Прогноз погоды и атмосферные фронты. Нижний Новгород. Декабрь 2012.

Ф.Л.Быков, В.А.Гордин. Гидрометцентр РФ, Высшая школа экономики. Москва

Измерение температуры началось, видимо, с Г.Галилея (1564-1642). Он изобрел термоскоп в 1592г. Впрочем, измерения количества осадков производилось еще в Храме в Иерушалаиме. По количеству осадков весной делался прогноз урожая летом. После термоскопа появился барометр. Р.Гук (1635-1703) измерял скорость и направление ветра. И.Ньютон (1643-1727) предложил простейшие модели для описания стационарного течения жидкости в трубе. Система квазилинейных уравнений в частных производных, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости в объеме $\vec{x} \in V$ была предложена Л.М.А.Навье (1785-1836) и Дж.Г.Стоксом (1819-1903):

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = \nu\Delta\vec{u},$$

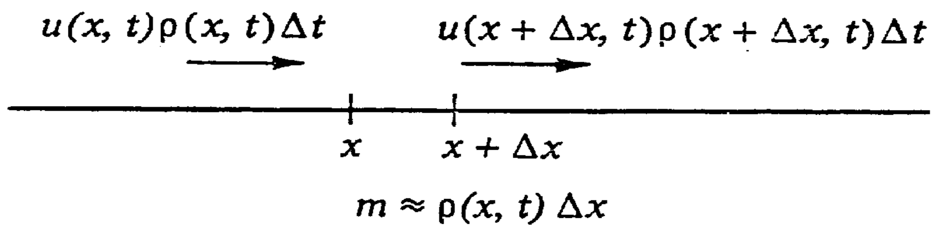
$$div\vec{u} = 0.$$

$\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{x})$ - скорость, p – давление, ρ - плотность, ν - молекулярная вязкость.

Первые уравнения – следствие закона сохранения вещества и второго закона Ньютона. Последнее уравнение – следствие закона сохранения вещества и несжимаемости (ρ=const). :Жидкость называется идеальной, если ν=0. Для идеальной жидкости уравнения написаны Л.Эйлером (1707-1783) в 1757г.

Уравнение неразрывности

Сплошная среда (одномерная) с плотностью $\rho(x,t)$ движется с известной скоростью *u(x,t)*. Что происходит на отрезке $[x, x+\Delta x]$ за время $[t, t+\Delta t]$?



За это время изменение массы на отрезке примерно равно $\partial_t \rho(x,t)\Delta x \Delta t$

Выток примерно равен $u(x+\Delta x,t)\rho(x+\Delta x,t)\Delta t$ вток: $u(x,t)\rho(x,t)\Delta t$

Поделим на $\Delta x \Delta t$ и перейдем к пределам $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$. Результат:

Уравнение неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$; с источником: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + f(x,t)$

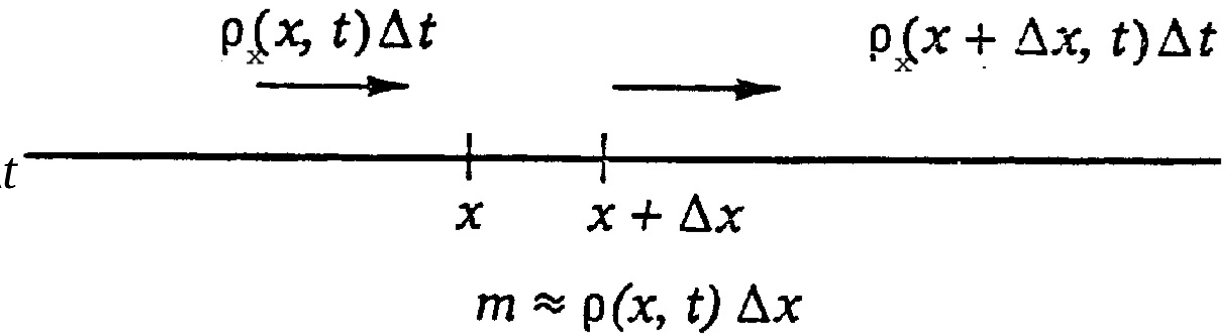
Вариант 3-D (трехмерный ветер <u,v,w>):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Уравнение диффузии (теплопроводности)

Пусть поток через границу пропорционален градиенту плотности (закон Фика)

За время Δt изменение массы на отрезке Δx примерно равно $\partial_t \rho(x,t)\Delta x \Delta t$



Вытбок примерно равен

$D\partial_x \rho(x+\Delta x, t)\Delta t$

вток: $D\partial_x \rho(x,t)\Delta t$ D – коэффициент диффузии. Изменение массы на отрезке равно разности вытока и втока: $\partial_t \rho = \partial_x [D\partial_x \rho]$.

В многомерном случае (параллелепипед вместо отрезка):

$$\partial_t \rho = \partial_x [D\partial_x \rho] + \partial_y [D\partial_y \rho] + \partial_z [D\partial_z \rho] \equiv div\left[D grad\, \rho\right].$$

Если коэффициент диффузии постоянен, его можно вынести из-под знака диверг.

$\partial_t \rho = \Delta \rho.$ Здесь Дельта – оператор Лапласа, а не приращение.

В атмосфере присутствует и перенос, и диффузия. Поэтому используется уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = D \cdot \Delta \rho$$

Уравнение диффузии (теплопроводности)-2

Поток тепла через границу пропорционален градиенту температуры (закон Фурье) D – коэффициент температуропроводности. При наличии источника тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \Delta T + Q(\vec{x}). \qquad (1)$$

Если процесс происходит не во всем пространстве, а в ограниченной области V, на границе нужно поставить граничные (краевые) условия. Например, если на границе нулевая температура – условие Дирихле: $\forall t\ T(t,\vec{x})|_{\vec{x}\in\partial V} = 0.$
Если поток тепла через границу отсутствует (теплоизоляция), то – условие Неймана $\forall t\ \partial_{\vec{n}} T(t,\vec{x})|_{\vec{x}\in\partial V} = 0$, где оператор $\partial_{\vec{n}}$ - производная по направлению нормали к границе области V.
Уравнение (1) в частных производных можно рассматривать как обыкновенное линейное неоднородное уравнение первого порядка, но фазовое пространство составляют функции от $\vec{x} \in V$, удовлетворяющие граничному условию.

Если оператор $A = D\Delta$ имеет спектр с отрицательной вещественной частью, то при $t \to +\infty$ решение стремится к решению стационарного уравнения

$$D \cdot \Delta T = -Q(\vec{x}).$$

Перенос с постоянной скоростью

Перенос субстанции со скоростью *c*=const описывается уравнением в частных производных первого порядка и по времени, и по пространству: $\partial_t \rho + c\partial_x \rho = 0; \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+.$ (1)

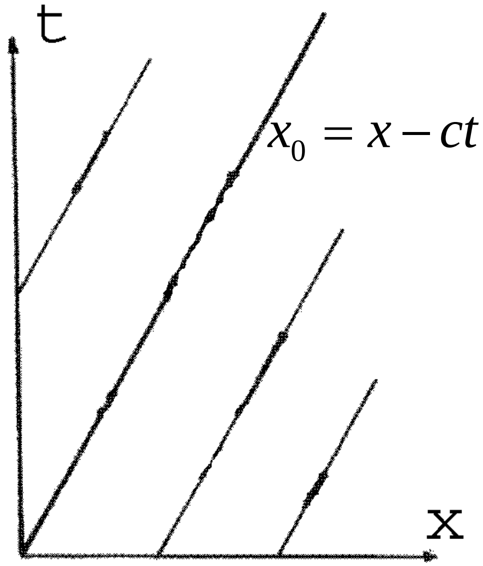
Общее решение (1) можно угадать: $\rho = f(x - ct), \;\; f -$произвольная функция.

Или можно переписать (1) в виде $d_t \rho = A\rho, \;\; A = -c\partial_x. \;\; \rho(t,x) = e^{At}\rho_0(x).$

Или преобраз. Фурье. Можно сделать замену переменных: *u=x+ct, v=x-ct*.

Тогда (1) переписывается в виде $\partial_u \rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho(v).$

Показаны характеристики - линии постоянства функции ρ



Вопросы:

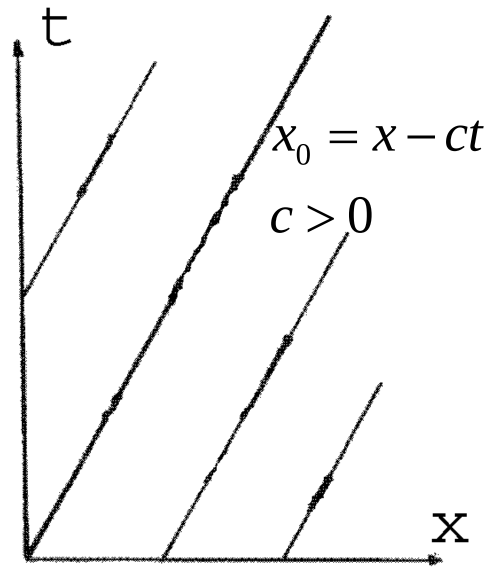
1. Что будет, если начальные данные не при *t=0*?
2. Если начальная функция задана рядом Тейлора?
3. Если область по *x* ограничена (краевые условия)?
4. Если число с – комплексное ?
5. Если с – функция *t, x,* ρ ?
6. Если ненулевая правая часть ? 7. Если $\vec{x}$?
8. Если одна или обе производные не первого порядка ?
9. Система уравнений. 10. Как нарастают ошибки в исходных данных?

Перенос с постоянной скоростью-2

1. Что будет, если начальные данные не при *t=0*?

Задача Коши может быть поставлена не только при t=const, но и на других кривых. Задача будет иметь решение (и притом, единственное), если и только если для каждого *v* будет задано значение ρ. Кривая должна пересекать каждую характеристику по одному разу. $\partial_u \rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho(v).$

В частности, если данные заданы на границе квадранта x>0, t>0 при c>0, условие выполнено.



Будет ли решение в этом случае непрерывно ?

<u>Задано</u>: $\rho_0(x),\ \rho_1(t).$ <u>Нужно</u>: $\rho_0(0) = \rho_1(0).$

Будет ли решение в этом случае дифференцируемо?

$$\partial_t \rho(0,0) = \rho'_1(0);\ \partial_x \rho(0,0) = \rho'_0(0) \Rightarrow \rho'_1(0) + c\rho'_0(0) = 0.$$

Аналогично получаются условия 2-гладкости и т. д.

Если квадрант x<0, t>0, то граничное условие $\rho_1(t)$ задавать не нужно, только $\rho_0(x),\ x < 0.$

При c<0 ситуация обратная. <u>Вывод</u>: количество граничных условий может зависеть от коэффициентов уравнения, а не только от его типа.

Многомерное уравнение в частных производных 1-го порядка

Для уравнения с большим числом пространственных переменных

$$\alpha(x,y,z)\partial_x\rho+\beta(x,y,z)\partial_y\rho+\gamma(x,y,z)\partial_z\rho=\delta;\ \ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R},\ \ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0\ \ (1)$$

получаем систему уравнений для характеристик:

$$d_t x=\alpha(x,y,z),\ \ d_t y=\beta(x,y,z)\ \ d_t z=\gamma(x,y,z)\ \ (2)$$

и уравнение для изменения ρ вдоль произвольной характеристики

$$d_t\rho=\delta(x(t),y(t),z(t)).\ \ (3)$$

Если одно из переменных – время, т. е.

$$\partial_t\rho+\alpha(t,x,y)\partial_x\rho+\beta(t,x,y)\partial_y\rho=\delta;\ \ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ \ (1a)$$

то уравнения для характеристик $d_t x=\alpha(t,x,y),\ \ d_t y=\beta(t,x,y)\ \ (2a)$

Полулинейное уравнение в частных производных 1-го порядка

Возможна ситуация, когда время явно не выделено:

$$\alpha(x,y)\partial_x\rho+\beta(x,y)\partial_y\rho=\gamma(x,y,\rho);\quad x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2>0.\ (1)$$

Уравнение (1) линейно <-> правая часть уравнения γ линейна по ρ

В общем случае такое уравнение называется полулинейным.

Будем искать кривую <*x(t),y(t)*> вдоль которой решение меняется «просто»

Всегда $$d_t\rho=\partial_x\rho d_t x+\partial_y\rho d_t y$$

Следовательно, если мы положим $d_t x=\alpha(x,y),\ d_t y=\beta(x,y)\ (2)$ то вдоль кривой получим обыкновенное (!) уравнение для $\rho:\ d_t\rho=\gamma(x(t),y(t),\rho).\ (3)$

Траектории системы (2) называются характеристиками урчп (1).

На каждой характеристике неизвестную функцию ρ нужно задать один раз.

Если мы задаем начальные данные для урчп (1) на какой-то кривой *S*, то важно, чтобы характеристики (2) ее не касались, а только пересекали.

Тогда в окрестности кривой *S* решение (1) будет определено однозначно.

Если вместо (1) уравнение в пространстве $\mathbb{R}^n,\ n>2,$ то начальные данные задаем на поверхности *S*, **dim** *S*=*n-1*. Поверхность S «хорошая» - нехарактеристическая, если векторное поле правых частей (2) нигде не касается *S.* Решения (2) и (3) существуют только в малом по *t* - нелинейны

Вернемся к уравнению $\partial_\tau \rho + c\partial_x \rho = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}_+$. (1)

Здесь уравнения характеристики: $d_\tau t = 1,\ d_\tau x = c(\tau, x)$.

Прямая *t=0* нехарактеристическая. Можно положить $\tau = t$.

Что делать, если *c* – функция от трех переменных: *t, x,* ρ ?

Уравнение (1) называется линейным, если *c* не зависит от ρ, и квазилинейным – в противоположном случае. Из теоремы о неявной функции следует, что неизвестная функция $\rho(t,x)$ постоянна на кривых, удовлетворяющих уравнению

$$d_t x = -\partial_t \rho / \partial_x \rho = c(t, x, \rho).$$

Вместе с уравнением $d_t \rho = 0$ получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение этой системы зависит от параметра x_0: $x(0) = x_0, \rho(0) = \rho_0(x_0)$.

Второе уравнение системы при фиксированном x_0 легко решается: $\rho = const$.

Затем решаем первое уравнение и находим характеристику, исходящую при *t=0* из точки x_0.

После того как определены все характеристики, нужно по известной функции $x = x(t, x_0)$ найти $x_0 = x_0(t, x)$, а это не так и просто. И не всегда возможно. При малых *t* возможно, т. к. производная $\partial_{x_0} x \approx 1 \neq 0$.

