} \frac{\bar{W}_u(u) du}{p + iku} \right)}.$$

Знаменатель в выражении для  $\Phi_p$  — характеристическая функция

$$\chi(c) = 1 - g \int_{u_0}^{u_1} \frac{W \, du}{(u - c)^2},$$

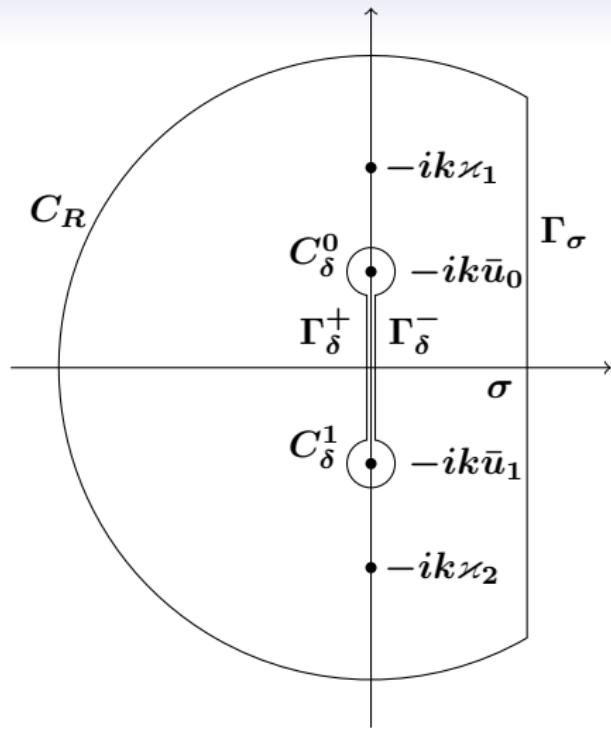
вычисленная на невозмущенном решении в точке  $c = ip/k$ :

$$\chi\left(\frac{ip}{k}\right) = 1 + g \left( \frac{\bar{W}_1}{\bar{u}_1 - ip/k} - \frac{\bar{W}_0}{\bar{u}_0 - ip/k} - \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} \frac{\bar{W}_u(u) \, du}{u - ip/k} \right).$$

При выполнении на основном решении условий гиперболичности  
B. M. Тешукова

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \quad \chi^\pm(u) \neq 0$$

(приращение аргумента вычисляется при изменении  $u$  от  $u_0$  до  $u_1$  при фиксированных значениях  $t, x$ ) уравнение  $\chi(z) = 0$  имеет два вещественных корня на комплексной плоскости:  $\kappa_1 < \bar{u}_0$  и  $\kappa_2 > \bar{u}_1$ . Функция  $\Phi_p$  имеет два простых полюса  $p_1 = -ik\kappa_1$  и  $p_2 = -ik\kappa_2$ .



Контур интегрирования на плоскости  $p \in \mathbb{C}$ .

Функция  $\Phi(t)$  восстанавливается с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_p e^{pt} dp, \quad \sigma > 0.$$

Применение теоремы о вычетах и леммы Жордана дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_p e^{pt} dp = \underset{p=-ik\kappa_1}{\text{Res}} \Phi_p e^{pt} + \underset{p=-ik\kappa_2}{\text{Res}} \Phi_p e^{pt} = \Phi(t) + J(t),$$

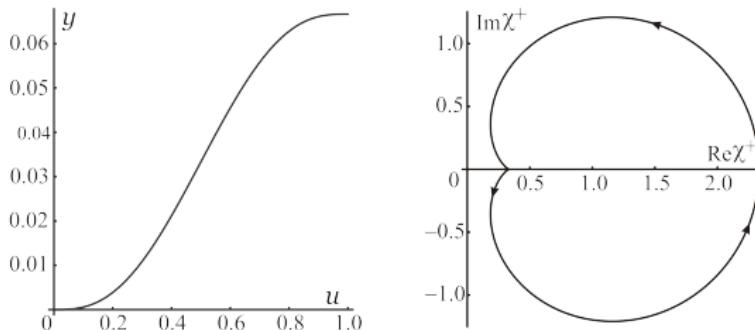
где

$$J(t) = -\frac{k}{2\pi} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} (\Phi_p^+ - \Phi_p^-) e^{-ikqt} dq \quad (p = -ikq),$$

