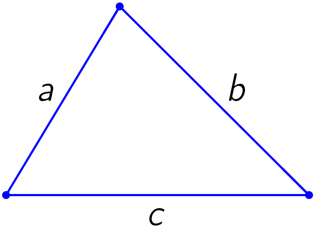
Обобщение теоремы Сабитова на случай многогранников произвольной размерности

А.А. Гайфуллин

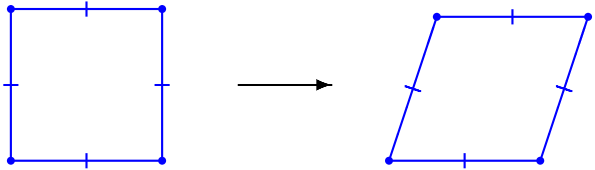
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Санкт-Петербург, ПОМИ РАН,
14 февраля 2013 г.



$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Нет формулы для площади через длины рёбер

Формула Кэли–Менгера

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – n-мерный симплекс с вершинами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и ℓ_{ij} – квадрат длины ребра $[p_i p_j]$.

Определитель Кэли–Менгера:

$$CM(p_0, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01} & \ell_{02} & \cdots & \ell_{0n} \\ 1 & \ell_{01} & 0 & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1n} \\ 1 & \ell_{02} & \ell_{12} & 0 & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{0n} & \ell_{1n} & \ell_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$V^2(\Delta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(p_0, \ldots, p_n).$$

Теорема Сабитова

Теорема (И. Х. Сабитов, 1996)

Для любого многогранника с треугольными гранями в 3-мерном евклидовом пространстве имеется полиномиальное соотношение вида

$$V^{2N} + a_1(\ell)V^{2N-2} + a_2(\ell)V^{2N-4} + \cdots + a_N(\ell) = 0,$$

где V — объём многогранника, ℓ — набор квадратов длин рёбер многогранника, a_j — многочлены от квадратов длин рёбер с рациональными коэффициентами.
Число N и многочлены a_j зависят лишь от комбинаторного типа многогранника.

Следствие

Объём многогранника с заданным комбинаторным типом и заданными длинами рёбер может принимать лишь конечное число значений.

Многомерное обобщение теоремы Сабитова

Теорема (А. Г., 2011 ($n = 4$), 2012 (произвольное n))

Пусть $n \geqslant 3$. Для любого многогранника в n-мерном евклидовом пространстве с треугольными двумерными гранями имеется полиномиальное соотношение вида

$$V^{2N} + a_1(\ell)V^{2N-2} + a_2(\ell)V^{2N-4} + \cdots + a_N(\ell) = 0,$$

где V — объём многогранника, ℓ — набор квадратов длин рёбер многогранника, a_j — многочлены от квадратов длин рёбер с рациональными коэффициентами.
Число N и многочлены a_j зависят лишь от комбинаторного типа многогранника.

Следствие

Объём многогранника с заданным комбинаторным типом и заданными длинами рёбер может принимать лишь конечное число значений.

Уточнение о знаменателях коэффициентов

Уточнение

Пусть $W = 2^{[\frac{n}{2}]} \cdot n! \cdot V$. *Тогда величина* W *удовлетворяет полиномиальному соотношению*

$$W^{2N} + \widetilde{a}_1(\ell) W^{2N-2} + \widetilde{a}_2(\ell) W^{2N-4} + \cdots + \widetilde{a}_N(\ell) = 0,$$

где $\widetilde{a}_j(\ell)$ *— многочлены от квадратов длин рёбер многогранника с целыми коэффициентами.*

- В случае $n = 3$ имеем $W = 12V$. Такое уточнение теоремы Сабитова было получено в работе Р. Коннелли, И. Х. Сабитова и А. Вальц 1997 года.
- Множитель $2^{[\frac{n}{2}]} \cdot n!$ не может быть уменьшен, так как именно такой множитель возникает в формуле Кэли–Менгера для объёма симплекса.