Но, если смогли выразить, то решение (1) найти легко: $\rho(t,x) = \rho_0(x_0(t,x))$.

Если уравнение (1) линейное, то и первое уравнение системы ОДУ

$$d_t x = c(t, x, \rho), \quad d_t \rho = 0$$

не зависит от второго, и может решаться независимо. Характеристики *x(t)* с различными начальными условиями не пересекаются. Следовательно, можно определить обратную функцию $x_0 = x_0(t, x)$.

Если же уравнение (1) лишь квазилинейное, то характеристики могут пересечься, и теорема существования решения уравнения (1) с гладким начальным условием верна только при $t < t_*$. Потом решение (во всяком случае гладкое) уже не существует. Пример – уравнение Эйлера – Хопфа: $u_t + u u_x = 0$.

Уравнение описывает динамику бесстолкновительной среды; *u* – скорость. В начальный момент времени скорость в каждой точке прямой определена однозначно и гладко зависит от координаты x. Будет ли это выполняться в дальнейшем? Оказывается, что не всегда.

Разрыв в уравнении Эйлера - Хопфа

Уравнение Эйлера – Хопфа: $u_t + uu_x = 0.$

Уравнения характеристик: $d_t x = u,\; d_t u = 0 \Rightarrow u(t) = u_0(x_0),\; x(t) = x_0 + u_0(x_0)t.$

<u>Пример 1</u>: $u_0(x) = \exp(x) \Rightarrow x(t) = x_0 + t\exp(x_0)$

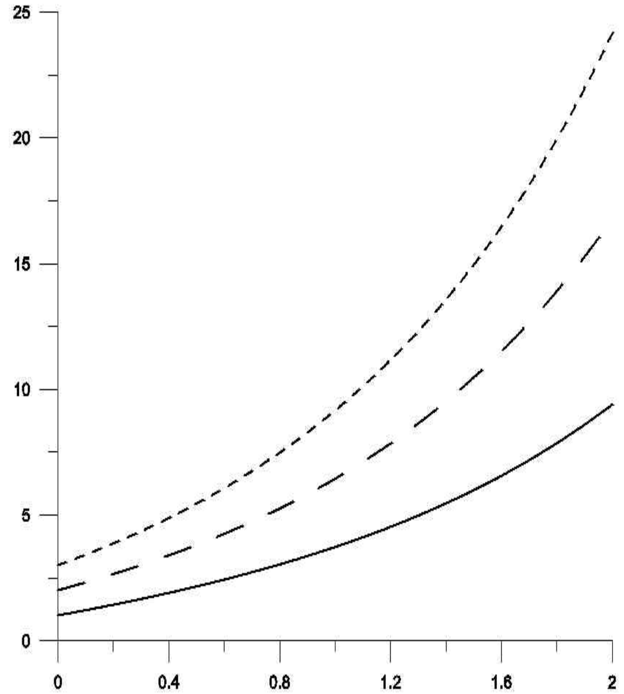
Зависимость $x(x_0)$ монотонная при всех t>0.

Значит существует обратная функция при t>0.

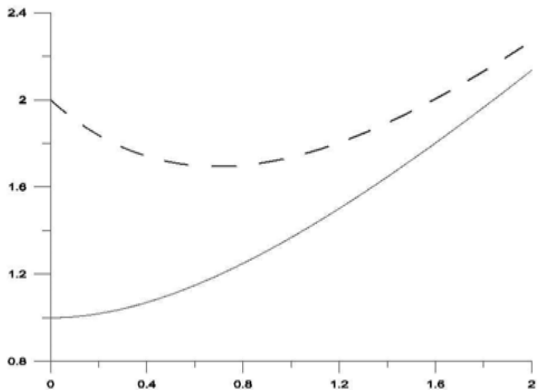
Поэтому формула $u(t,x) = u_0(x_0)$ законна.

<u>Пример 2</u>: $u_0(x) = \exp(-x) \Rightarrow x(t) = x_0 + t\exp(-x_0)$

x0+texp(x0), t=1,2,3



x0+texp(-x0), t=1,2



Условие монотонности: $1 + tu'_0(x) > 0.$ Если $u'_0 > 0,$ то монотонно при всех t>0.

Иначе $t_* = \inf\limits_{x_0} \left\{ \left[-u'_0(x_0) \right]^{-1} \right\}.$

Квазилинейное уравнение и первый интеграл

Квазилинейное уравнение $u_t + c(u)u_x = 0$ сводится к ур. Эйлера–Хопфа:

$$c_t = \frac{dc}{du}u_t = -\frac{dc}{du}c(u)u_x = -cc_x.$$

Начальная функция $c_0 = c\big(u_0(x)\big)$. Существует проблема определения $u(t,x)$ по функции $c(t,x)$.

Если уравнение линейно: $c=c(t,x)$, то геометрия характеристик не зависит от самого решения u: $d_t x = c(t,x)$. Характеристики могут уходить на ∞, но не пересекаться.

Первый интеграл уравнения Эйлера–Хопфа:

$$I[u] = \int_{\mathbb{R}} u dx;\ \ d_t I = \int_{\mathbb{R}} u_t dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u^2)_x dx = -\frac{u_\infty^2 - u_{-\infty}^2}{2}.$$

Если $u_\infty^2 = u_{-\infty}^2 \Rightarrow d_t I = 0 \sim I = const.$

Нелинейный перенос и первые интегралы

Если решение гладкое, список первых интегралов можно продолжить.

Умножим (1) на *m*(*u*). Пусть решение гладкое и стабилизируется на бесконечности к одинаковому (или периодика). Положим:

$$g(u)=\int m(u)du,\;\; f(u)=-\int m(u)c(u)du,\;\; I_g[u]=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \Rightarrow d_t I_g=0.$$

Если же решение негладкое и разрыв имеет место на гладкой кривой *X*=*X*(*t*), то при интегрировании по частям получается дополнительное слагаемое.

Пример. Уравнение Эйлера-Хопфа, $I[u]=\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx.$ На краях скачка решение принимает значения $u_\pm$. Тогда для того чтобы I сохранялся и на разрывных решениях должно выполняться условие Гюгонио – Ренкина:

$$\left(u_+-u_-\right)\frac{dX}{dt}=\frac{u_+^2}{2}-\frac{u_-^2}{2}\Leftrightarrow \frac{dX}{dt}=\left(u_++u_-\right)/2.$$

Если же потребовать сохранения $I_{u^2}[u]=\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx,$ то сначала Э.-Х. → $\frac{1}{2}(u^2)_t+\frac{1}{3}(u^3)_x=0,$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(u_+^2-u_-^2\right)\frac{dX}{dt}=\frac{u_+^3}{3}-\frac{u_-^3}{3}\Leftrightarrow \frac{dX}{dt}=\frac{2}{3}\frac{u_+^2+u_-^2+u_+u_-}{u_++u_-}.$$

При уменьшении амплитуды скачка [u]→0 Г.-Р. сводится к ур. характерист.

Условия Гюгонио-Рэнкина

Квазилинейное уравнение $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ Если решение *u* гладкое, то для всех гладких функций $\varphi(t,x)$ выполняется равенство:

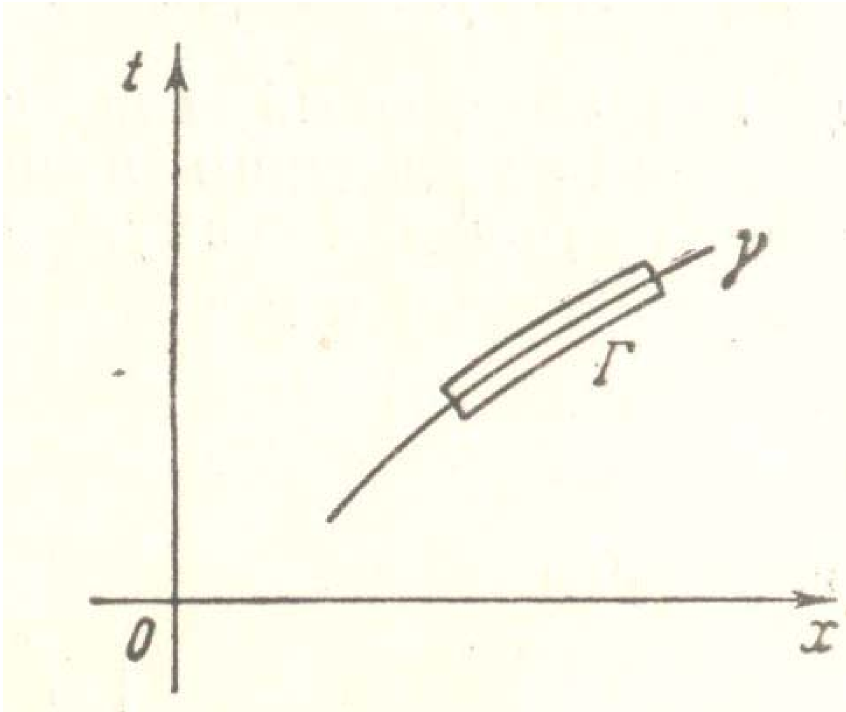
$$\iint \varphi(t,x)\left[\partial_t u + \partial_x f(u)\right] dtdx = 0 \Rightarrow \iint u\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x\varphi f(u) dtdx.$$

Но если *u* имеет разрывы? Если для всех финитных гладких φ выполняется условие (1), то *u* называется обобщенным решением.

Если обобщенное решение имеет скачок на кривой γ, то для любой фигуры с кусочно-гладкой границей, в частности, с Г, интеграл равен нулю:

$$\iint \left[\partial_t u + \partial_x f(u)\right] dtdx = 0 \Rightarrow \oint_\Gamma u dx - f dt = 0$$

Выбирая полоску маленькой и тонкой, учтем, что вдоль кривой подинтегральное выражение нулевое. Отлично от нуля, когда поперек. Оценим интеграл:



$$\oint_\Gamma = \left(u^+\omega - f^+\right)\Delta t - \left(u^-\omega - f^-\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

где ω- тангенс угла наклона кривой γ и, переходя к пределу при $\Delta t \to +0$,

$$\omega\left(u^+ - u^-\right) = f(u^+) - f(u^-).$$

Система квазилинейных гиперболических уравнений

Система уравнений в частных производных $\partial_t \vec{U} = A(t, x, \vec{U})\partial_x \vec{U} + \vec{F}(t, x, \vec{U})$. (1)
(квазилинейная) называется гиперболической, если собственные числа матрицы *A* вещественны и различны. Тогда существует матрица $C(t, x, \vec{U})$ такая что

$$A(t, x, \vec{U}) = C(t, x, \vec{U})\Lambda(t, x, \vec{U})C^{-1}(t, x, \vec{U}), \ \Lambda = diag\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}, \ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим случай линейной системы с постоянными коэффициентами.
Сделаем замену $\vec{U} = C\vec{V}, \ \vec{V} = B\vec{U}; \ B = C^{-1}$.
Тогда (1) переходит в систему $\partial_t \vec{V} = \Lambda \partial_x \vec{V} + \vec{G}$.

Волновое уравнение $\partial_t^2 u = c^2(x)\partial_x^2 u$ можно записать в виде гиперболической системы $\partial_t u = c\partial_x q, \ \partial_t q = c\partial_x u$.

Задача Коши: при *t=0* задана вектор-функция $\vec{U}(0, x)$.

Краевая задача при *x>0*: нужно задать столько граничных условий, сколько отрицательных λ_j, но вид этих граничных условий не произволен.

Газ – сжимаемая среда. Плотность ρ - одна из неизвестных функций. 5 неизвестных функций – нужно еще одно уравнение. Баланс энергии. Если нет притоков и стоков тепла (адиабатическое приближение ($Q=0$) – закон сохранения энергии

$$\partial_t \rho + div \rho \vec{u} = 0$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \nabla \vec{u}) + \rho^{-1} \nabla p = \nu \Delta \vec{u},$$

$$\partial_t p + \kappa p div \vec{u} = Q.$$

На частицы газа могут действовать внешние силы (например, сила тяжести и перелистывание страниц). При переходе в неинерциальную систему координат возникают фиктивные силы. Для описания динамики атмосферы используют систему, вращающуюся вместе с Землей → нужно учитывать силу Г.Г. де Кориолиса (1792-1843).

Работа Кориолиса была опубликована в 1833г. Впрочем, основные формулы были получены еще П.С.Лапласом (1749-1827) в 1775г. Эффект отклонения тел при движении во вращающейся системе координат был описан Дж.Б.Ричоллли (1598-1671) и Ф.М.Гримальди (1618-1663) в 1651г.

В координатном виде над плоской Землей (l-плоскость) уравнения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + div(\rho \vec{v}) = 0 \\
&\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u + \rho^{-1}\partial_x p - lv - \omega^2 x = 0 \\
&\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + \rho^{-1}\partial_y p + lu - \omega^2 y = 0 \qquad (1) \\
&\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w + \rho^{-1}\partial_z p + g = 0 \\
&\partial_t p + u\partial_x p + v\partial_y p + w\partial_z p + \kappa p\, div\vec{v} = 0
\end{aligned}
$$

Здесь g – ускорение свободного падения, $\kappa = 1 + R_{уд} / c_V$ - показатель адиабаты, центробежным ускорением (члены с ω) обычно пренебрегают, параметр Кориолиса l – константа. Более продвинутая модель – линейная зависимость от y.

Нужно добавить вязкость, радиационные притоки тепла, фазовые переходы (потребуется ввести еще неизвестные функции). Учет сферичности очевиден.

В уравнении $\varepsilon\left[\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w\right] + \rho^{-1}\partial_z p + g = 0$, как показывает масштабный анализ, для крупномасштабных атмосферных процессов можно заменить формальный параметр ε нулем. Получаем уравнение гидростатики (из которого, в свою очередь, следует закон Архимеда, 287-212 до н. э.). Хорошую теорию разложения по малому параметру ε пока не построили.

Для «идеальной» системы (1) теорема существования гладкого решения при гладких начальных условиях доказана «в малом», т. е. для достаточно малых t. Для формальных рядов и для сходящихся рядов (аналитических функций) это следует непосредственно из теоремы О.Л.Коши (1789-1857) – С.В.Ковалевской (1850-1891).

Теорема существования «в большом», т. е. при всех $t>0$ для квазилинейных уравнений не верна - легко убедиться на примере уравнения Хопфа $\partial_t u + u\partial_x u = 0$, описывающем одномерное движение частиц на прямой без столкновений. Если функция u(0,x) не является монотонно растущей по x, то через некоторое время $t_{catastrophe}$ (которое находится с помощью метода характеристик) гладкое решение становится разрывным. Этому предшествует сильный рост производных. Поэтому феномен называется градиентной катастрофой.