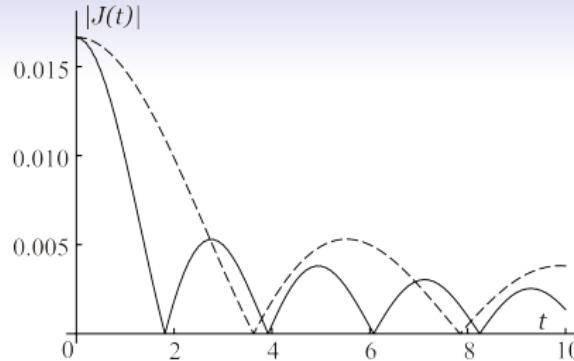
$\Phi_p^+$  и  $\Phi_p^-$  — граничные значения функции  $\Phi_p$  на отрезках  $\Gamma_\delta^+$  и  $\Gamma_\delta^-$ . В силу ограниченности функций  $\Phi_p^+(p)$  и  $\Phi_p^-(p)$  на отрезке  $[-ik\bar{u}_1, -ik\bar{u}_0]$  по лемме Римана — Лебега функция  $J(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**Вывод:** малые возмущения течения стремятся к периодическому решению, если на основном сдвиговом потоке уравнения движения являются обобщенно гиперболическими.

**Класс течений, рассеивающий малые возмущения.** Если решение имеет особенности ( $u_y \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow 0$  или  $y \rightarrow h$ ), то характеристические корни  $c = \chi_i$  могут исчезнуть. Это значит, что волновые возмущения движутся вместе с потоком, не обгоняя его.



Для таких профилей скорости малые возмущения (взятые из того же класса течений) затухают со временем:  $\Phi(t) = -J(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Аналогия: линейные волны в пузырьковой жидкости с непрерывным распределением пузырьков по размерам (S. L. Gavrilyuk, 1994).

