Уравнения космологической эволюции: зачем и как их решать?

А. Соболевский

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Российско-французская математическая лаборатория им. Ж.-В. Понселе
(проект OTARIE, `http://www.mccme.ru/~ansobol/otarie/`)

Математический кружок ФУПМ МФТИ, 2 апреля 2013 г.

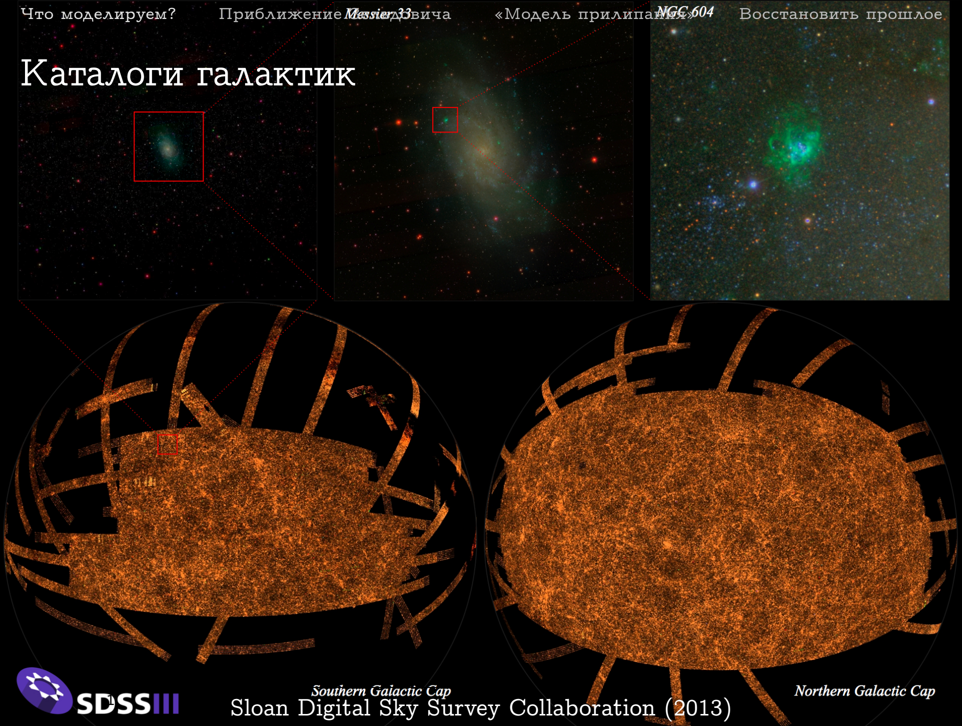
Что мы моделируем?

Нелинейная гравитационная неустойчивость,
приближение Зельдовича и каустики

«Модель прилипания»
и динамика внутри сингулярных многообразий

Реконструкция ранней Вселенной
как задача выпуклой оптимизации

Каталоги галактик



Sloan Digital Sky Survey Collaboration (2013)

Состав наблюдаемой Вселенной в модели ΛCDM

5%: барионная материя

- подвижный светящийся «маркер» распределения масс

25%: темная материя (Cold Dark Matter)

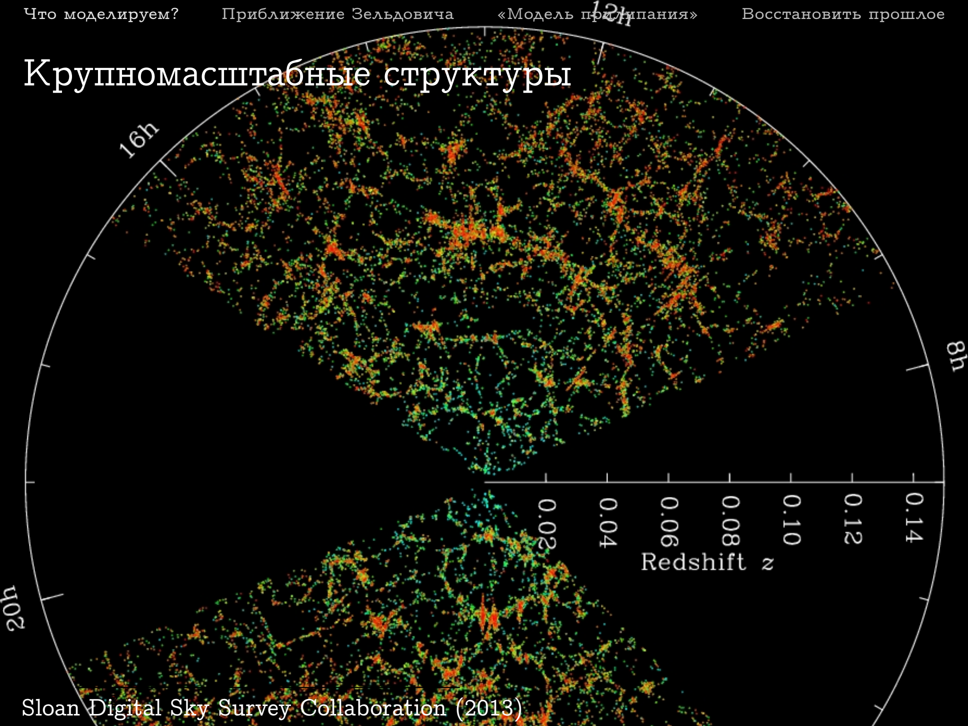
- подвижная, нерелятивистская (cold), не взаимодействует с излучением (dark)

70%: темная энергия

- «Λ-член» Эйнштейна: не участвует в движении материи, но ускоряет расширение Вселенной

Крупномасштабное распределение массы
образовано темной материей
и наблюдаемо благодаря погруженным в него галактикам.