Пока решение системы (1) остается гладким, сохраняются первые интегралы, связанные с сохранением массы, импульса, энергии, энтропии (целая функциональная серия первых интегралов) потенциального вихря Эртеля (появляется уже функция двух переменных в качестве степени свободы) и т. д.

Для вязких систем разрывов, видимо, не возникает. Пример: решения уравнения И.М.Бюргерса (1895 – 1981) $\partial_t u + u\partial_x u = \mu\partial_{xx}^2 u$ гладкими остаются всегда.

Регуляризация квазилинейного уравнения

В решении уравнения Эйлера-Хопфа могут возникнуть разрывы. Заменим его уравнением Бюргерса с малой вязкостью: $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \ \varepsilon \to +0.$
Эта вязкость оказывается существенной только в зонах больших градиентов решения. Она препятствует градиентной катастрофе.
Вопросы. А почему именно такой регуляризатор? Можно, например, использовать третью или четвертую производную. Или взять коэффициент, вязкости, зависящий от решения.

Общая информация об атмосферных фронтах

Для системы уравнений газовой динамики существует ровно два рода разрывных решений:

1) Ударная волна – скачок давления и нормальной к поверхности разрыва компоненты скорости ветра;

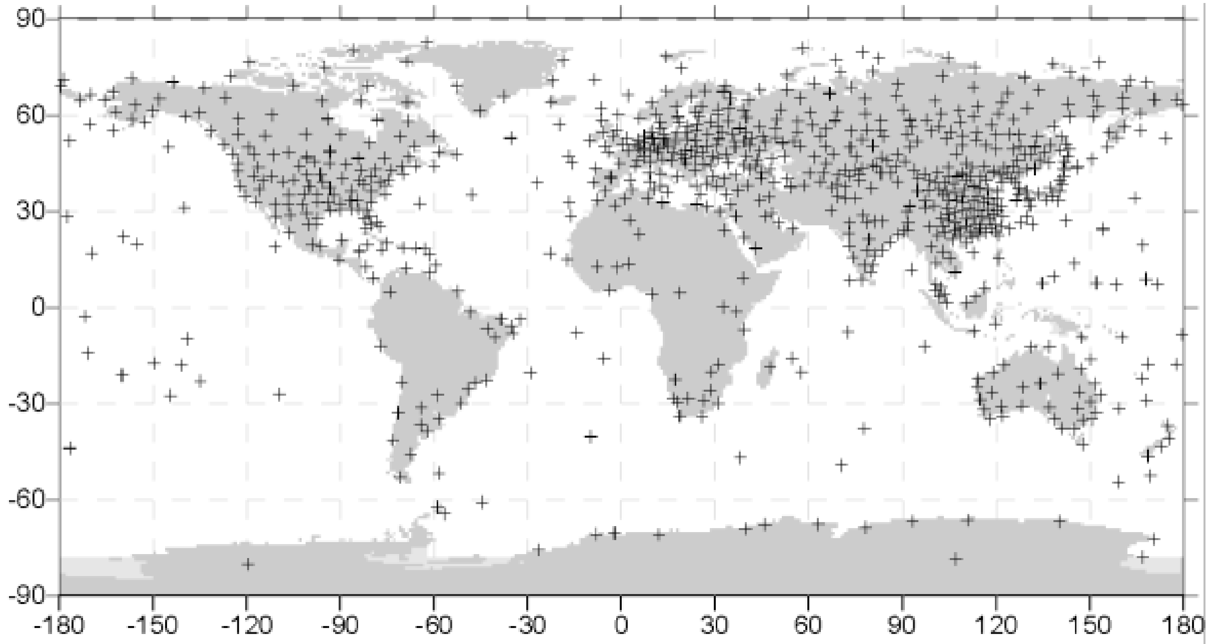
2) Тангенциальный разрыв – скачок температуры, плотности и касательной компоненты скорости ветра.

Атмосферный фронт – разрыв второго рода.

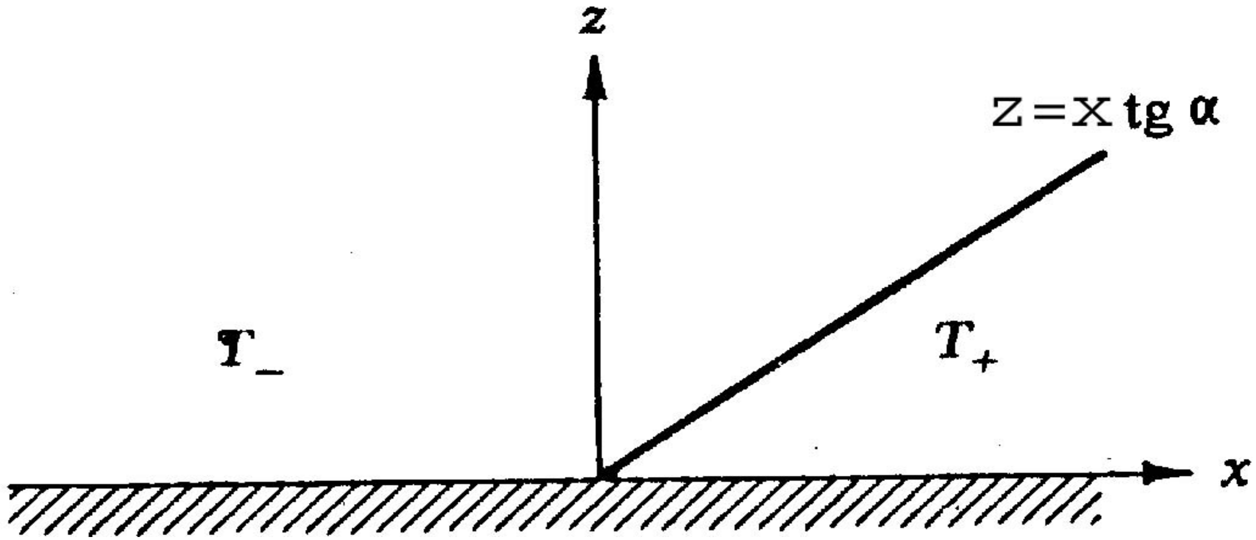
Практическая задача: построить (используя значения метеорологических полей на регулярной 3D сетке) 3D поверхности атмосферных фронтов. Метеополя (температура, ветер, геопотенциал) – результат численных моделей прогноза на несколько суток

Важность задачи: атмосферные фронты обычно связаны с заметной переменой погоды. Они часто связаны с осадками.

Трудности: 1) Реальные фронты не являются скачками в математическом смысле. Это зоны, ширина которых варьируется от 1км до многих десятков километров. В то же время типичное расстояние между аэрологическими станциями (которые запускают метеорологические зонды) составляет сотни или тысячи километров.



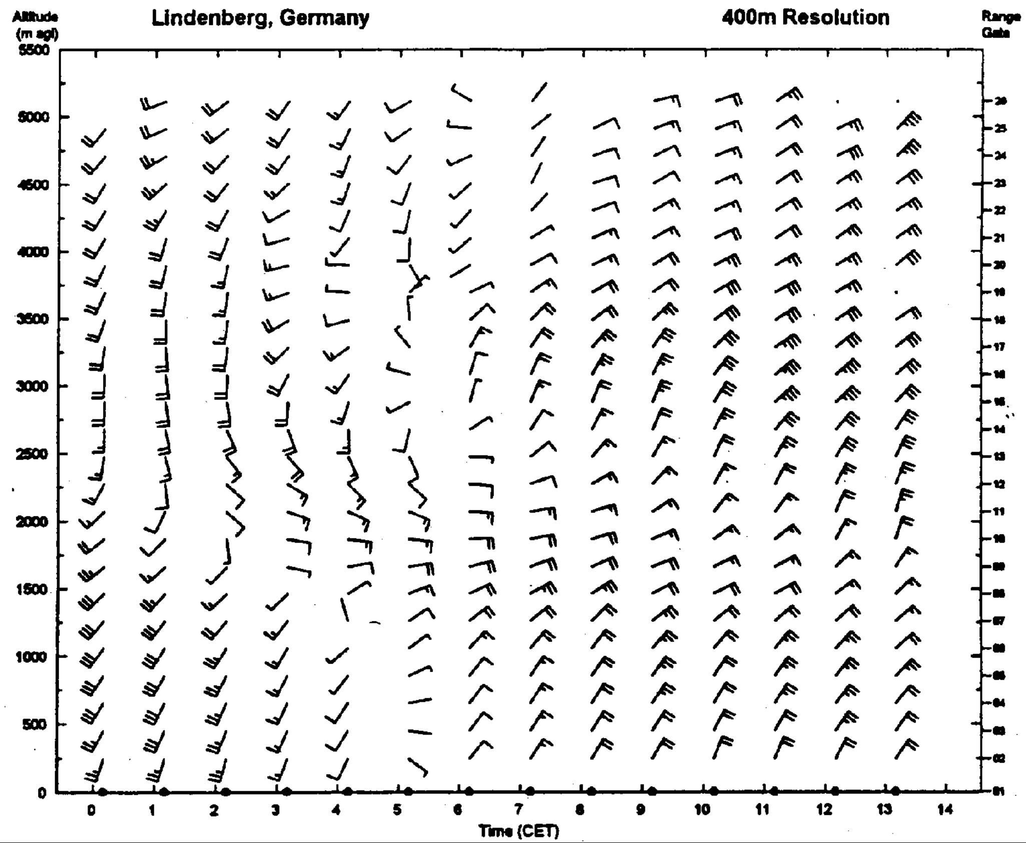
Уточнение: имеются еще синоптические станции, которых почти на порядок больше, но они измеряют только на поверхности земли, и спутники, но у них точность меньше.

2) Поверхность атмосферного фронта имеет сложную геометрию и топологию. В конце XIX – первой половине XX вв. моделировали, фронт наклонной плоскостью. Теорема Маргулеса в этом случае давала оценку угла наклона ~1°.	 Н.Е.Кочин пытался найти условия устойчивости такой конфигурации теплой и холодной масс воздуха. Реальные же атмосферные фронты не плоскости и не гладкие поверхности. Возможны дыры. Фронт может закончиться, уменьшив свою амплитуду. Иногда не доходит до земли, иногда – до тропопаузы.

3) В этих условиях неясна сама дефиниция атмосферного фронта.

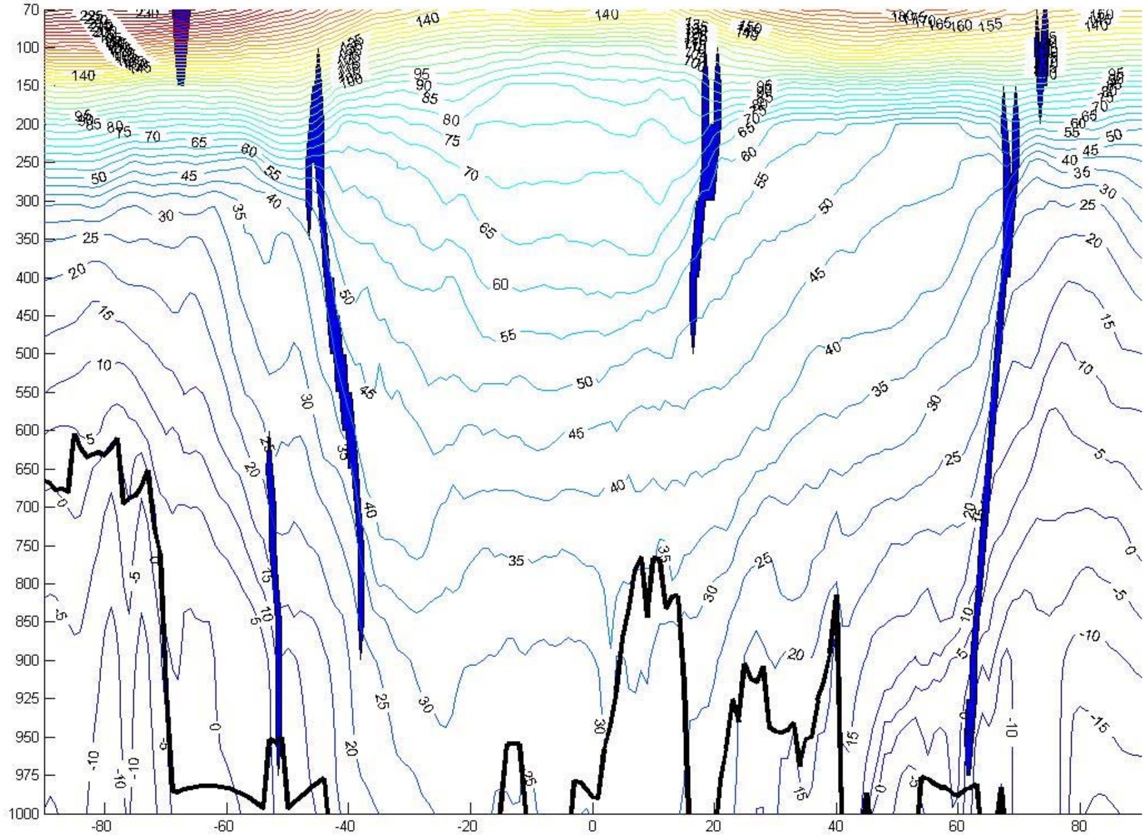
Пример динамики реального фронта

Поле горизонтального ветра, при прохождении атмосферного фронта, измеренного профайлером (Линденберг, Германия). Высота до 5 км (25 уровней), период – 13 часов (ежечасно) Вначале ветер юго-западный, в конце – северо-восточный. Смена направления на разных уровнях происходит в разное время.



Видно, что речь идет не о плоском движении наклонной плоскости. Природа устроена сложнее!