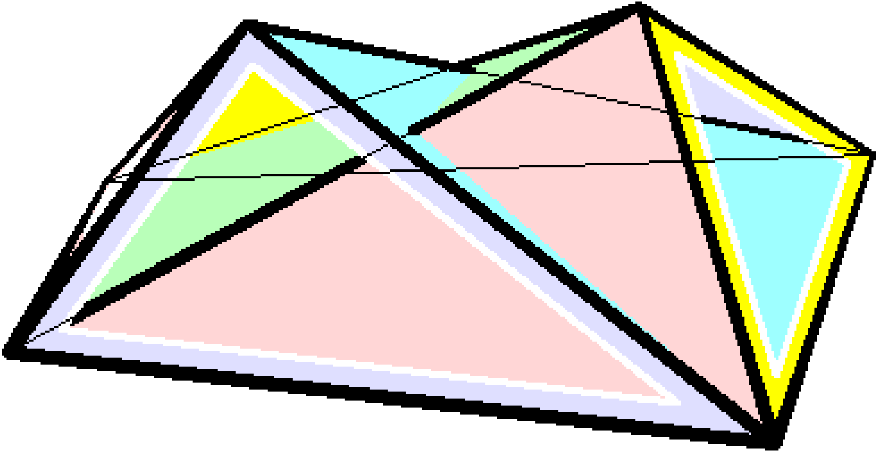
Изгибаемые многогранники

Определение

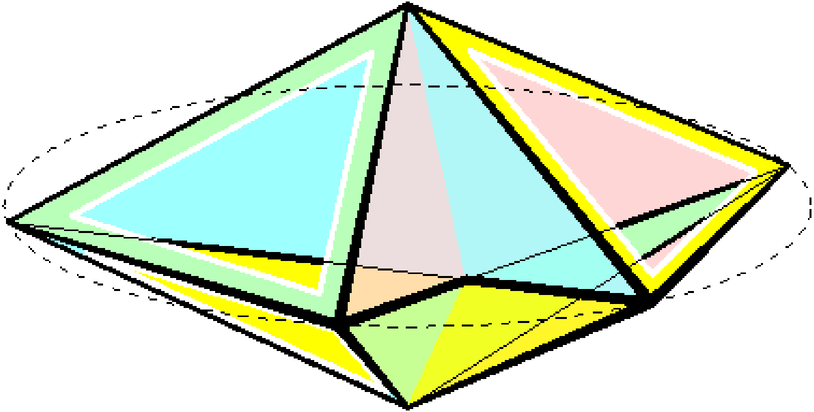
Изгибание многогранника — непрерывное семейство многогранников P_t, $0 \leq t \leq 1$, такое, что все собственные грани P_t остаются конгруэнтными себе в процессе изгибания, но многогранники P_{t_1} и P_{t_2} не конгруэнтны при $t_1 \neq t_2$.

- Р. Коши, 1813: Выпуклые многогранники неизгибаемы.
- Р. Брикар, 1897: Изгибаемые самопересекающиеся октаэдры.
- Р. Коннелли, 1977: Пример вложенного изгибаемого многогранника.
- К. Штеффен, 1978: Простейший из известных вложенных изгибаемых многогранников (9 вершин).
- Х. Глак, 1975, А. Фогельзангер, 1988: Многогранники общего положения неизгибаемы.
- А. Вальц, 1998, Г. Штахель, 2000: Изгибаемые 4-мерные кросс-политопы.
- Неизвестно, существуют ли изгибаемые многогранники в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 5$.

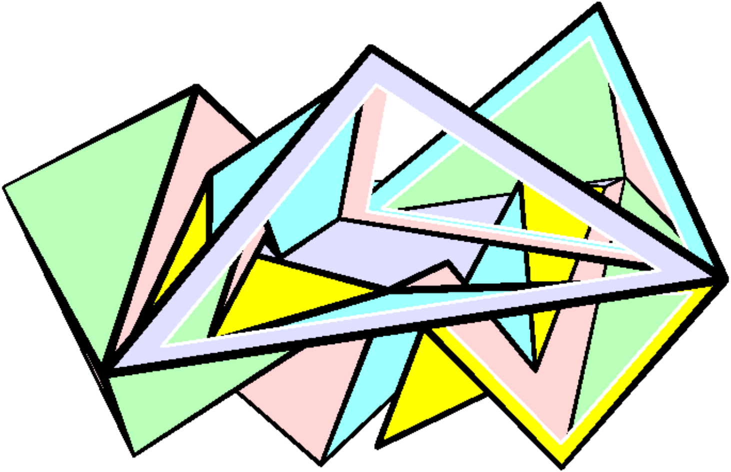
Изгибаемый октаэдр Брикара 1-го типа



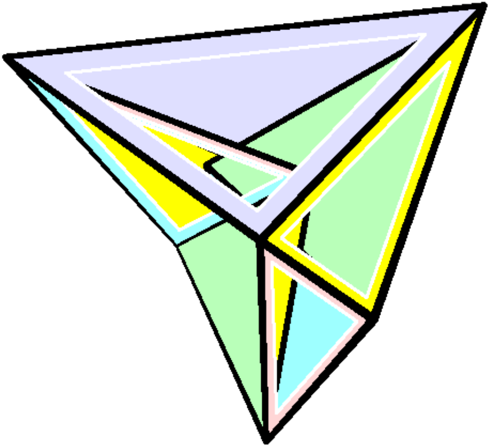
Изгибаемый октаэдр Брикара 2-го типа



Изгибаемый многогранник Коннелли



Изгибаемый многогранник Штеффена



Гипотеза о кузнечных мехах

Гипотеза (Р. Коннелли, 1978)

Объём изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания.

Теорема (И. Х. Сабитов, 1996)

Гипотеза о кузнечных мехах верна в размерности 3.