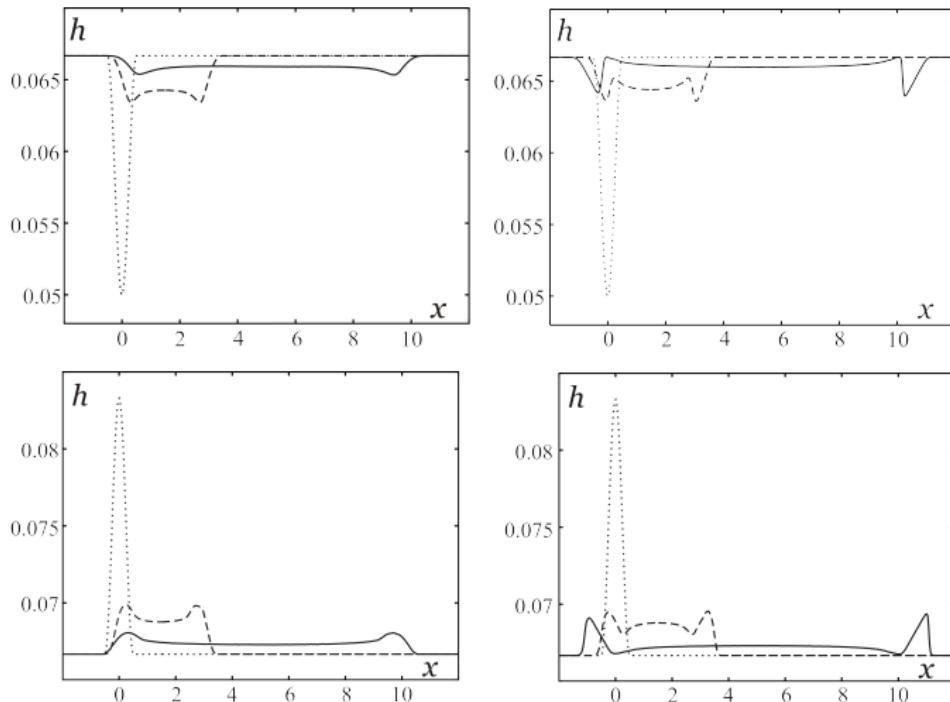


Затухание амплитуды начального возмущения для волнового числа  $k = 3$  (сплошная линия),  $k = 3/2$  (пунктир). Короткие волны затухают быстрее.

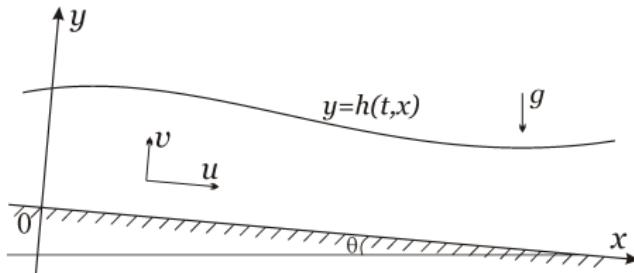
**Численное моделирование** распространения волновых возмущений в сдвиговом потоке жидкости выполнено на основе “многослойной” аппроксимации нелинейных уравнений вихревой мелкой воды ([V. Teshukov, G. Russo, A. Chesnokov \(2004\)](#)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} h_i) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\omega_i h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} \omega_i h_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^M \left( u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12} \right) + \frac{g}{2} \left( \sum_{i=1}^M h_i \right)^2 \right) &= 0 \quad (i = 1, \dots, M). \end{aligned}$$

Свободная граница при  $t = 0$  — точки,  $t = 3$  — пунктир,  $t = 10$  — сплошная линия. Графики получены для возмущения типа “яма” и “горка”; слева — для рассеивающего профиля, справа — для его линейной аппроксимации.



## Течение тонкого слоя вязкой жидкости



Предполагается выполнение условий:

$$\varepsilon = \frac{H_0}{L_0} \ll 1, \quad \varepsilon^2 < \text{Re}^{-1} = \frac{\nu_0}{U_0 H_0} < \varepsilon, \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{g_0 H_0} \simeq 1.$$

- Выяснить, возможно ли нелинейное опрокидывание волн в процессе эволюции течения вязкой жидкости;
- Построить многослойную модель, описывающую течение жидкости с профилем скорости, отличным от параболического закона.

Уравнения движения в безразмерных переменных:

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = \frac{\varepsilon}{\text{Re}} u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} u_{yy} + \frac{\sin \theta}{\varepsilon \text{Fr}},$$

$$\varepsilon^2 (v_t + uv_x + vv_y) + p_y = \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} v_{xx} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} v_{yy} - \frac{\cos \theta}{\text{Fr}},$$

$$u_x + v_y = 0; \quad u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad h_t + uh_x - v|_{y=h} = 0,$$

$$(p - p_0)h_x - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} u_x h_x + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} u_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} v_x \Big|_{y=h} = 0,$$

$$p - p_0 - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} v_y + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} (u_y + \varepsilon^2 v_x) h_x \Big|_{y=h} = 0.$$

В результате моделирования  $\varepsilon \rightarrow 0$  и перехода к полулагранжевым координатам  $(x, \lambda)$  с помощь замены  $y = \Phi(t, x, \lambda)$ ,  $H = \Phi_\lambda$

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda h_0(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

получаем интегродифференциальную систему уравнений движения тонкого слоя вязкой жидкости:

$$u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x \, d\lambda = a + \frac{\nu}{H} \left( \frac{u_\lambda}{H} \right)_\lambda, \\ H_t + (uH)_x = 0, \quad u|_{\lambda=0} = 0, \quad u_\lambda|_{\lambda=1} = 0.$$

Здесь  $a = \varepsilon^{-1} \text{Fr}^{-1} \sin \theta$ ,  $g = \text{Fr}^{-1} \cos \theta$ ,  $\nu = \varepsilon^{-1} \text{Re}^{-1}$ .