Фронты в сечении меридианом 40° в.д. (пример)



Слева Южный полюс, справа - Северный

Лапласиан, гессиан и геометрия фронта

Предложение: использовать фронтальный параметр, зависящий от предполагаемого направления $\vec{e}$, ортогональному фронту

$$L_e(x,y)=\vec{e}\begin{pmatrix}\partial^2_{xx}H(x,y) & \partial^2_{xy}H(x,y)\\ \partial^2_{yx}H(x,y) & \partial^2_{yy}H(x,y)\end{pmatrix}\vec{e}^{\mathrm{T}}$$

Здесь H – геопотенциал – высота барической поверхности.
Второй фронтальный параметр формируется по полю ветра

$$R_e(x,y)=\vec{e}\begin{pmatrix}\partial_y u(x,y) & \frac{1}{2}\left(\partial_y v(x,y)-\partial_x u(x,y)\right)\\ \frac{1}{2}\left(\partial_y v(x,y)-\partial_x u(x,y)\right) & -\partial_x v(x,y)\end{pmatrix}\vec{e}^{\mathrm{T}}$$

Третий фронтальный параметр – модуль производной температуры по направлению $\vec{e}$:

$$G_e(x,y)=\left|\left(\nabla T(x,y),\vec{e}\right)\right|.$$

Какую оптимальную функцию этих трех исходных фронтальных параметров следует выбрать в качестве финального фронтального параметра? **Какой критерий качества?**

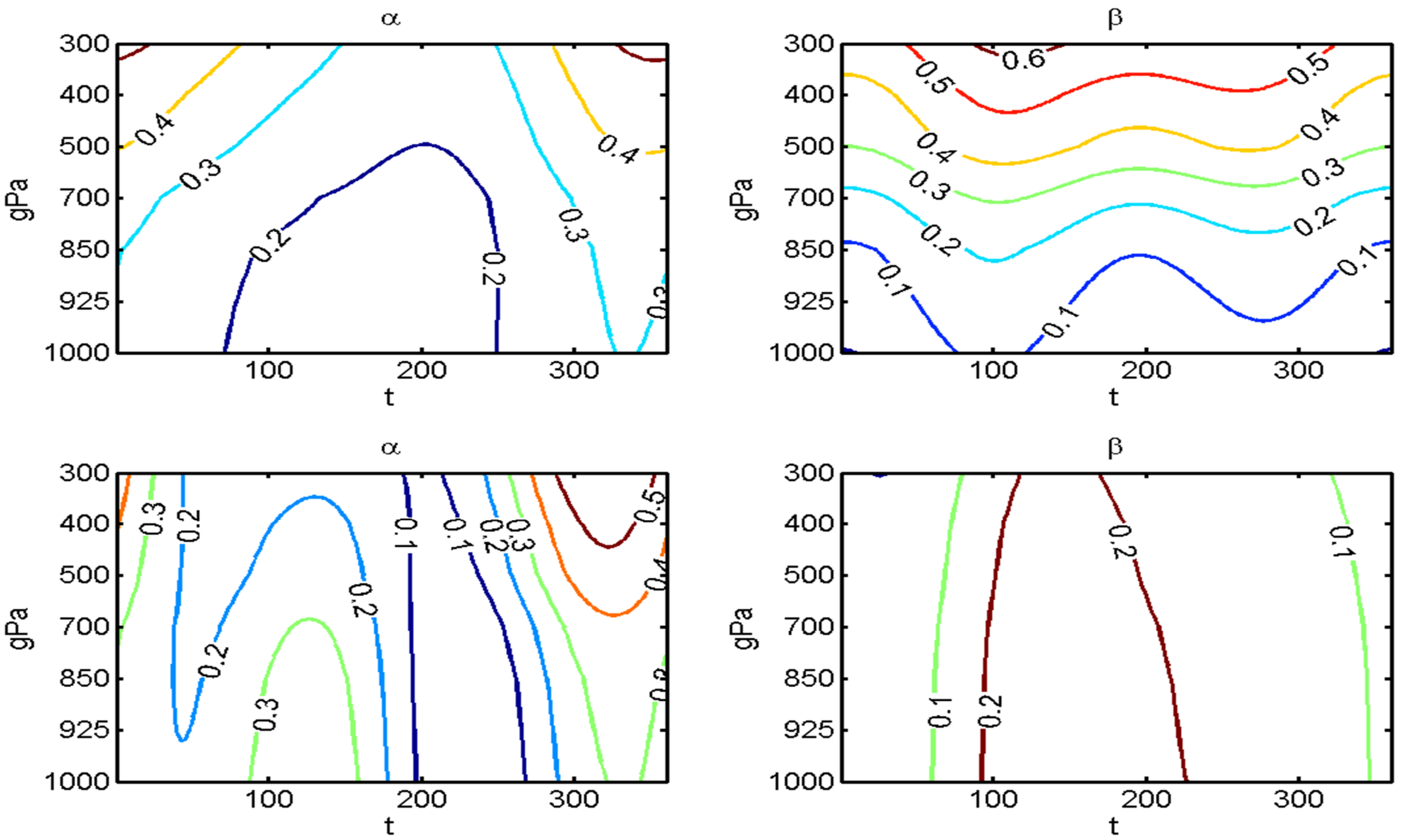
В качестве входных полей используются поля глобального прогноза NCEP с шагом 0,5 ×0,5 или мезомаштабная модель (покрывает Центральную и Восточную Европу до Урала) “COSMO” (Consortium for Small scale Modeling) с шагом 7 км.
Во всех случаях для аппроксимации производных используются схемы высокого порядка аппроксимации (специальная версия двумерного пр. Фурье для сферы и компактные разностные схемы для ограниченной территории).

Алгоритм проведения фронта

Пусть $\alpha(t,p)$ и $\beta(t,p)$ - константы, которые мы будет в дальнейшем менять.
Финальный предиктор сформируем как

$$P_e = \alpha(t,p)\chi(2\overline{L}_e - 1) + \beta(t,p)\chi(2\overline{R}_e - 1) + (1 - \alpha(t,p) - \beta(t,p))\overline{G}_e$$

Проводим фронт в таком направлении $\vec{e}^{\perp}$, чтобы для ортогонального ему вектора $\vec{e}$ достигался локальный максимум P_e, при условии, что этот локальный максимум больше некоторой константы. В противном случае фронт считаем слишком слабым.



Изолинии оптимальных функции $\alpha(t, \ln p)$, $\beta(t, \ln p)$, участвующие в формировании финального предиктора фронта P_f (первая строка) и для предиктора фронтов окклюзии P_o (вторая строка).

Корреляционные функции для атмосферы Земли.

О.А.Алдухов (ВНИИГМИ-МЦД), ***В.А.Гордин*** (ГМЦ РФ)

Однородные изотропные случайные поля – естественное обобщение стационарных случайных процессов (А.Колмогоров, А.Хинчин, Н.Винер)

Корреляционные функции (спектральные плотности) мелкомасштабных атмосферных процессов изучались Колмогоровым и его учениками. Для задач прогноза погоды важен крупный масштаб (1000 – 100 км), диктуемый масштабом наблюдательной сети и возможностями компьютеров для решения уравнений гидротермодинамики + фазовые переходы влаги etc.

Корреляционные функции применяются:

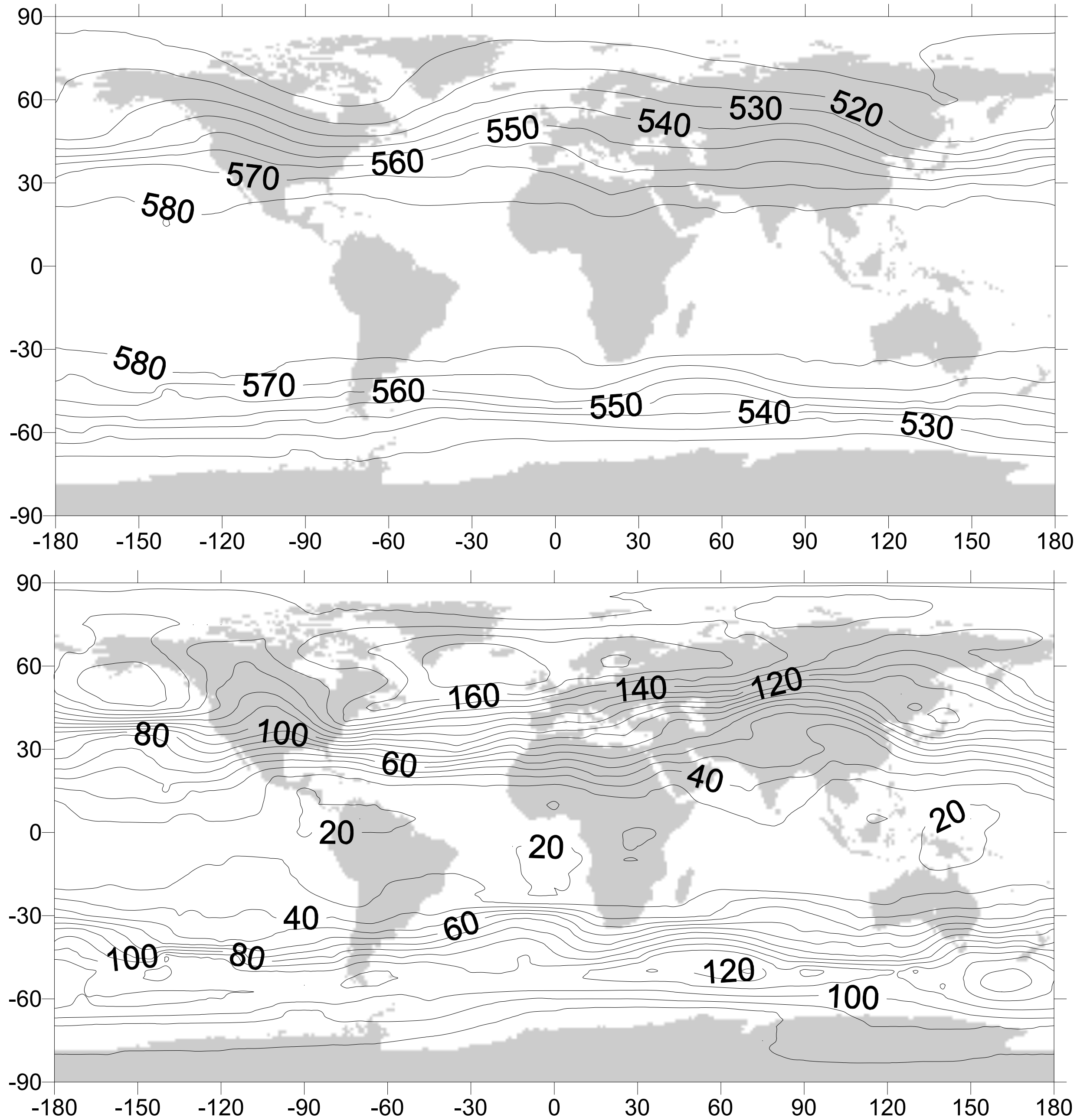
1) для оптимальной интерполяции метеоинформации из точек наблюдения в точки регулярной разностной сетки, а также (для контроля одних наблюдений по другим) в другую точку наблюдения;
2) для тестирования моделей: если климатическая модель адекватно моделирует не только поля средних величин, но и поля дисперсии и КФ, то такую модель стоит считать достоверной.

Климат - основные определения

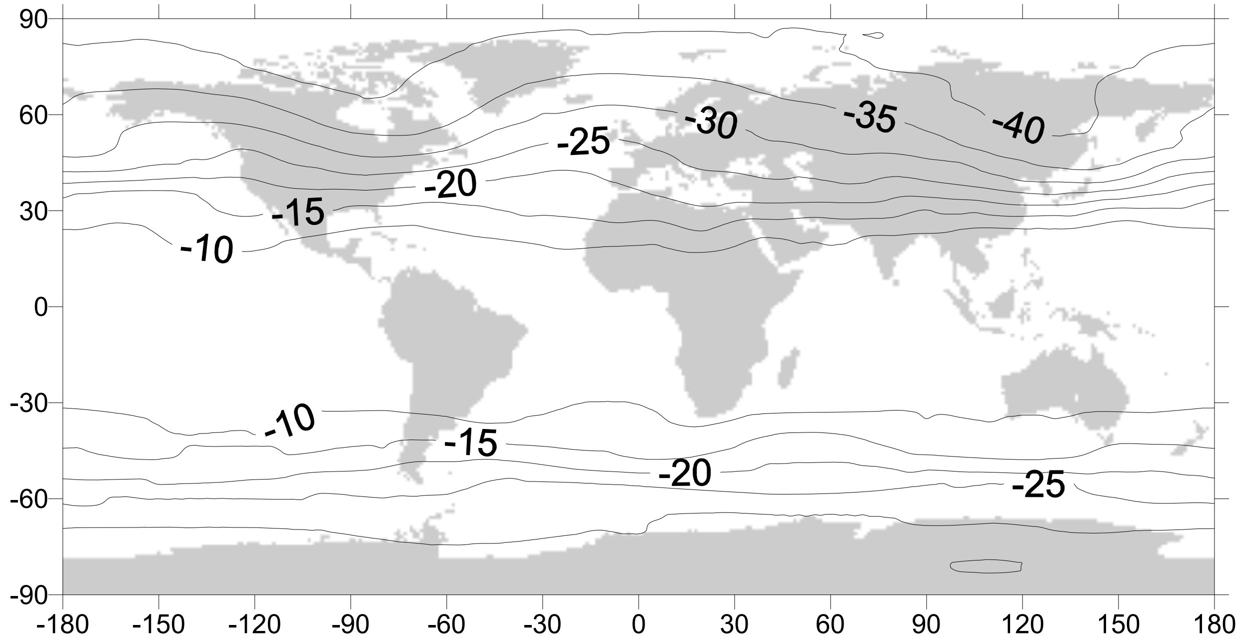
Пусть $f\left(\vec{x}\right)$ - случайное поле трехмерного аргумента. Например, температура или геопотенциал (высота в системе координат, где давление *p* – вертикальная координата). Нормируем поле: $\dfrac{f\left(\vec{x}\right)-\overline{f}\left(\vec{x}\right)}{\sigma_f\left(\vec{x}\right)}$.