Крупномасштабные структуры



Sloan Digital Sky Survey Collaboration (2013)

Предыстория наблюдаемой Вселенной

?: исходная сингулярность

- от квантовой гравитации к КТП + ОТО
- инфляционное расширение в 10^{26} раз
- нарушение симметрии кварков/антикварков

10^{-32} с: конец фазы инфляции

- кварк-глюонная плазма

1–10 с: кварки объединяются в адроны и лептоны

- аннигиляция антивещества
- излучение доминирует по энергии

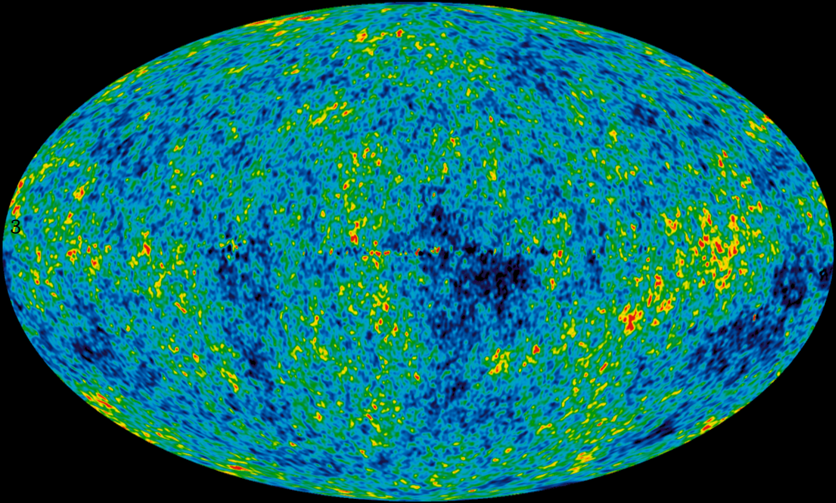
3–20 мин: протоны и нейтроны объединяются в ядра

$7 \cdot 10^4$ лет: материя догоняет излучение по энергии

$3{,}8 \cdot 10^5$ лет: рекомбинация ядер и электронов

- излучение отделяется от материи

После рекомбинации: реликтовое излучение



Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Team (2012)

После рекомбинации: гравитационная неустойчивость

M.White, http://astro.berkeley.edu/~mwhite/growthofstructure.html

Прямое численное моделирование космологической эволюции

Millennium Run:

- $N = 2160^3 \approx 10^{10}$ частиц
- масса частицы $9 \cdot 10^8\ M_\odot$
- $500 \times 500 \times 500$ Мпк
- периодические краевые условия
- феноменологические модели образования звезд и пр. в областях высокой плотности

4

---

[4] V. Springel et al (2005)

Уравнения Эйлера–Пуассона в абсолютном пространстве

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = 0$$ сохранение массы

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = -\nabla \phi$$ уравнение Эйлера

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \sigma$$ уравнение Пуассона

$\sigma(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$: плотность и скорость в точке $(t, \boldsymbol{r})$

- Статического решения ($\sigma = \text{const}$, $\boldsymbol{v} = 0$) не существует

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = 0; \qquad \dot{\sigma} + 3H\sigma = 0;$$

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = 0; \qquad \dot{\sigma} + 3H\sigma = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = -\nabla\phi; \quad (\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} = -\nabla\phi;$$

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = 0; \qquad \dot{\sigma} + 3H\sigma = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = -\nabla\phi; \qquad (\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} = -\nabla\phi;$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\sigma; \qquad 3(\dot{H} + H^2) = -4\pi G\sigma$$

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{v}) = 0; \qquad \dot{\sigma} + 3H\sigma = 0;$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\nabla\phi; \qquad (\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} = -\nabla\phi;$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\sigma; \qquad 3(\dot{H} + H^2) = -4\pi G\sigma$$

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\dot{\sigma} + 3H\sigma = 0;$$

$$(\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} = -\nabla\phi;$$

$$3(\dot{H} + H^2) = -4\pi G\sigma$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = H(t)\boldsymbol{r}: \quad \boldsymbol{r} = a(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{v} = \dot{a}\boldsymbol{x} = \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{r}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$a(t)$: масштабный множитель, $a(\bar{t}) = \bar{a}$

$\boldsymbol{x}$: вектор сопутствующих координат

Хаббловское расширение
Уравнения Фридмана

$\sigma = \sigma(t), \quad \boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r}$ однородность + изотропия

$H(t)$: параметр («постоянная») Хаббла

$$\dot\sigma + 3H\sigma = 0; \qquad \sigma(t) = \frac{\bar\sigma}{(a/\bar a)^3}$$

$$(\dot H + H^2)\boldsymbol{r} = -\nabla\phi;$$

$$3(\dot H + H^2) = -4\pi G\sigma; \quad 3\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G\bar\sigma}{(a/\bar a)^3}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = H(t)\boldsymbol{r}: \quad \boldsymbol{r} = a(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{v} = \dot a\boldsymbol{x} = \frac{\dot a}{a}\boldsymbol{r}, \quad H = \frac{\dot a}{a}$$

$a(t)$: масштабный множитель, $a(\bar t) = \bar a$

$\boldsymbol{x}$: вектор сопутствующих координат

Расширение плоской вселенной

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a}$$

Расширение плоской вселенной

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a}$$

плоская вселенная: $\dot{a}^2 = \dfrac{8\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3a}$ или $\dfrac{\dot{a}^2}{a^2} = \dfrac{8\pi G\bar{\sigma}}{3}\dfrac{\bar{a}^3}{a^3}$

Расширение плоской вселенной

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a}$$

плоская вселенная: $\dot{a}^2 = \dfrac{8\pi G\bar{\sigma}\bar{a}^3}{3a}$ или $\dfrac{\dot{a}^2}{a^2} = \dfrac{8\pi G\bar{\sigma}}{3}\dfrac{\bar{a}^3}{a^3}$

критическая плотность: $\bar{\sigma} = \dfrac{3\bar{H}^2}{8\pi G}$, где $\bar{H} = \dfrac{\dot{a}(\bar{t})}{a(\bar{t})}$

масштабный множитель: $a(t) = \bar{a}\left(\dfrac{t}{\bar{t}}\right)^{2/3}$

параметр Хаббла: $H(t) = \dfrac{\dot{a}}{a} = \dfrac{2}{3t}$

Уравнения Эйлера–Пуассона в сопутствующих координатах

Переход к сопутствующим координатам $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}/a$:

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}\rho, \quad \boldsymbol{v} = H\boldsymbol{r} + a\boldsymbol{u}, \quad \nabla\phi = -(\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} + a\nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi},$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{u} = -2H\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi}$$

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}(\rho - 1)$$

Уравнения Эйлера–Пуассона в сопутствующих координатах

Переход к сопутствующим координатам $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}/a$:

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}\rho, \quad \boldsymbol{v} = H\boldsymbol{r} + a\boldsymbol{u}, \quad \nabla\phi = -(\dot{H} + H^2)\boldsymbol{r} + a\nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi},$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$ $\quad \rho = 1 + \tau$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{u} = -2H\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi} \qquad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -2H\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\tilde{\phi} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}(\rho - 1) \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi}) = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}\,\tau$$

Уравнения Эйлера–Пуассона в сопутствующих координатах

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\tau}{\partial t} - \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \sim t^{2/3} \sim a \text{ или } \tau \sim t^{-1}$$

где $\rho = \rho(x,t)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t)$, $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(x,t)$ $\quad \rho = 1 + \tau$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{u} = -2H\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi} \qquad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -2H\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi}$$

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi} = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}(\rho - 1) \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{x}}\tilde{\phi}) = \frac{4\pi G\bar{\sigma}\,\bar{a}^3}{a^3}\,\tau$$

Уравнения Эйлера–Пуассона в переменных (x, τ)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = -\frac{3}{2\tau}(\boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi = \frac{\rho - 1}{\tau}$$

условия согласованности при $\tau = 0$: $\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \phi, \quad \rho = 1$

Лагранжевы переменные и приближение Зельдовича

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = -\frac{3}{2\tau}(\boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi) \qquad D_\tau^2 \boldsymbol{x} = \frac{3}{2\tau}(D_\tau \boldsymbol{x} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi = \frac{\rho - 1}{\tau} \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi = \frac{1}{\tau}(|\det \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{q}|^{-1} - 1)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau), \quad D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})$$

$$\rho = |\det \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}|^{-1}, \quad \boldsymbol{u} = D_\tau \boldsymbol{x}$$

Лагранжевы переменные и приближение Зельдовича

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = -\frac{3}{2\tau}(\boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi) \qquad D_\tau^2 \boldsymbol{x} = \frac{3}{2\tau}(D_\tau \boldsymbol{x} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi = \frac{\rho - 1}{\tau} \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi = \frac{1}{\tau}(|\det \partial \boldsymbol{x} / \partial \boldsymbol{q}|^{-1} - 1)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau), \quad D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})$$

$$\rho = |\det \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}}|^{-1}, \quad \boldsymbol{u} = D_\tau \boldsymbol{x}$$

приближение Зельдовича: $D_\tau^2 \boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau) = \boldsymbol{q} + \tau \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, 0)$

Приближение Зельдовича в одномерном случае

Представим $x(q,\tau) = q + \xi(q,\tau)$

$$D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - 1\right) \quad \left| \frac{\partial x}{\partial q} \right.$$

Приближение Зельдовича в одномерном случае

Представим $x(q,\tau) = q + \xi(q,\tau)$

$$D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - 1\right) \quad \Big| \frac{\partial x}{\partial q} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\partial x}{\partial q}\right)$$

Приближение Зельдовича в одномерном случае

Представим $x(q,\tau) = q + \xi(q,\tau)$

$$D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - 1\right) \quad \Big| \frac{\partial x}{\partial q} \qquad\qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q - x}{\tau}$$

Приближение Зельдовича в одномерном случае

Представим $x(q,\tau) = q + \xi(q,\tau)$

$$D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \qquad D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi - \frac{\xi}{\tau}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - 1\right) \quad \Big| \frac{\partial x}{\partial q} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q - x}{\tau}$$

Приближение Зельдовича в одномерном случае

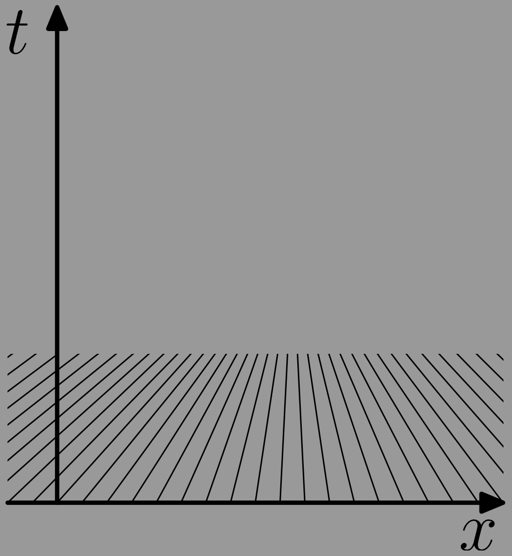
Представим $x(q,\tau) = q + \xi(q,\tau)$

$$D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \qquad D_\tau^2 \xi = \frac{3}{2\tau}\left(D_\tau \xi - \frac{\xi}{\tau}\right)$$

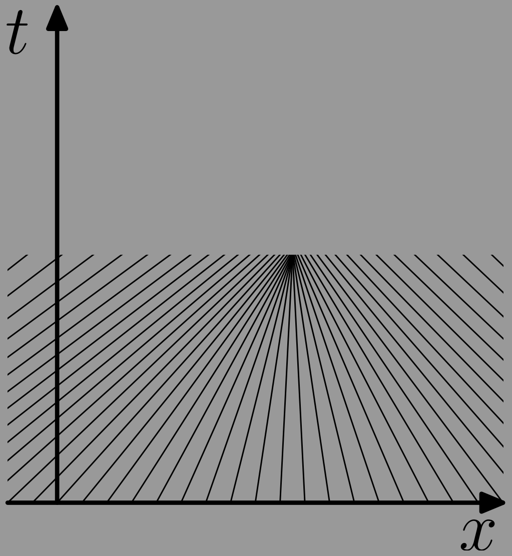
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - 1\right) \quad \Big| \frac{\partial x}{\partial q} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q - x}{\tau}$$