Представим эту систему в виде

$$\mathbf{U}_t + A \langle \mathbf{U}_x \rangle = \mathbf{f}$$

( $A$  — оператор (действует по  $\lambda$ ),  $\mathbf{U}$  — искомый вектор,  $\mathbf{f}$  — правая часть). Используются подход из работы И. И. Липатов, В. М. Тешуков (2004).

1. Слабый разрыв возможен только на обобщенной характеристике. Линия слабого разрыва  $\Gamma$  задана уравнением  $x' = k(t, x)$ . Тогда

$$[\mathbf{U}_t] + A \langle [\mathbf{U}_x] \rangle = 0, \quad [\mathbf{U}_t + k \mathbf{U}_x] = 0 \Rightarrow (A - kI)[\mathbf{U}_x] = 0.$$

Действуя собственными функционалами  $\mathbf{F}^\alpha$ , имеем

$$(k^\alpha - k)(\mathbf{F}^\alpha, [\mathbf{U}_x]) \Rightarrow k = k^\alpha.$$

2. Амплитуда слабого разрыва пропорциональна собственной функции оператора  $A$

$$[\mathbf{U}_x] = \xi(t, x) \left( \frac{1}{u - k}, -\frac{H}{(u - k)^2} \right)^T$$

(здесь и далее полагаем, что  $k = k^2 > \max u$ ).

3. Уравнение для амплитуды разрыва вдоль характеристики.

Дифференцирование по  $x$  соотношения на характеристике

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}, \mathbf{f})$$

и вычисление разности предельных значений на  $\Gamma$  дает уравнение для амплитуды  $\xi = g[h_x]$ :

$$\frac{d\xi}{dt} + C_1 \xi^2 = C_2 \xi \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + k(t, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad C_1 < 0 \right) \quad \Rightarrow$$

Если  $\xi_0 = \xi|_{t=0} > 0$ , то возможен неограниченный рост  $\xi$ . Момент наступления градиентной катастрофы  $t_*$  определяется из уравнения

$$1 + \xi_0 \int_0^{t_*} C_1 \exp \left( \int_0^\tau C_2 d\tau' \right) d\tau = 0.$$

**Многослойная аппроксимация.** Консервативная форма уравнений:

$$H_t + (uH)_x = 0, \quad (\omega H)_t + (u\omega H)_x = \nu \left( \frac{\omega_\lambda}{H} \right)_\lambda, \quad \left( u = \int_0^\lambda \omega H \, d\lambda \right)$$

$$q_t + \left( \int_0^1 u^2 H \, d\lambda + \frac{gh^2}{2} \right)_x = ah - \nu \omega|_{\lambda=0}, \quad \omega|_{\lambda=1} = 0.$$