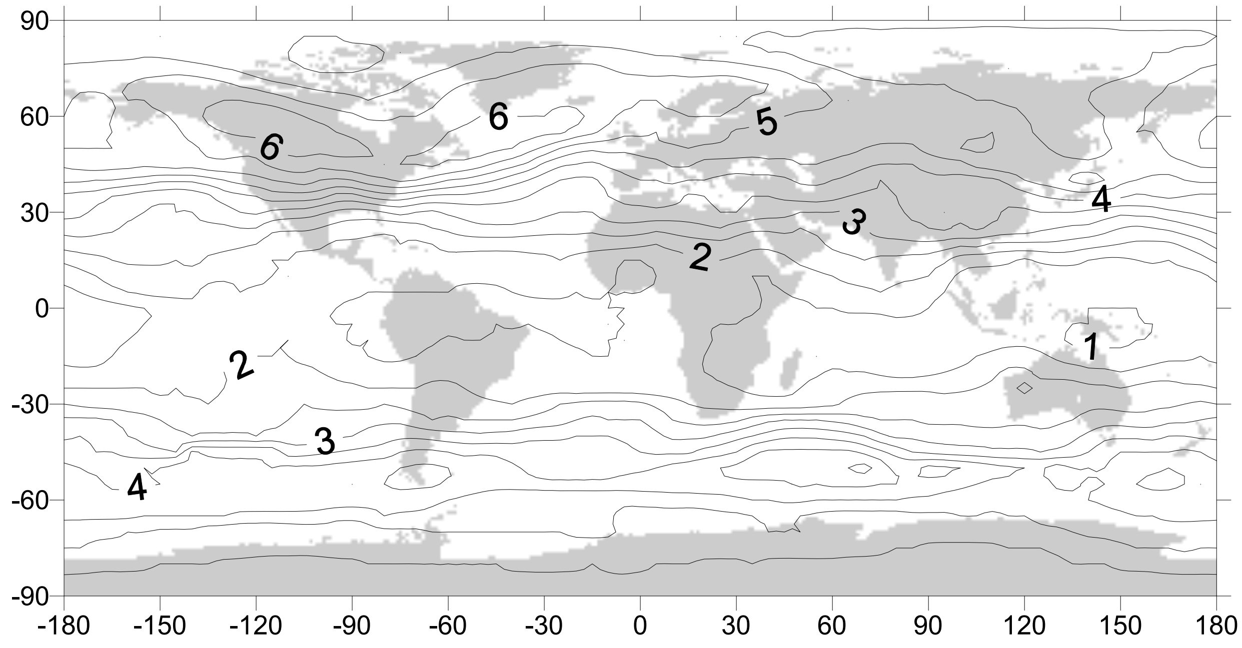
где черта – осреднение (скажем, по январям за много лет), $\sigma_f\left(\vec{x}\right)$- корень из дисперсии. Эти средние величины на одном вертикальном уровне могут различаться в разы. На следующем слайде пример: средние значения и сигмы для геопотенциала на уровне 500гПа по январям, осредненные за 1964-1998. Данные ВМО подвергались контролю (программное обеспечение разработано О.А.Алдуховым).

Средние январи, геопотенциал. Средние (в дам) и сигмы (в м)



Средние январи, температура. Средние и сигмы (в град)





Основные определения для КФ

Пусть $f\left(\vec{x}\right)$ - нормированное случайное поле трехмерного аргумента. КФ

$$K\left(\vec{x},\vec{y}\right)=M\left[\,f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)\right]$$

Эта функция (уже детерминированная) симметрична и неотрицательно определена, т. е., будучи взята в качестве ядра интегрального оператора Фредгольма, обеспечивает неотрицательную определенность оного. А если выбрать систему точек $\vec{x}_i$, то матрица $\left\|K\left(\vec{x}_i,\vec{x}_j\right)\right\|$ неотрицательно определена. Спектр этого оператора Фредгольма накапливается к нулю справа. При практической оценке спектр оператора «заходит» в отрицательную область → матрица $\left\|K\left(\vec{x}_i,\vec{x}_j\right)\right\|$. плохо обусловлена, и интерполяция приводит к большим погрешностям.

Вариационная задача: дана симметричная матрица «почти положительно определенная». Нужно ее исказить минимально, обеспечивая неравенство $\forall j:\lambda_j>\varepsilon>0$. Задача сильно нелинейная, поскольку характеристические корни – сильно нелинейные функции элементов матрицы. Однако задачу можно сильно упростить, использовав теорию возмущений самосопряженных операторов. Малый параметр – «заступ» собственных чисел за границу ε . Алгоритм работает для больших размерностей матриц.

Основные определения для КФ

$f(\vec{x})$ - нормированное случайное поле называется однородным, если

$$\forall \vec{h} : K(\vec{x},\vec{y}) = K\left(\vec{x}+\vec{h},\vec{y}+\vec{h}\right) \Leftrightarrow K(\vec{x},\vec{y}) = Q(\vec{x}-\vec{y}).$$

Изотропным, если КФ инвариантна относительно поворотов, т.е.

$$\forall U \in O(n) : K(\vec{x},\vec{y}) = K\left(U\vec{x},U\vec{y}\right) \Leftrightarrow K(\vec{x},\vec{y}) = k\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right).$$

Теорема Бохнера. Для того чтобы функция была корреляционной для какого-то случайного поля необх. и дост., чтобы она была неотрицательно определена (как ядро симметричного интегрального оператора). Для однородного поля это означает, что образ Фурье функции *Q* неотрицателен. Для однородного и изотропного: преобразование Фурье – Бесселя для *k* – неотрицательно.

В крупномасштабных атмосферных задачах для трехмерной однородности и изотропности нет оснований – только двумерная. Поля температуры (например) на разных уровнях по вертикали полагаем разными полями. Таким образом, у нас векторное случайное поле двумерного пространственного аргумента: несколько полей (температура, геопотенциал, ветер) и много уровней по вертикали. КФ – матричнозначная. Нужно аппроксимировать КФ функцией $A_0\delta(r)+\sum_{j=1}^{m} A_j J_0\left(\xi_j r\right)$, где все матричные коэффициенты положительно определены.

……

Алгоритм оценки КФ

По данным измерений строится ступенчатая по *r* матричнозначная функция. Затем она аппроксимируется функцией вида $A_0\delta(r) + \sum_{j=1}^{m} A_j J_0\left(\xi_j r\right)$.

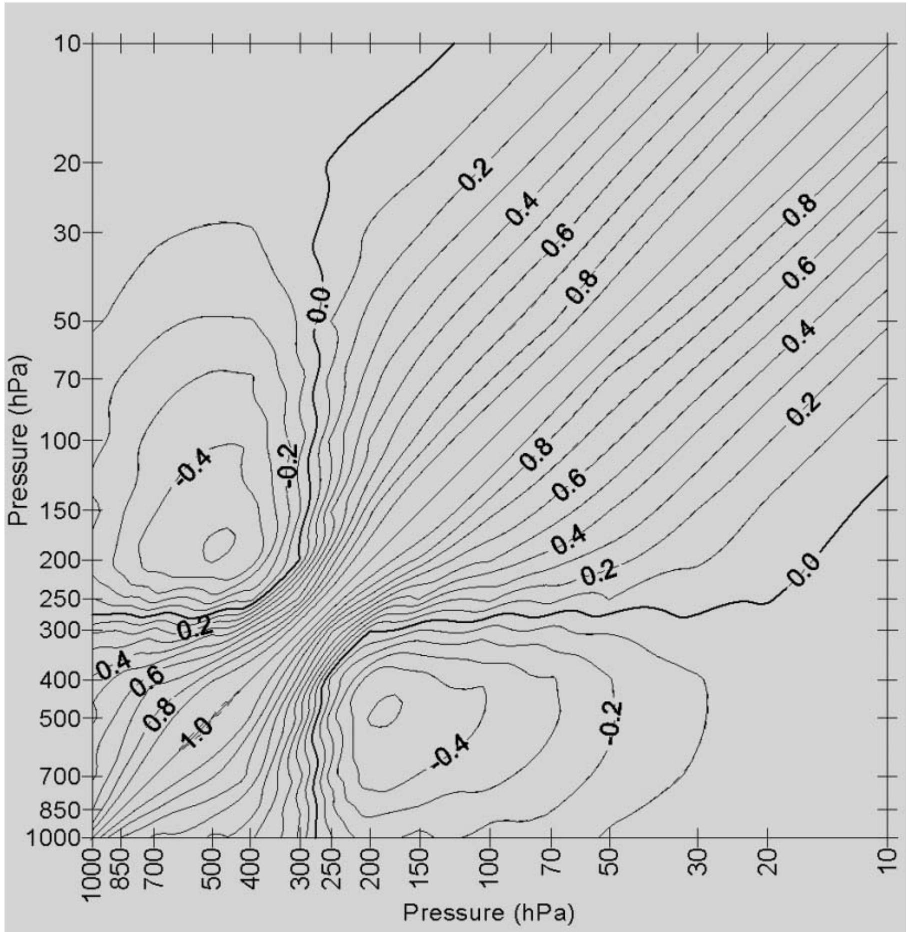
Затем производится нелинейная оптимизация масштабных множителей ξ_j. Затем корректируются матрицы A_j при ограничении: на диагонали результата стоят единицы. Снова масштабные множители – несколько раз. Результаты представляют собой большой массив чисел. Некоторые будут представлены ниже.

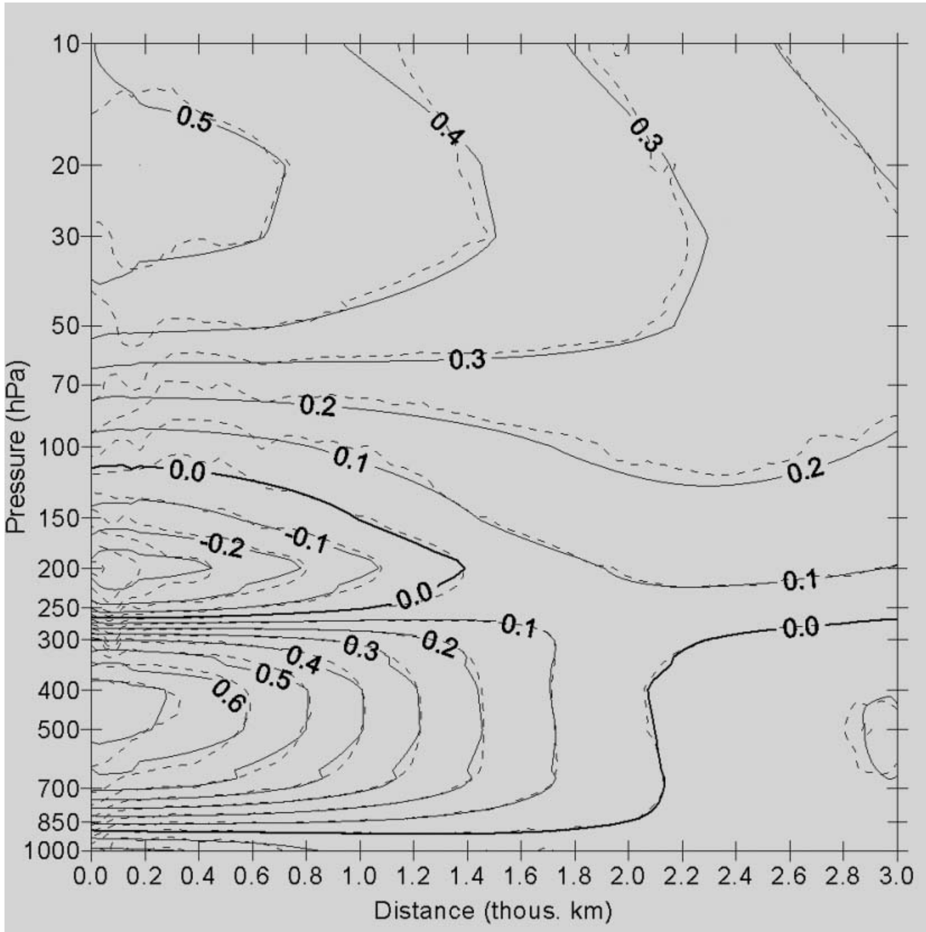
Общие выводы.

1. Никакой автомодельности (типа колмогоровской) не усматривается
2. Господствовавшая гипотеза: чем выше, тем более гладкие и крупномасштабные поля, неверна. В нижней стратосфере КФ больше, но выше, к 10 гПа они снова уменьшаются.
3. Ослабление корреляций наблюдается в районе тропопаузы.
4. Наша вариационная процедура насильственного обеспечения положительной определенности приводит к повышению гладкости КФ (как и увеличение архива, по которому строится первоначальная КФ).

Результаты: КФ для январей, умеренные широты Сев. полуш.

Автокорреляционная функция температуры по вертикали (при *r=0*) и кросскорреляция геопотнециала и температуры (на одинаковом уровне). Пунктир – до принудительного обеспечения положительной определенности, сплошная линия – после.





Анизотропия

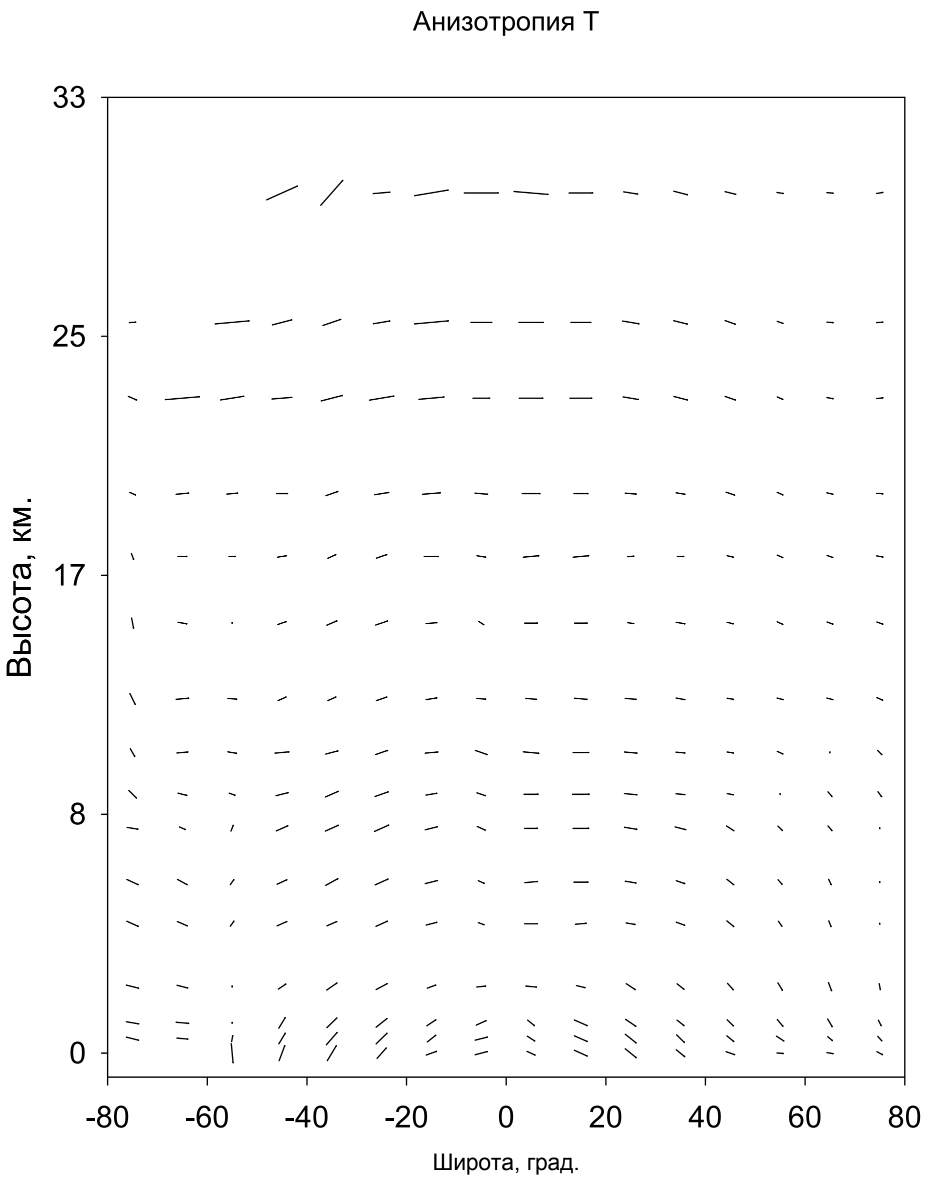
Гипотеза изотропии метеорологических полей была подвергнута проверке. Оказалось: в некоторых областях атмосферы она сильно нарушается