Точное регулярное при $\tau = 0$ решение $\xi(q,\tau) = u_0(q)\tau$

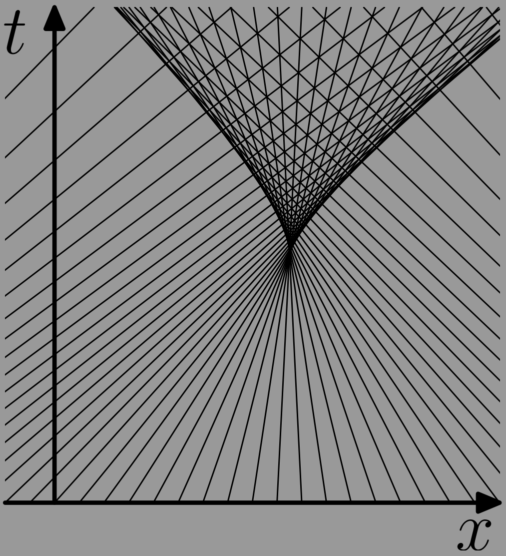
Каустики в приближении Зельдовича



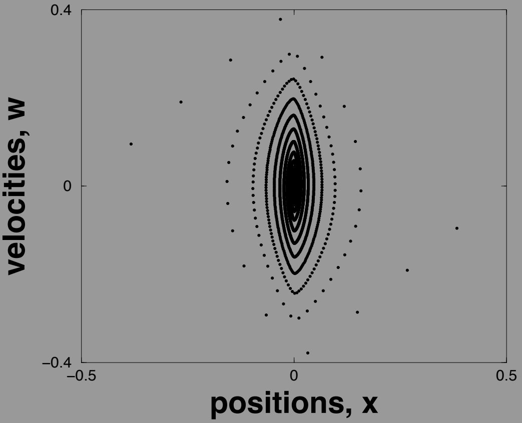
Каустики в приближении Зельдовича



Каустики в приближении Зельдовича

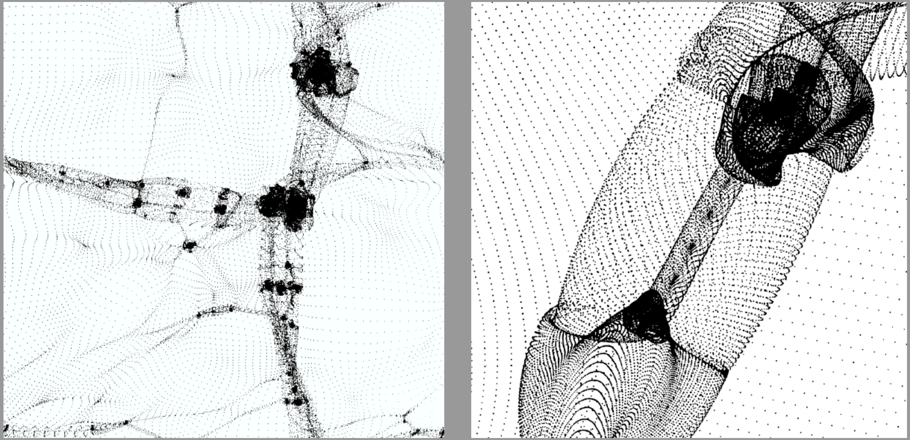


Каустики в прямом численном моделировании ($d = 1$)



D. Fanelli and E. Aurell (2002)

Каустики в прямом численном моделировании ($d = 2$)



A.L. Melott & S. Shandarin (1989)

Каустики в прямом численном моделировании ($d = 3$)

V. Springel et al (2005)

Уравнения Власова–Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^{3/2}}\,(\boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})f - \frac{3\tau^{3/2}}{2}\,(\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}})f = 0$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\phi = \frac{1}{\tau}\left(\int f\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} - 1\right)$$

монокинетические решения:

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \rho(\tau,\boldsymbol{q})\,\delta(\boldsymbol{p}-\tau^{3/2}\boldsymbol{v}(\tau,\boldsymbol{q}))$$

Что мы моделируем?

Нелинейная гравитационная неустойчивость,
приближение Зельдовича и каустики

«Модель прилипания»
и динамика внутри сингулярных многообразий

Реконструкция ранней Вселенной
как задача выпуклой оптимизации

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = 0$$

приближение Зельдовича

$$\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = \epsilon \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{u}, \quad \epsilon \downarrow 0$$

S. Gurbatov et al (1984, 1989)

$$\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = \epsilon \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{u}, \quad \epsilon \downarrow 0$$

S. Gurbatov et al (1984, 1989)

$$\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left| \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi \right|^2 = \epsilon \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi, \qquad \epsilon \downarrow 0$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{u} = \epsilon \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{u}, \quad \epsilon \downarrow 0$$

S. Gurbatov et al (1984, 1989)

$$\boldsymbol{u} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} |\nabla_{\boldsymbol{x}} \phi|^2 = \epsilon \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \phi, \qquad \epsilon \downarrow 0$$

$$D_\tau \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \leq \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (u \cdot \nabla_x)\, u = \epsilon \nabla_x^2 u, \quad \epsilon \downarrow 0$$ S. Gurbatov et al (1984, 1989)

$$u = \nabla_x \phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi, \qquad \epsilon \downarrow 0$$

$$D_\tau \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_x \phi = v \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 \leq \frac{1}{2}|v|^2$$

$$\phi(x, \tau) = \min_{x(\cdot)\colon x(\tau) = x} \left(\phi(x(0), 0) + \int_0^\tau \frac{1}{2}|\dot{x}(s)|^2 \, \mathrm{d}s \right) \qquad \text{(действие)}$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (u \cdot \nabla_x)\, u = \epsilon \nabla_x^2 u, \quad \epsilon \downarrow 0$$

S. Gurbatov et al (1984, 1989)

$$u = \nabla_x \phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi, \qquad \epsilon \downarrow 0$$

$$D_\tau \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_x \phi = v \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 \le \frac{1}{2}|v|^2$$

$$\phi(x, \tau) = \min_q \left(\phi(q, 0) + \frac{1}{2\tau}|x - q|^2 \right)$$

Модель прилипания и принцип наименьшего действия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (u \cdot \nabla_x)\, u = \epsilon \nabla_x^2 u, \quad \epsilon \downarrow 0$$