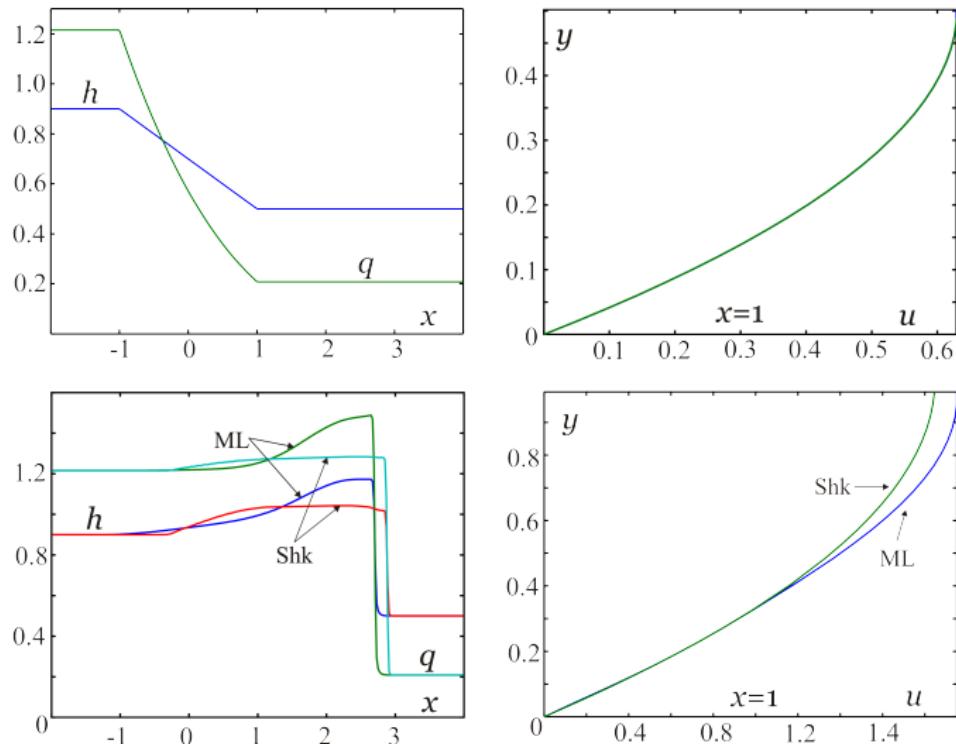
Здесь  $\omega = u_\lambda / H$ ,  $q = \int_0^1 uH \, d\lambda$ . Интегрирование по  $\lambda$  от  $\lambda_{i-1}$  до  $\lambda_i$  и вычисление интегралов в предположении кусочно-линейного профиля скорости приводит к замкнутой системе  $2M - 1$  уравнений

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} h_i) = 0, \quad (\omega_1 = f(u), \quad \omega_M = 0)$$

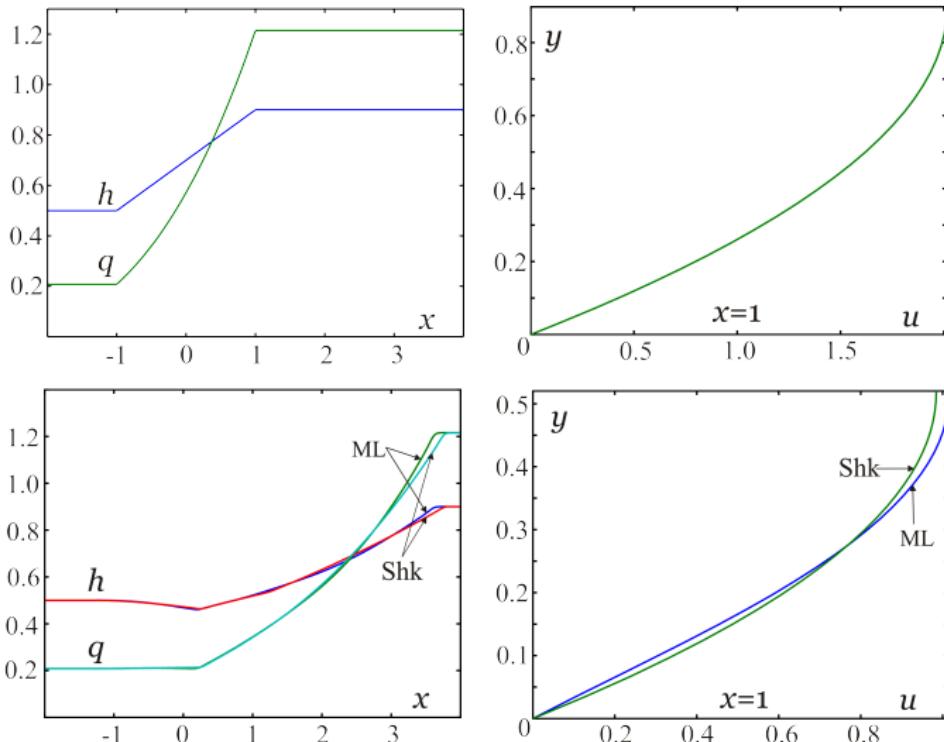
$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega_i h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} \omega_i h_i) = \nu \left( \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^M \left( u_{ci}^2 h_i + \frac{\omega_i^2 h_i^3}{12} \right) + \frac{g}{2} \left( \sum_{i=1}^M h_i \right)^2 \right) = -\nu \omega_1 + a \sum_{i=1}^M h_i.$$