Теорема (А. Г., 2012)

Гипотеза о кузнечных мехах верна в произвольной размерности $n \geqslant 3$. *Более того, объём многогранника остаётся постоянным даже если многогранник деформируется так, что только его* 2*-мерные грани остаются жёсткими (а грани старших размерностей сами изгибаются).*

В. А. Александров, 1997: пример сферического изгибаемого октаэдра (содержащегося в 3-мерной полусфере), объём которого не постоянен в процессе изгибания.

Конфигурации точек и стержней

Рассмотрим m точек $v_1, \ldots, v_m$ в $\mathbb{R}^n$ и соединим некоторые пары точек жёсткими стержнями. Пусть Γ — граф, описывающий, какие точки мы соединяем, а какие — нет. Рассмотрим набор квадратов длин рёбер стержней ℓ_{ij}, $\{i, j\} \in \Gamma$.

Имеются следующие естественные задачи:

- Описать все полиномиальные соотношения между величинами ℓ_{ij}. В случае, когда Γ — полный граф, то есть каждые две вершины соединены стержнем, ответ был получен К. Менгером в 1928 году: Все полиномиальные соотношения между ℓ_{ij} порождаются соотношениями Кэли–Менгера для всевозможных поднаборов из $n + 2$ точек.

Жёсткость и изгибаемость

- Насколько однозначно длины стержней определяют конфигурацию? Является ли данная конфигурация точек и стержней жёсткой или изгибаемой?
  - Локальная жёсткость: конфигурация не допускает изгибаний.
  - Глобальная жёсткость: конфигурация с данными длинами рёбер единственна с точностью до движений $\mathbb{R}^n$.
  - Универсальная жёсткость: конфигурация с данными длинами рёбер единственна с точностью до движений в любом большем пространстве $\mathbb{R}^q$, $q > n$.

Получено много интересных результатов, в частности, необходимых условий и достаточных условий жёсткости (Р. Коннелли, К. Бездек, У. Уайтели, Б. Рот, С. Гортлер, Д. Тёрстон, А. Хили и др.), но практически все результаты касаются лишь конфигураций общего положения. Однако интересными часто являются именно конфигурации не общего положения. Например, все симплициальные многогранники общего положения неизгибаемы (Х. Глак, А. Фогельзангер).

Сохранение функций изгибаемых конфигураций

- Какие функции изгибаемых конфигураций сохраняются в процессе изгибания?

  Пусть граф Γ изоморфен 1-остову n-мерного многогранника с треугольными двумерными гранями. Тогда такими функциями являются

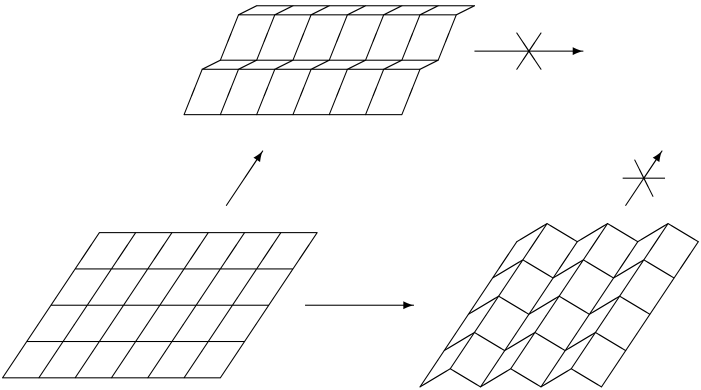
  - Объём многогранника.
  - Средняя кривизна многогранника (Р. Александер, 1985):

    $$M(P) = \frac{1}{2}\sum(\pi - \theta_e)d_e,$$

    где суммирование идёт по всем рёбрам e,
    d_e — длина ребра e,
    θ_e — двугранный угол при ребре e.
  - Какие ещё функции сохраняются при изгибаниях?

Изгибание поверхностей, близких к плоскости

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — полиэдральная поверхность, гомеоморфная плоскости и расположенная «вблизи» горизонтальной плоскости. Может ли она независимо сжиматься в двух направлениях?



Изгибание 2-периодических полиэдральных поверхностей

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — полиэдральная поверхность, гомеоморфная плоскости и инвариантная относительно сдвигов вдоль двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Разрешим изгибать поверхность S так, чтобы она оставалась 2-периодической и её векторы периодов менялись непрерывно. С точностью до поворотов пара векторов периодов характеризуется своей матрицей Грама $G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Может ли матрица Грама $G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов периодов изгибаемой поверхности S иметь две степени свободы?

Теорема (А. Г., С. Гайфуллин, 2013)

Множество матриц Грама $\widetilde{G}$ векторов периодов поверхностей $\widetilde{S}$, получаемых изгибанием данной 2-периодической поверхности S, гомеоморфной плоскости, содержится в некотором вещественном 1-мерном аффинном алгебраическом многообразии.

Изгибание 2-периодических полиэдральных поверхностей

Отметим, что эта теорема не ограничивает числа степеней свободы самой изгибаемой поверхности S.