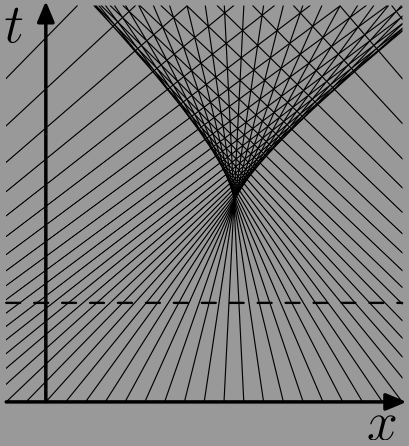
S. Gurbatov et al (1984, 1989)

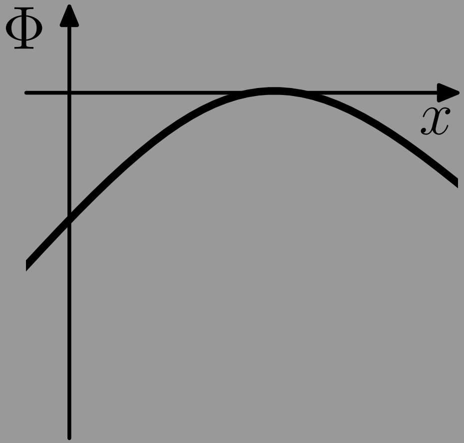
$$u = \nabla_x \phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi, \qquad \epsilon \downarrow 0$$

$$D_\tau \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_x \phi = v \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 \leq \frac{1}{2}|v|^2$$

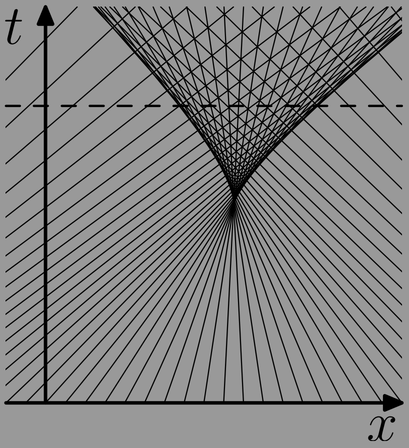
$$\phi(x, \tau) = \frac{1}{2\tau}|x|^2 - \frac{1}{\tau} \max_q \left[q \cdot x - \left(\frac{1}{2}|q|^2 + \tau \phi(q, 0) \right) \right]$$

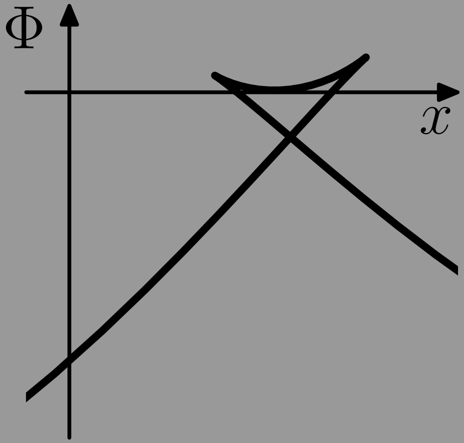
Модель прилипания и принцип наименьшего действия



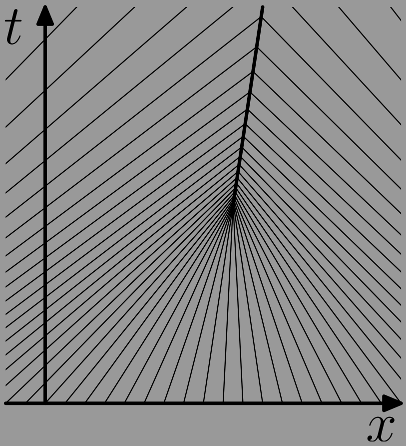


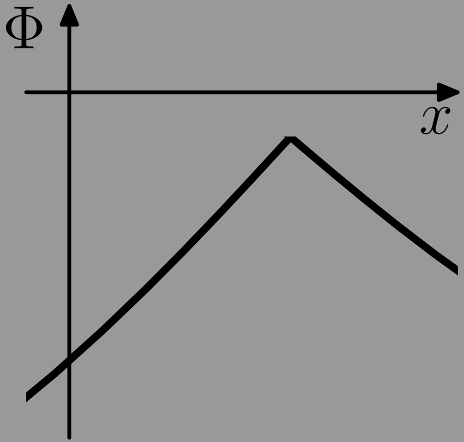
Модель прилипания
и принцип наименьшего действия





Модель прилипания и принцип наименьшего действия





Сингулярные многообразия в решениях модели прилипания

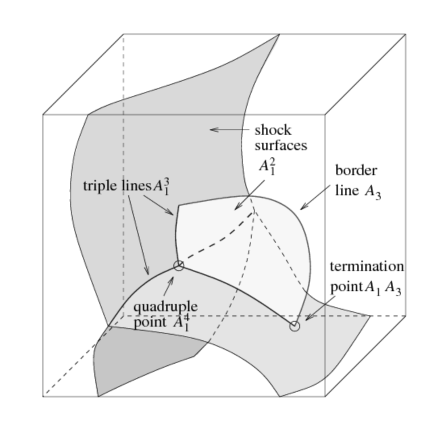


Схема из J. Bec and K. Khanin (2007)

Динамика внутри сингулярных многообразий

Обрываются ли траектории частиц, попавших на сингулярное многообразие?

$$\frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi^\epsilon|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi^\epsilon, \qquad \epsilon > 0$$

$$\dot{x}^\epsilon(\tau) = u^\epsilon(x^\epsilon, \tau) = \nabla_x \phi^\epsilon(x^\epsilon, \tau); \qquad x(\tau) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} x^\epsilon(\tau)$$

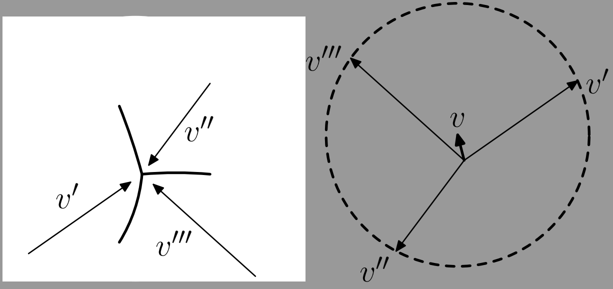
Динамика внутри сингулярных многообразий