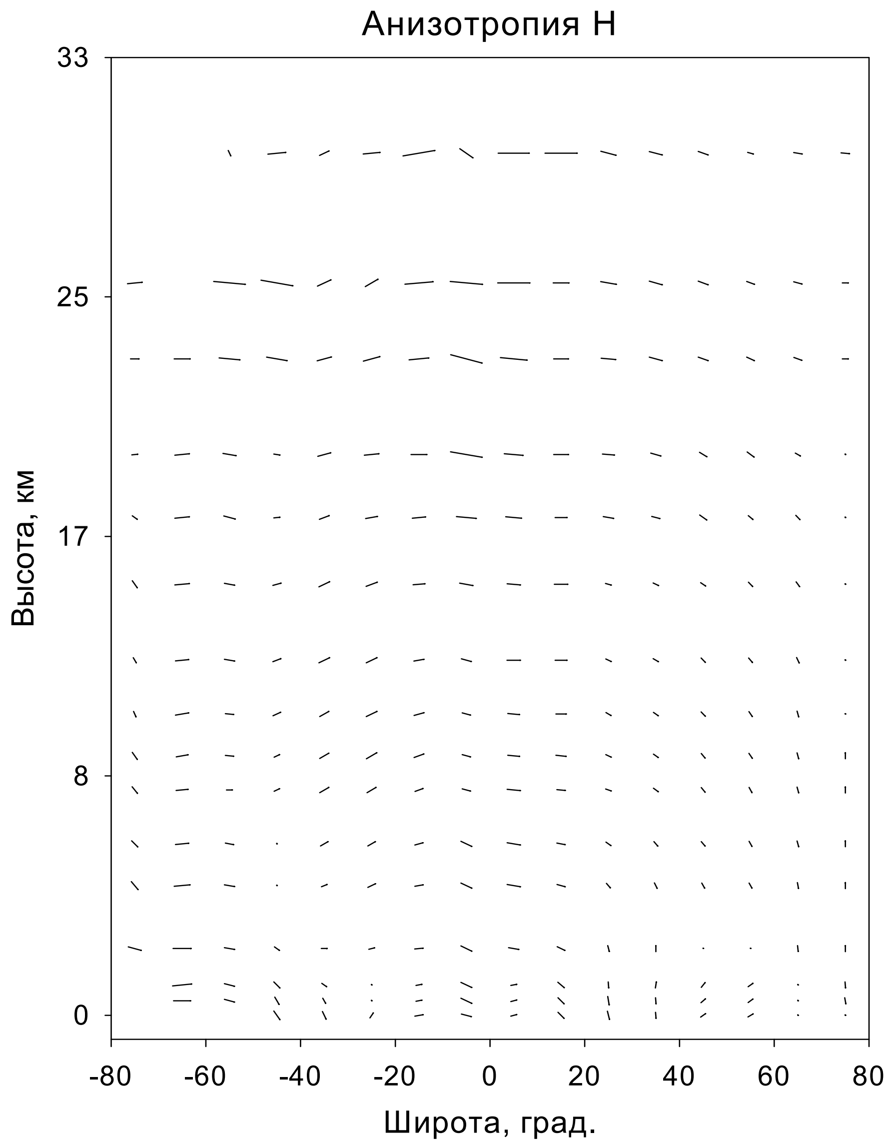
На первом этапе мы проверяли соотношение между меридиональной и зональными корреляциями. Получив существенные различия, мы решили проверить, верно ли что оси соответствующего эллипса всегда расположены вдоль параллелей и меридианов ? Оказалось, что и это не верно. Окончательная постановка задачи: найти метрический тензор $g_{\alpha\beta}(\vartheta, p)dx_{\alpha}dx_{\beta}$, в котором метеорологические поля наиболее близки к изотропным. На рисунках отрезки, длина которых указывает на отношение собственных чисел тензора (оно достигает 15), а ориентация – совпадает с ориентацией собственного вектора, отвечающего более дальней корреляции.

Полученная геометрия, по нашему мнению, объясняется проявлением муссонной циркуляции в стратосфере и наличием ячеек Гадлея. Картинки для зимнего и летнего полушарий оказались довольно симметричны.

Результаты: Анизотропия скаляров (январи)

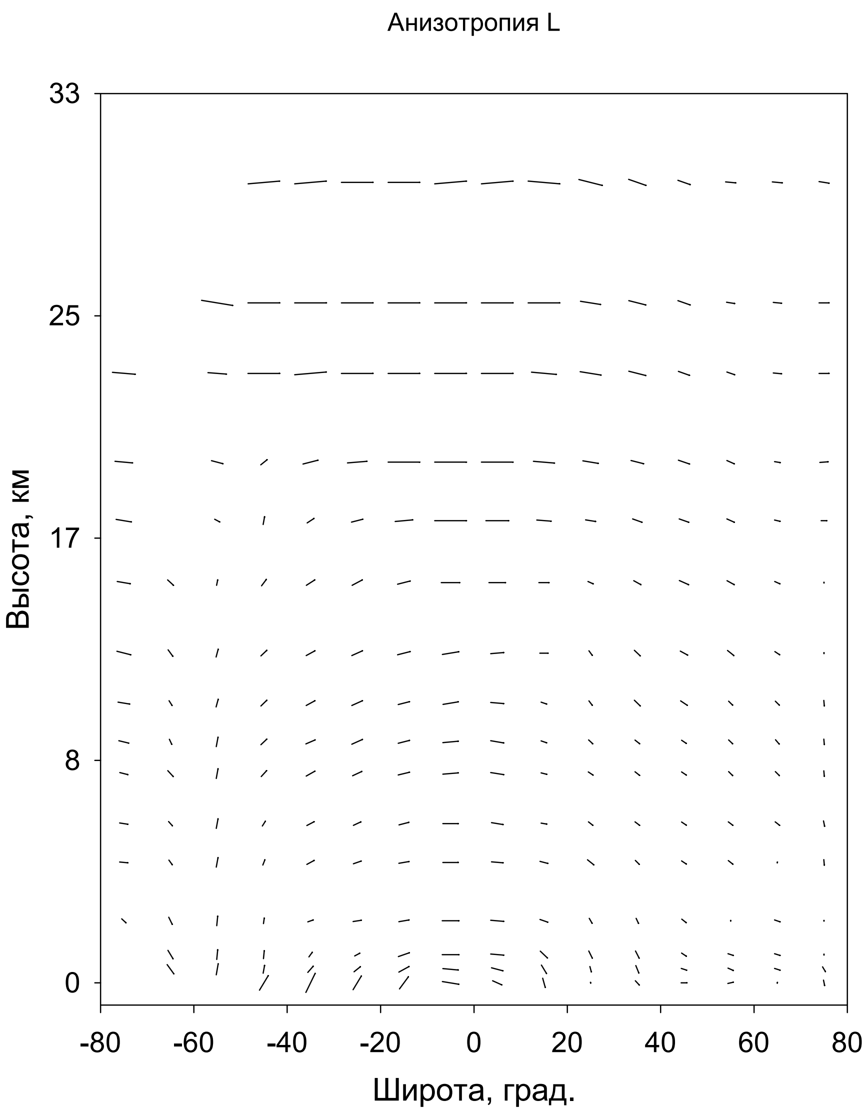
Здесь ориентация отрезков: горизонтально – большая зональная корреляция, вертикально – меридиональная.

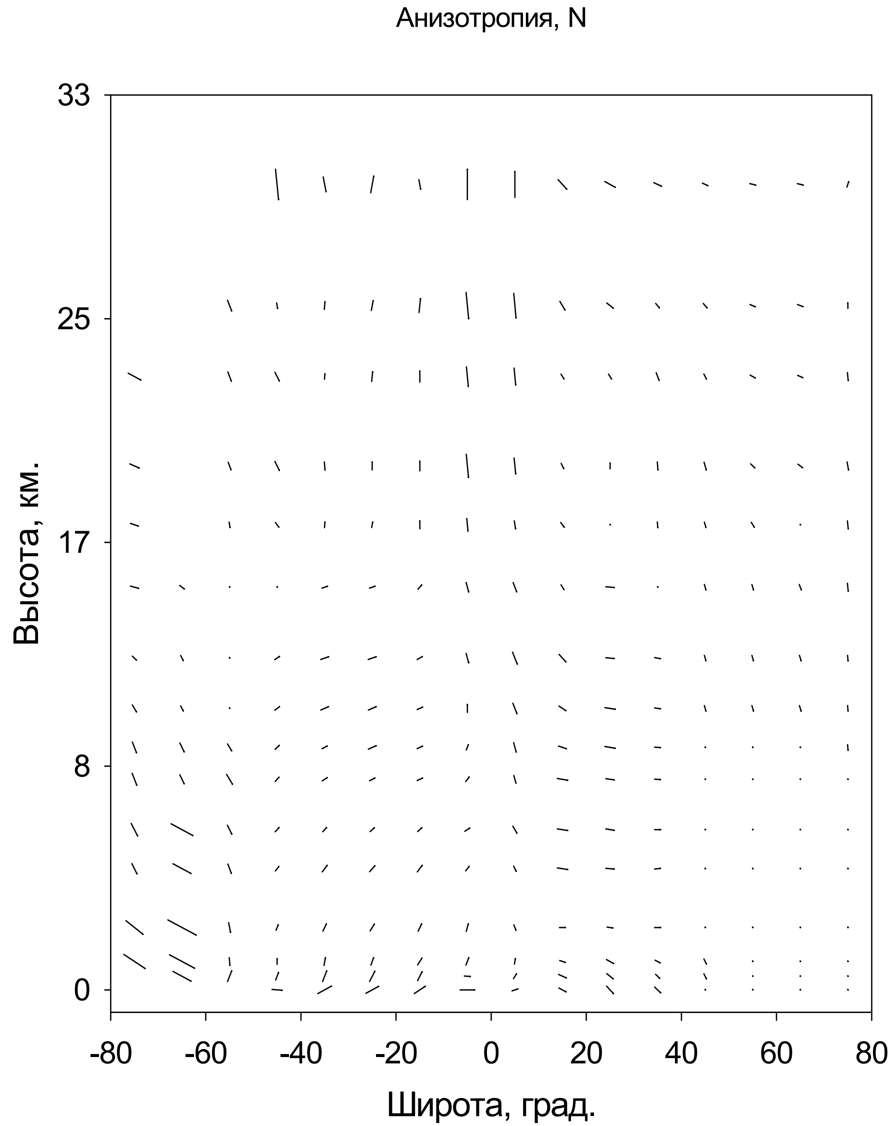




Результаты: Анизотропия ветра (январи)

Здесь ориентация отрезков: горизонтально – большая зональная корреляция, вертикально – меридиональная. Нормальный компонент ветра сильнее коррелиру





КФ для отклонений наблюдений от прогноза

Для целей прогноза интерполируются не поля отклонений от среднемесячных значений, но от полей первого приближения, - полей прогноза на момент интерполяции (анализа) – как правило, с заблаговременностью 12 часов. Описанная технология оценок КФ пригодна и в этом случае. Отличия:

1. Амплитуда отклонений от прогноза в несколько раз меньше (прогноз намного лучше описывает реальность, чем среднемесячные поля). Поэтому относительный вклад ошибок наблюдений (матрица A_0) больше. По той же причине КФ быстрее убывают с расстоянием.
2. Изменения в климате атмосферы Земли происходят медленнее, чем в прогностических моделях. Поэтому, накапливая большие архивы, неизбежно сталкиваемся с неоднородностью рядов – авторы улучшили прогностическую модель. Нужно иначе устраивать схему осреднений, чтобы использовать более короткие (годы, а не десятки лет) временные ряды.

У прогностических полей имеются систематические смещения, имеющие географическое распределение. В некоторых районах оно, например, по температуре на уровне 500гПа превосходит $3{,}6^{\circ}$- нужно учитывать.