Сравнение расчетов по бездисперсионной модели Шкадова и по уравнениям многослойной аппроксимации (показаны: глубина  $h(t, x)$ , расход  $q(t, x)$  и профиль скорости  $y(t, x, u)$  при  $t = 0$  и  $t = 1.5$ ).



Сравнение расчетов по бездисперсионной модели Шкадова и по уравнениям многослойной аппроксимации (показаны: глубина  $h(t, x)$ , расход  $q(t, x)$  и профиль скорости  $y(t, x, u)$  при  $t = 0$  и  $t = 1$ ).



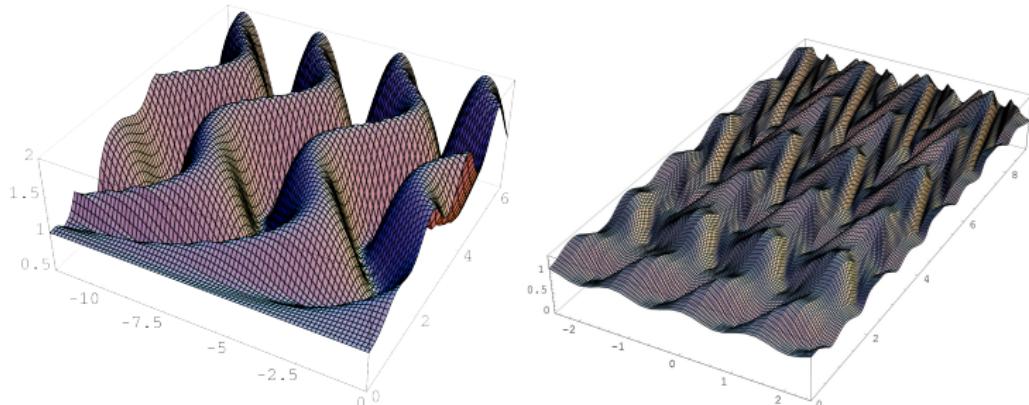
## Модели горизонтально-сдвигового течения жидкости

Уравнения горизонтально-сдвигового течения тонкого слоя жидкости с учетом дисперсии (S. L. Gavrilyuk, V. M. Teshukov (2004, 2006))

$$u_t + uu_x + vu_y + h^{-1}p_x = 0, \quad p_y = 0,$$

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0, \quad uY'_i(x) - v|_{y=Y_i} = 0,$$

$$p = \frac{gh^2}{2} + \frac{h^2}{3} \frac{d^2h}{dt^2} \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)$$



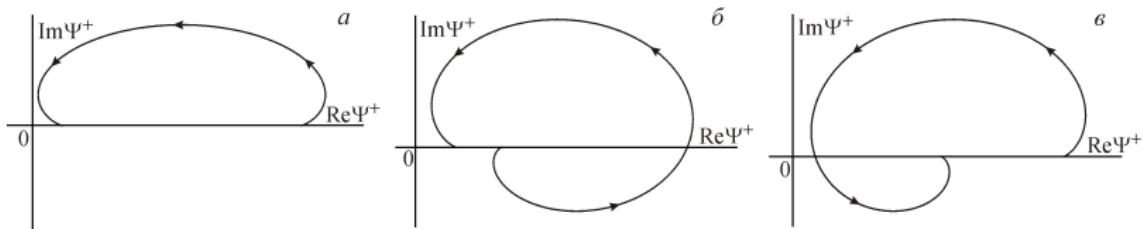
## Водяной принтер



Device uses waves to “print” on water surface

Researchers at Akishima Laboratories (Mitsui Zosen), working in conjunction with professor Shigeru Naito of Osaka University, have developed a device that uses waves to draw text and pictures on the surface of water.