Обрываются ли траектории частиц, попавших на сингулярное многообразие?

$$\frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi^\epsilon|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi^\epsilon, \qquad \epsilon > 0$$

$$\dot{x}^\epsilon(\tau) = u^\epsilon(x^\epsilon, \tau) = \nabla_x \phi^\epsilon(x^\epsilon, \tau); \qquad x(\tau) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} x^\epsilon(\tau)$$

Богаевский, arXiv:math-ph/0407073:



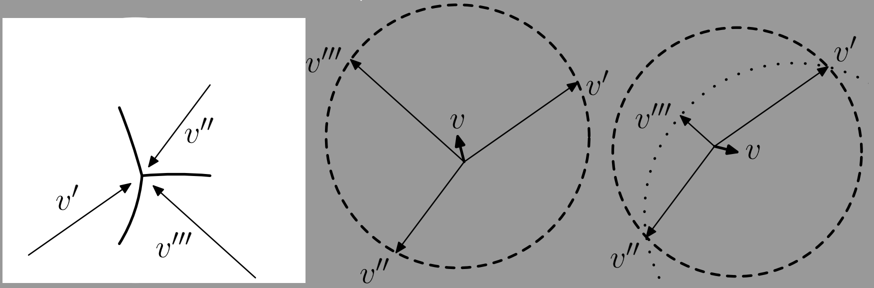
Динамика внутри сингулярных многообразий

Обрываются ли траектории частиц, попавших на сингулярное многообразие?

$$\frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi^\epsilon|^2 = \epsilon \nabla_x^2 \phi^\epsilon, \qquad \epsilon > 0$$

$$\dot{x}^\epsilon(\tau) = u^\epsilon(x^\epsilon, \tau) = \nabla_x \phi^\epsilon(x^\epsilon, \tau); \qquad x(\tau) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} x^\epsilon(\tau)$$

Богаевский, arXiv:math-ph/0407073:



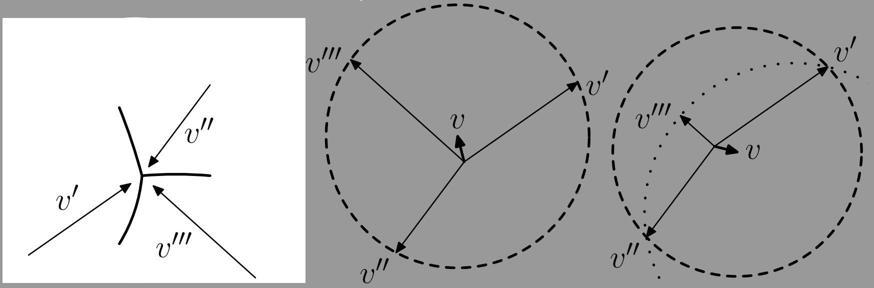
Динамика внутри сингулярных многообразий

Обрываются ли траектории частиц, попавших на сингулярное многообразие?

$$\frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{2}|\nabla_{\boldsymbol{x}} \phi^\epsilon|^2 = \epsilon \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \phi^\epsilon, \qquad \epsilon > 0$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^\epsilon(\tau) = \boldsymbol{u}^\epsilon(\boldsymbol{x}^\epsilon, \tau) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi^\epsilon(\boldsymbol{x}^\epsilon, \tau); \qquad \boldsymbol{x}(\tau) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \boldsymbol{x}^\epsilon(\tau)$$

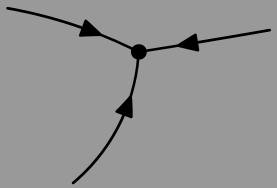
Богаевский, arXiv:math-ph/0407073:



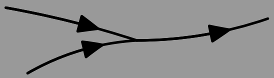
Cannarsa and Yu (2009); A.S. and K. Khanin (2010) обобщение на произвольный выпуклый гамильтониан

Удерживающие и неудерживающие узлы сингулярностей

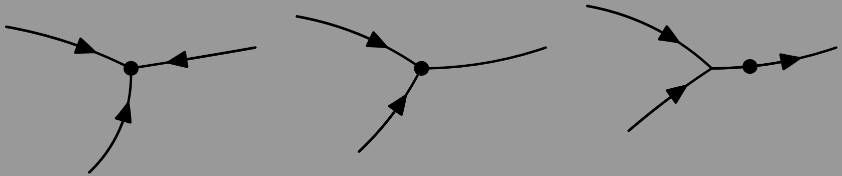
- удерживающий узел:



- неудерживающий узел:



- формирование и отрыв кластера:



Богаевский, arXiv:math-ph/0407073

Модель прилипания с сохранением импульса

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\boldsymbol{u}) = 0 \quad \Big|\ \boldsymbol{u} \qquad\qquad \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u} = 0 \quad \Big|\ \rho \qquad\qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = 0$$

В одномерном случае два эквивалентных построения:

- формула Лакса–Олейник в лагранжевых *массовых* координатах:
  E, Rykov, Sinai (1996), Brenier, Grenier (1998)
- ортогональная проекция на множество допустимых конфигураций: Shnirelman (1986)

Формула Лакса–Олейник в массовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad \rho\,\mathrm{d}x - \rho u\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0 \qquad \rho u\,\mathrm{d}x - \rho u^2\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}z$$

Формула Лакса–Олейник в массовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad \rho\,\mathrm{d}x - \rho u\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0 \quad \rho u\,\mathrm{d}x - \rho u^2\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}z$$

$$-\rho u = \frac{\partial m}{\partial \tau} = -\frac{\partial z}{\partial x}: \qquad \frac{\partial m}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$-\rho^2 u^2 = \frac{\partial m}{\partial \tau}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \tau}: \qquad \frac{\partial(m, z)}{\partial(\tau, x)} = 0$$