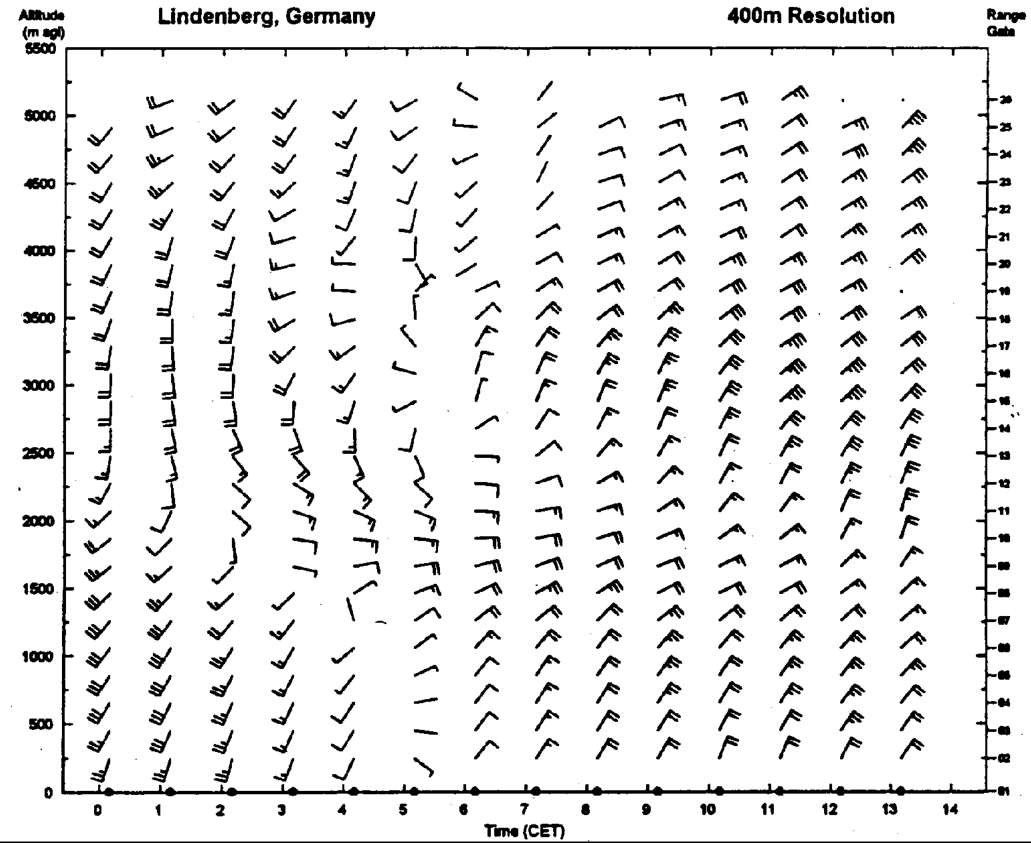
КФ и атмосферные фронты

Атмосферный фронт (контактный разрыв в газовой динамике – рвутся температура, плотность и касательный компонент ветра, а давление и нормальный компонент - непрерывны) имеет некоторую специфику в метеорологии. В классической газовой динамике он неустойчив. В метеорологии он слабо неустойчив – распадается, но медленно. Причины: диссипативные процессы сглаживают поля, имеется вертикальная стратификация. Характерный наклон фронта к поверхности Земли – около 1°.

В начальных данных для задачи прогноза фронты прослеживаются пока неважно. Тем более, их трудно выявить в результатах прогноза. Заглаживание фронтов – результат недостаточности наблюдений + сглаживание при интерполяции: используются данные с другой стороны фронта. Предложено использовать разные КФ для пары точек с одной стороны от фронта и для точек, разделенных фронтом. Проведенные оценки показали действительное различие этих «раздельных» КФ. КФ «через фронт» убывает быстрее с расстоянием – внутри одной воздушной массы корреляции сильнее.

Пример динамики реального фронта

Поле горизонтального ветра, при прохождении атмосферного фронта, измеренного профайлером (Линденберг, Германия). Высота до 5 км (25 уровней), период – 13 часов (ежечасно) Вначале ветер юго-западный, в конце – северо-восточный. Смена направления на разных уровнях происходит в разное время.



Видно, что речь идет не о плоском движении наклонной плоскости. Природа устроена сложнее!

Лапласиан, гессиан и геометрия фронта

Предложение: использовать фронтальный параметр, зависящий от предполагаемого направления $\vec{e}$, ортогональному фронту

$$L_e(x,y)=\vec{e}\begin{pmatrix}\partial_{xx}^2 H(x,y) & \partial_{xy}^2 H(x,y)\\ \partial_{yx}^2 H(x,y) & \partial_{yy}^2 H(x,y)\end{pmatrix}\vec{e}^{\mathrm{T}}$$

Здесь H – геопотенциал – высота барической поверхности.
Второй фронтальный параметр формируется по полю ветра

$$R_e(x,y)=\vec{e}\begin{pmatrix}\partial_y u(x,y) & \frac{1}{2}\left(\partial_y v(x,y)-\partial_x u(x,y)\right)\\ \frac{1}{2}\left(\partial_y v(x,y)-\partial_x u(x,y)\right) & -\partial_x v(x,y)\end{pmatrix}\vec{e}^{\mathrm{T}}$$

Третий фронтальный параметр – модуль производной температуры по направлению $\vec{e}$:

$$G_e(x,y)=\left|\left(\nabla T(x,y),\vec{e}\right)\right|.$$

Какую оптимальную функцию этих трех исходных фронтальных параметров следует выбрать в качестве финального фронтального параметра? **Какой критерий качества?**

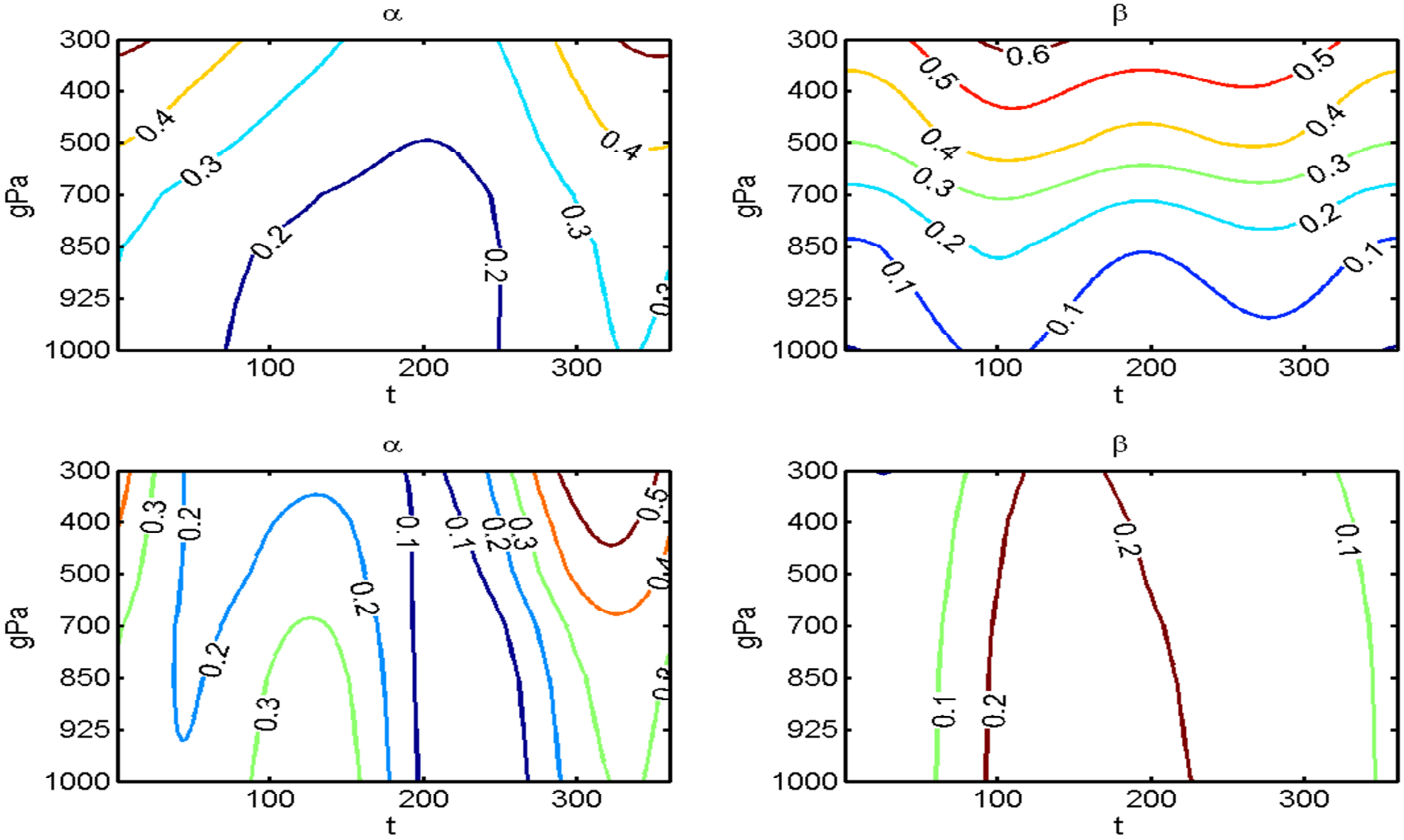
В качестве входных полей используются поля глобального прогноза NCEP с шагом 0,5 ×0,5 или мезомаштабная модель (покрывает Центральную и Восточную Европу до Урала) “COSMO” (Consortium for Small scale Modeling) с шагом 7 км.
Во всех случаях для аппроксимации производных используются схемы высокого порядка аппроксимации (специальная версия двумерного пр. Фурье для сферы и компактные разностные схемы для ограниченной территории).

Алгоритм проведения фронта

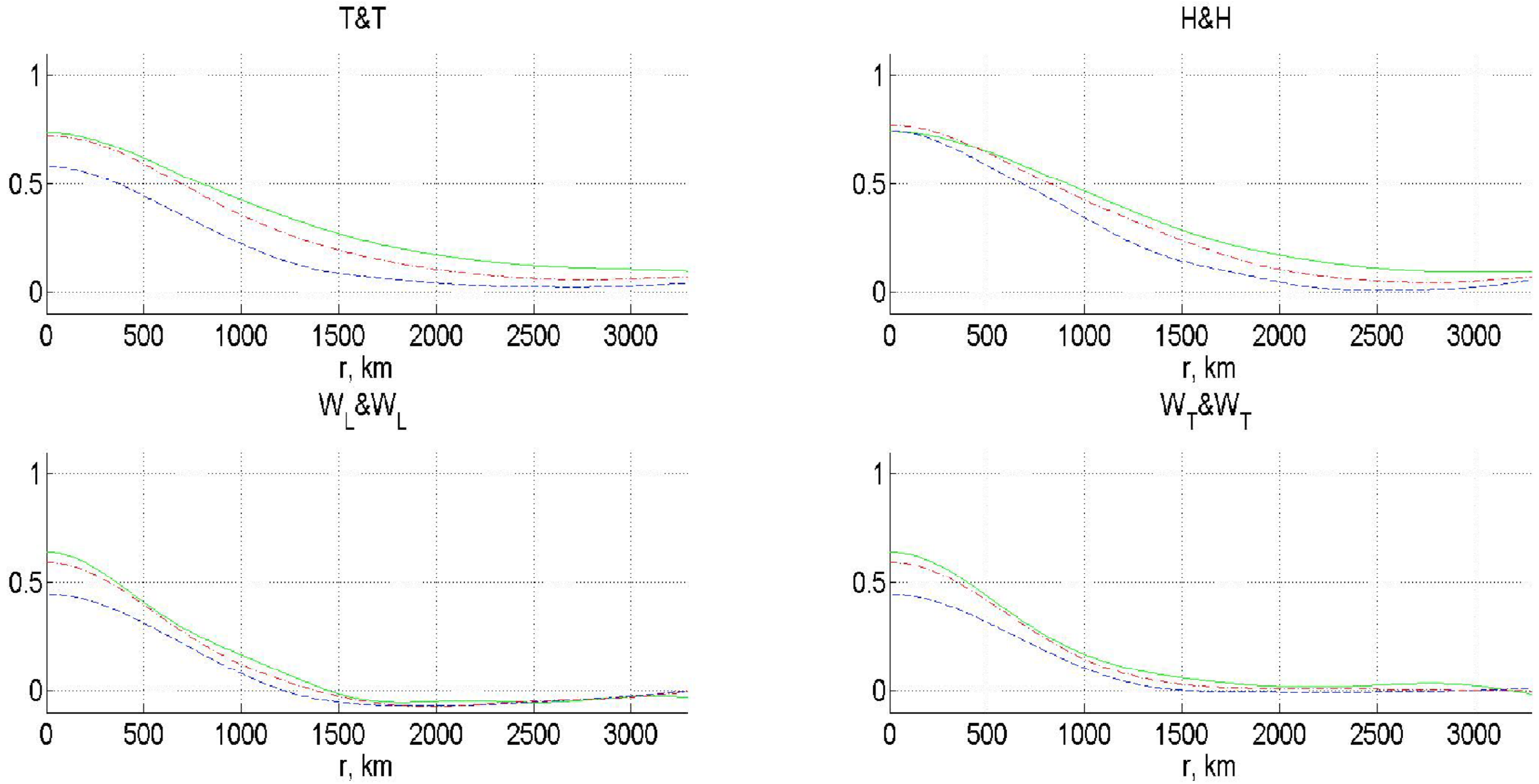
Пусть $\alpha(t,p)$ и $\beta(t,p)$ - константы, которые мы будет в дальнейшем менять.
Финальный предиктор сформируем как

$$P_e = \alpha(t,p)\chi\left(2\overline{L}_e - 1\right) + \beta(t,p)\chi\left(2\overline{R}_e - 1\right) + \left(1 - \alpha(t,p) - \beta(t,p)\right)\overline{G}_e$$