Уравнения горизонтально-сдвигового течения **без учета дисперсии** математически эквивалентны уравнениям вихревой мелкой воды (Ляпидевский, Чесноков (2009)). Условия обобщенной гиперболичности уравнений сдвигового течения **под крышкой** соответствуют классическими критериями устойчивости (Князева, Чесноков (2012)).



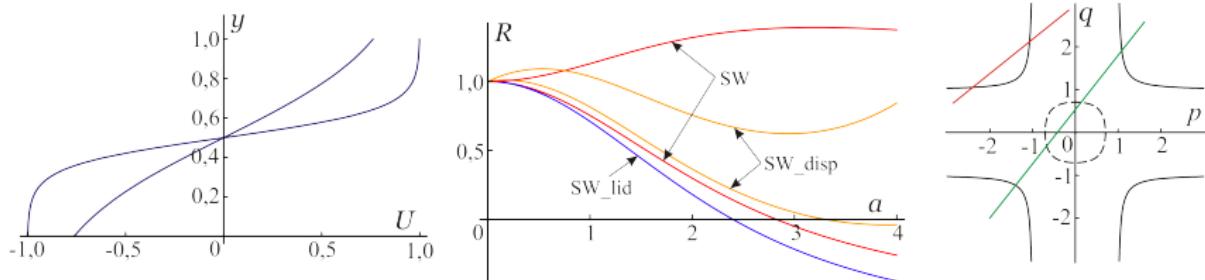
Характерный график функции  $\Psi^+(u) = (u_1 - u)(u_0 - u)\chi^+(u)$ :  
 $a$  — выполняется критерий Релея,  $b$  — критерий Фьёртофта,  $c$  — критерий Розенблюта — Симона.

Рассмотрим семейство решений уравнений сдвигового течения

$$U(y) = b \operatorname{th} \frac{(2y - h)a}{2h}$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные положительные постоянные.

Увеличение параметра  $a$  для задачи под крышкой всегда приводит к неустойчивости и потере свойства гиперболичности.



Для модели со свободной границей при  $b^2 < h$  результат аналогичен ( $g = 1$ ). Изменение знака функции  $R(a, b) = \Psi^+(U_s)$  соответствует появлению комплексных характеристических корней:

$$R_{lid} = \frac{h}{a} \left( 2 - a \operatorname{th} \frac{a}{2} \right) \operatorname{th} \frac{a}{2} > 0, \quad R_{SW} = \frac{1}{a} \left( 2h + a(b^2 - h) \operatorname{th} \frac{a}{2} \right) \operatorname{th} \frac{a}{2}.$$

В случае  $b^2 > h$  уравнения движения гиперболические при всех  $a$ .

Модель двухслойной мелкой воды (Л. В. Овсянников, 1979)

гиперболическая, если прямая и кривая имеют 4 точки пересечения.

Линейный анализ устойчивости для дисперсионной модели:  
дисперсия вносит стабилизирующий эффект.

## Заключение

- Дан ответ на вопрос: Возможно ли затухание Ландау в сдвиговом течении идеальной жидкости?
- Изучены слабые разрывы решений уравнений, описывающих распространение длинных волн в слое вязкой жидкости.
- Предложена модель толстых пленок, учитывающая отклонение профиля скорости от параболического закона.
- Показано соответствие условий гиперболичности уравнений теории длинных волн известным критериям устойчивости. Установлено, что учет дисперсии вносит стабилизирующий эффект.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