Формула Лакса–Олейник в массовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad \rho\,\mathrm{d}x - \rho u\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0 \quad \rho u\,\mathrm{d}x - \rho u^2\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}z$$

$$-\rho u = \frac{\partial m}{\partial \tau} = -\frac{\partial z}{\partial x}: \qquad \frac{\partial m}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$-\rho^2 u^2 = \frac{\partial m}{\partial \tau}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \tau}: \qquad \frac{\partial(m,z)}{\partial(\tau,x)} = 0, \qquad z = \zeta(m)$$

Формула Лакса–Олейник в массовых координатах

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad \rho\,\mathrm{d}x - \rho u\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}m$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0 \quad \rho u\,\mathrm{d}x - \rho u^2\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}z$$

$$-\rho u = \frac{\partial m}{\partial\tau} = -\frac{\partial z}{\partial x}: \quad \frac{\partial m}{\partial\tau} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$-\rho^2 u^2 = \frac{\partial m}{\partial\tau}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial\tau}: \quad \frac{\partial(m,z)}{\partial(\tau,x)} = 0, \quad z = \zeta(m)$$

$$\frac{\partial m}{\partial\tau} + \frac{\partial\zeta(m)}{\partial x} = 0 \qquad \text{или } m = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \zeta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$$

$$\psi(x,\tau) = \max_m\left[mx - (\psi^*(m,0) + \tau\zeta(m))\right]$$

Проекционная конструкция

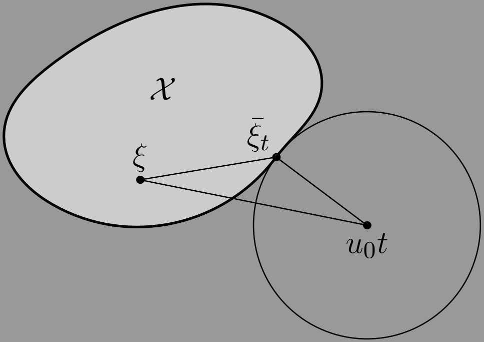
приближение Зельдовича: $x(q,\tau) = q + u(q)\tau$

— теряет взаимную однозначность (монотонность) после образования каустик

множество допустимых конфигураций: $\mathcal{X} = \{x(\cdot)\}$

— замкнутое выпуклое множество в $L^2(\mathbf{R}; \rho_0(\cdot))$

динамика: $\bar{x}(\cdot,\tau) = \mathrm{Proj}_{\mathcal{X}}\, x(\cdot,\tau)$



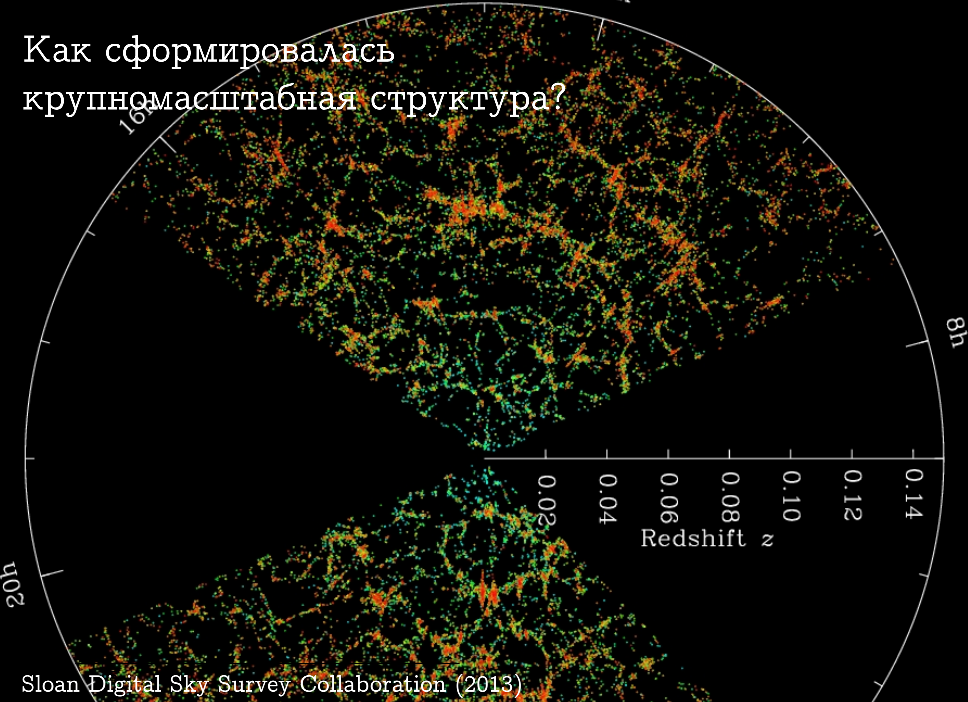
Что мы моделируем?

Нелинейная гравитационная неустойчивость,
приближение Зельдовича и каустики

«Модель прилипания»
и динамика внутри сингулярных многообразий

Реконструкция ранней Вселенной
как задача выпуклой оптимизации

Как сформировалась крупномасштабная структура?