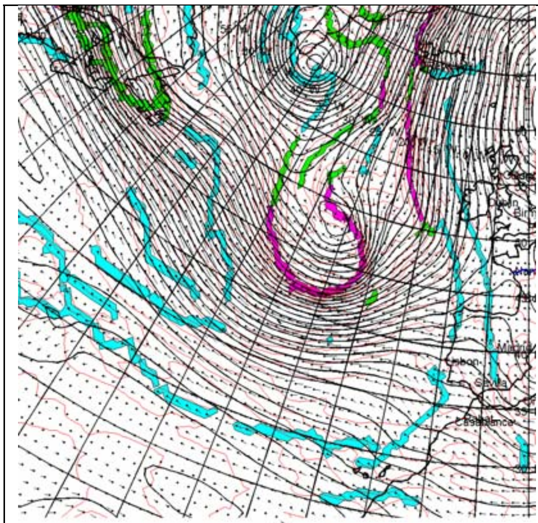
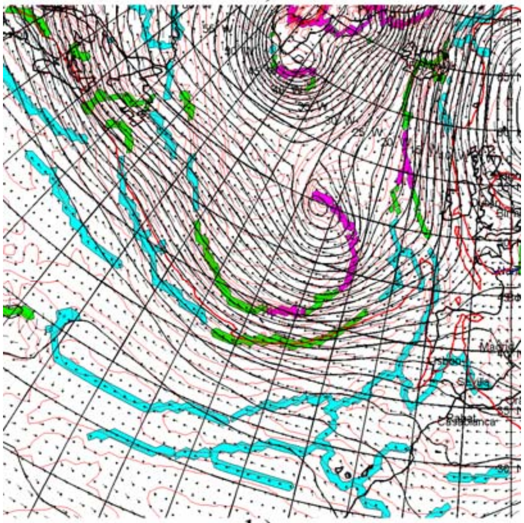
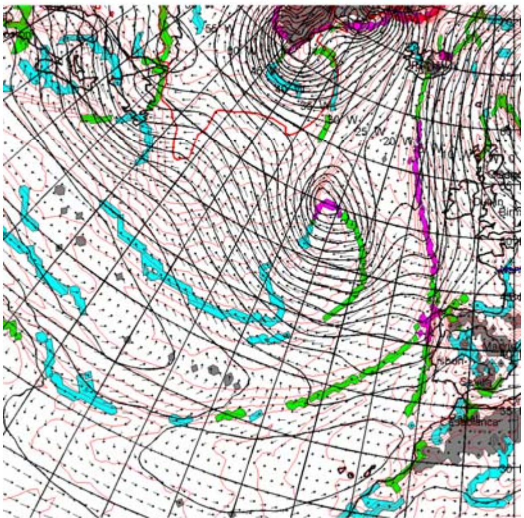
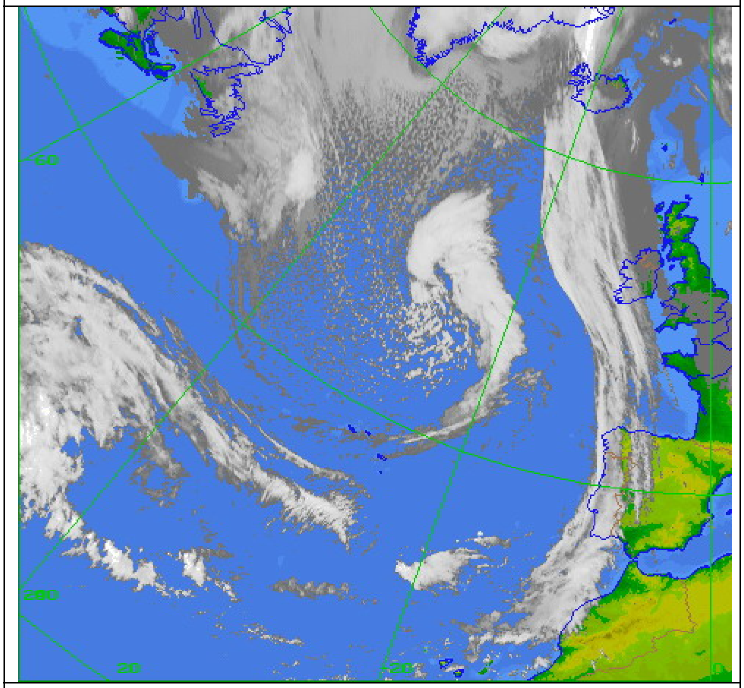
Проводим фронт в таком направлении $\vec{e}^{\perp}$, чтобы для ортогонального ему вектора $\vec{e}$ достигался локальный максимум P_e, при условии, что этот локальный максимум больше некоторой константы. В противном случае фронт считаем слишком слабым.



Изолинии оптимальных функции $\alpha(t,\ln p)$, $\beta(t,\ln p)$, участвующие в формировании финального предиктора фронта P_f (первая строка) и для предиктора фронтов окклюзии P_o (вторая строка).



КФ для основных атмосферных полей геопотенциала, температуры и ветра на уровне 400 гПа для оптимально подобранной функции предварительных фронтальных параметров. Здесь зеленые линии отвечают парам точек в общей синоптической массе воздуха; синие линии – парам точек, разделенных линией фронта, красные линии – объединение обоих подмножеств пар. Статистика включает А) 349659 и В) 284177 пар точек (наблюдений) за период 2009-2011.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">
a)

b)

c)</td>
<td>Фрагмент метеорологической карты с атмосферными фронтами (жирная красная линия –сильный фронт, зеленая – средний, синяя – слабый) для барических уровней a) 500, b) 700, и c) 950 гПа за срок 12h, 8 ноября 2011. Исходные поля метеоэлементов получены из прогностической модели NCEP. Исходные данные для 12-часового прогноза относятся к моменту 00h, 8 ноября 2011. Тонкие красные линии – изотермы, черные – изогипсы (изолинии геопотенциала). Отрезки показывают направление и величину ветра (масштаб приведен в левом нижнем углу картинок). Серая область на нижней картинке – Гренландия, где уровень 950гПа находится под землей</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Фрагмент фотографии со спутника (METEOSAT-8; 12h.

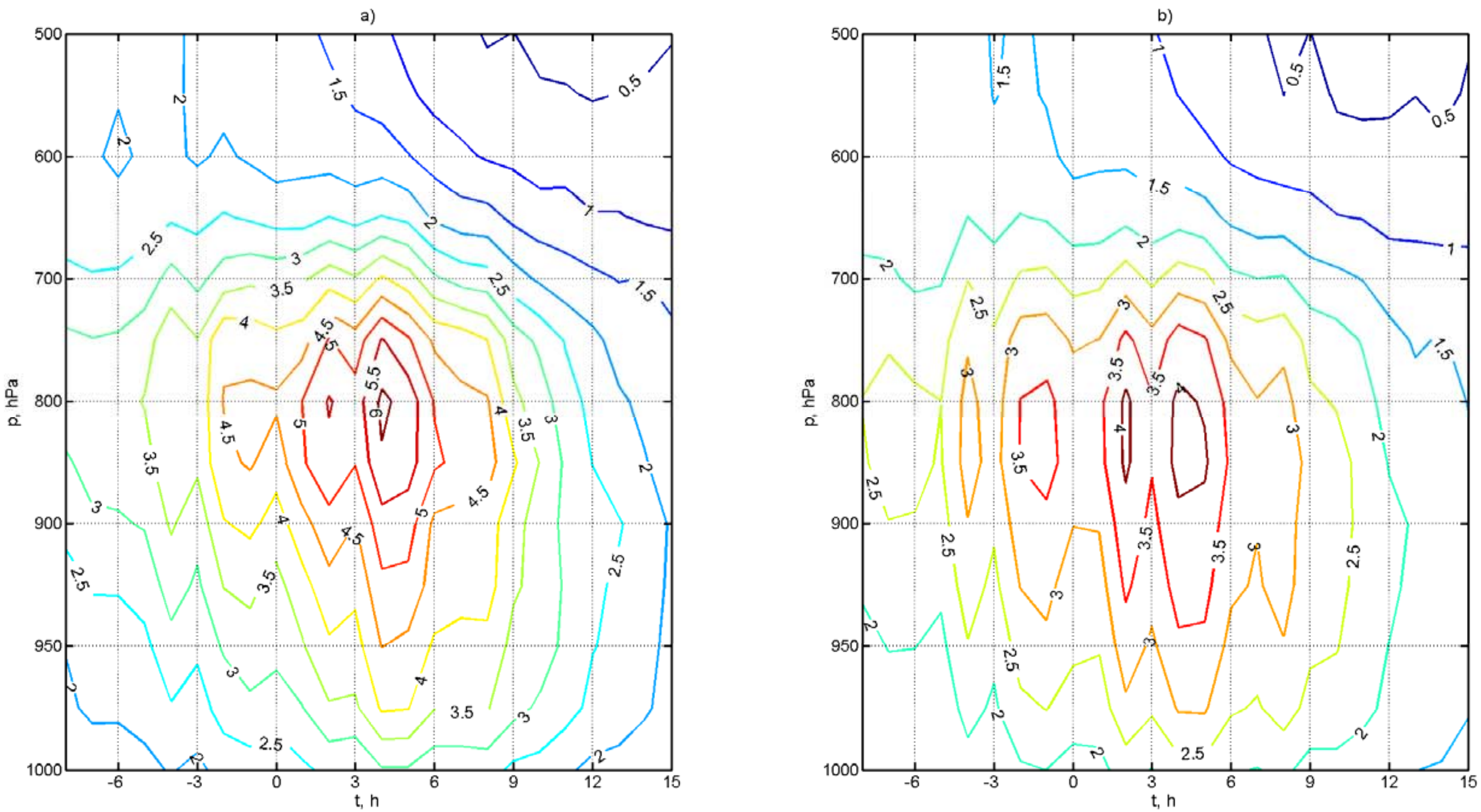
8 ноября 2011)</td>
</tr>
</table>

Атмосферные фронты и осадки

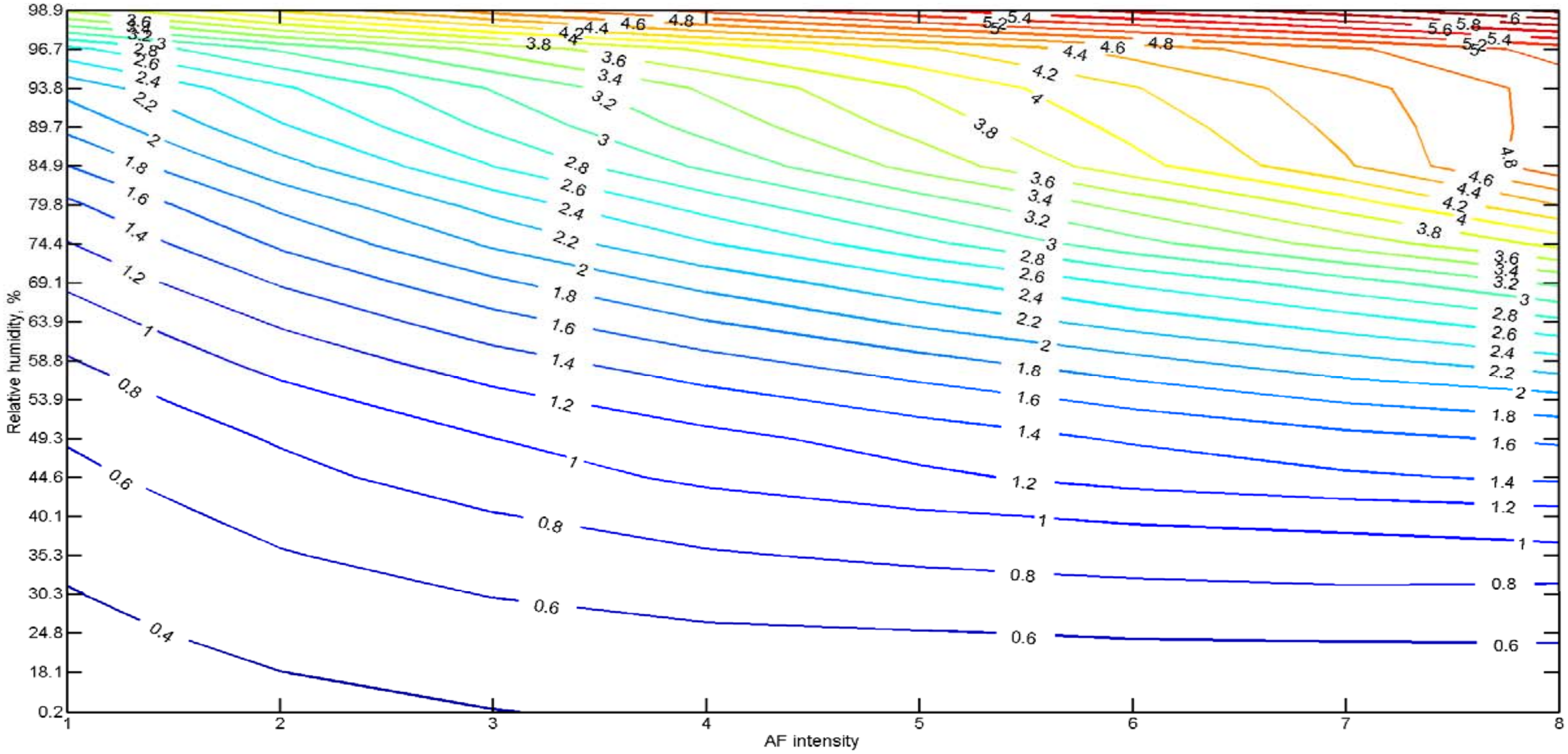
Прогноз атмосферных осадков значительно сложнее, чем прогноз температуры и даже ветра. Это важнейший для потребителя параметр, особенно, когда речь идет о сильных осадках. Известно, что прохождение фронта часто связано с выпадением осадков. Какова статистическая связь между этими двумя явлениями?

По осадкам мы используем глобальное (вне полярных областей) поле осадков с шагом $0.045^{\circ} \times 0.045^{\circ}$. Изготовитель данных - NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). Опубликованы они на сервере ftp://ftp.star.nesdis.noaa.gov/pub/smcd/emb/f_f/hydroest/world/world/.

Использовалось около 40.7 млн таких числовых данных об осадках за 1 час за марты 2010-2012гг, которые осреднялись на квадратики $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$. Средние величины по ансамблю: вероятность осадков более чем 0,5мм/час составляет 7,12%; средняя величина интенсивности осадков 0,144 мм/час.



А) Вероятность осадков; Б) интенсивность осадков в зависимости от времени прохождения фронта (нуль на оси абсцисс). Перед фронтом (за 2 и за 4 часа) на уровне 800гПа вероятность возрастает в 6 раз по сравнению со средней, а интенсивность в 4.



Интенсивность осадков за 6 часов (нормированная) после прохождения фронта в зависимости от интенсивности фронта (по горизонтали) и от относительной влажности (по вертикали). Интенсивность 1 здесь соответствует 0.866 mm/6h.

Библиография

Н.Е.Кочин: Собрание сочинений, т.1, М., АН СССР, 1949 (Прямолинейный фронт, частичный анализ устойчивости).

В.А.Гордин: Как это посчитать? М., МЦНМО, 2005. (Компактные схемы, оценки корреляционных функций).

О.А.Алдухов, В.А.Гордин: Трехмерные корреляционные функции основных аэрологических величин. Изв. РАН., сер. ``Физика атмосферы и океана'', 2001, 37(1), стр.3-23. (Оценка коррреляц. функций)

О.А.Алдухов, В.А.Гордин: Оценки анизотропии корреляционной структуры полей метеорологических величин по наблюдениям глобальной аэрологической сети. Изв. РАН., сер. ``Физика атмосферы и океана'', 2005, 41(3), стр.399-409 (Оценка коррреляц. функций).

В.А.Гордин: Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. ФИЗМАТЛИТ, 2010, 2013. (Компактные схемы, оценки корреляционных функций).

В.А.Гордин. Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и времени. Часть 1 Квант, 2010. № 3. С. 2—8. Часть 2 № 4. С. 11—18.

О.А.Алдухов, Ф.Л.Быков, В.А.Гордин. Крупномасштабные трехмерные корреляционные функции для атмосферы Земли. Ярославский педагогический вестник, 2011. № 4. С. 36—43

Ф.Л.Быков, В.А.Гордин. Трехмерный объективный анализ структуры атмосферных фронтов. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2012. № 48(2). С. 172—188

Ф.Л.Быков, В.А.Гордин. Атмосферыне фронты и осадки. Тр.Гидрометцентра РФ, 2012, С.184-194.