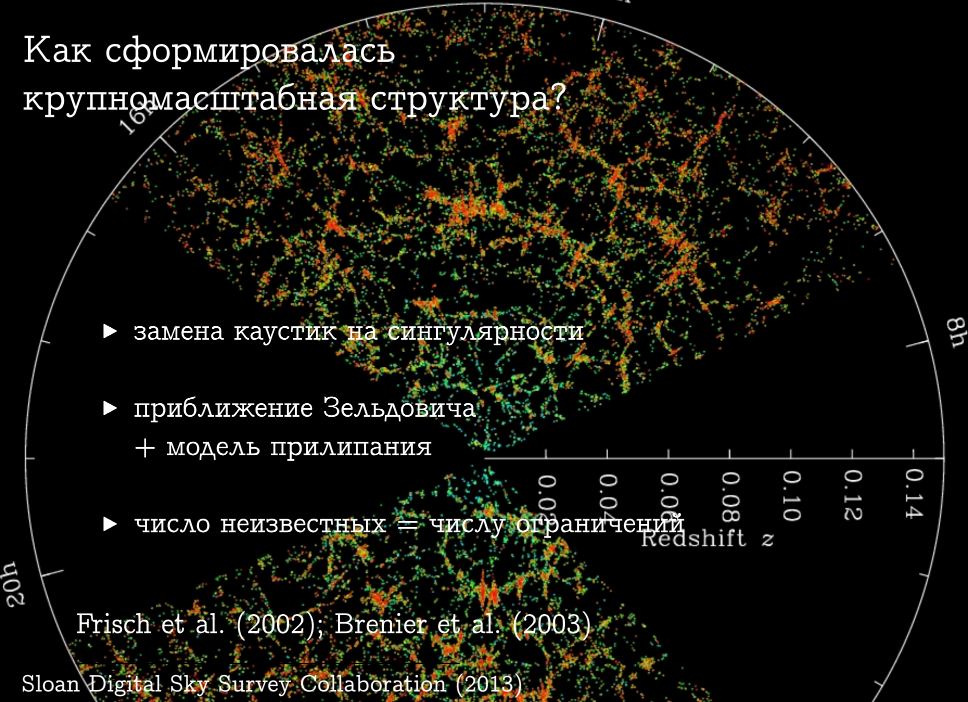


Sloan Digital Sky Survey Collaboration (2013)

Как сформировалась крупномасштабная структура?

- замена каустик на сингулярности
- приближение Зельдовича
  + модель прилипания
- число неизвестных = числу ограничений

Frisch et al. (2002); Brenier et al. (2003)



Sloan Digital Sky Survey Collaboration (2013)

Уравнение Монжа–Ампера

модель прилипания:

$$D_\tau^2 x = -\frac{3}{2\tau}(D_\tau x + \nabla_x \phi) \approx 0$$

приближение Зельдовича

Уравнение Монжа–Ампера

модель прилипания:

$$D_\tau^2 x = -\frac{3}{2\tau}(D_\tau x + \nabla_x \phi) \approx 0 \qquad \text{приближение Зельдовича}$$

$$x(q,\tau) \approx q + \tau\, D_\tau x(q,0) = q - \tau \nabla_q \phi(q,0)$$

Уравнение Монжа–Ампера

модель прилипания:

$$D_\tau^2 x = -\frac{3}{2\tau}(D_\tau x + \nabla_x \phi) \approx 0$$ приближение Зельдовича

$$x(q,\tau) \approx q + \tau\, D_\tau x(q,0) = q - \tau \nabla_q \phi(q,0) = \nabla_x \Phi(q,\tau)$$

$$\Phi(q,\tau) = \frac{|q|^2}{2} - \tau\phi(q,0)$$ выпуклый потенциал

Уравнение Монжа–Ампера

модель прилипания:

$$D_\tau^2 x = -\frac{3}{2\tau}(D_\tau x + \nabla_x \phi) \approx 0$$ приближение Зельдовича

$$x(q,\tau) \approx q + \tau\, D_\tau x(q,0) = q - \tau \nabla_q \phi(q,0) = \nabla_x \Phi(q,\tau)$$

$$\Phi(q,\tau) = \frac{|q|^2}{2} - \tau\phi(q,0)$$ выпуклый потенциал

сохранение массы: $\rho_0\, \mathrm{d}q = \rho(x,\tau)\, \mathrm{d}x$

$$\det(\partial_{q_i}\partial_{q_j}\Phi) = \frac{\rho_0}{\rho(\nabla_q \Phi, \tau)}$$

Уравнение Монжа–Ампера

модель прилипания:

$$D_\tau^2 \boldsymbol{x} = -\frac{3}{2\tau}(D_\tau \boldsymbol{x} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi) \approx 0 \qquad \text{приближение Зельдовича}$$

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},\tau) \approx \boldsymbol{q} + \tau\, D_\tau \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},0) = \boldsymbol{q} - \tau \nabla_{\boldsymbol{q}} \phi(\boldsymbol{q},0) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{q},\tau)$$

$$\Phi(\boldsymbol{q},\tau) = \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{2} - \tau \phi(\boldsymbol{q},0) \qquad \text{выпуклый потенциал}$$

сохранение массы: $\rho_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{q} = \rho(\boldsymbol{x},\tau)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\det(\partial_{q_i} \partial_{q_j} \Phi) = \frac{\rho_0}{\rho(\nabla_{\boldsymbol{q}} \Phi, \tau)}$$

преобразование Лежандра: $\nabla_{\boldsymbol{x}} \Theta = (\nabla_{\boldsymbol{q}} \Phi)^{-1}$

$$\det(\partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta) = \rho(\boldsymbol{x},\tau)/\rho_0$$

Минимизация среднеквадратичного смещения

При краевых условиях $\rho_0(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \rho(\boldsymbol{x}, \tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$, минимизировать

$$I = \int_{V_0} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}|^2\,\rho_0(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \int_{V_\tau} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})|^2\,\rho(\boldsymbol{x}, \tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Минимизация среднеквадратичного смещения

При краевых условиях $\rho_0(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \rho(\boldsymbol{x},\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$, минимизировать

$$I = \int_{V_0} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}|^2\,\rho_0(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \int_{V_\tau} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})|^2\,\rho(\boldsymbol{x},\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Вариация смещений $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) + \delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$ сохраняет $\rho(\boldsymbol{x},\tau)$:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho(\boldsymbol{x},\tau)\,\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))) = 0$$

Минимизация среднеквадратичного смещения

При краевых условиях $\rho_0(q)\,\mathrm{d}q = \rho(x,\tau)\,\mathrm{d}x$, где $x = x(q)$, минимизировать

$$I = \int_{V_0} \frac{1}{2}|x(q) - q|^2\,\rho_0(q)\,\mathrm{d}q = \int_{V_\tau} \frac{1}{2}|x - q(x)|^2\,\rho(x,\tau)\,\mathrm{d}x$$

Вариация смещений $x(q) \mapsto x(q) + \delta x(q)$ сохраняет $\rho(x,\tau)$:

$$\nabla_x \cdot (\rho(x,\tau)\,\delta x(q(x))) = 0$$

Вариация функционала:

$$\delta I = \int_{V_0} (x(q) - q) \cdot \delta x(q)\,\rho_0(q)\,\mathrm{d}q$$
$$= \int_{V_\tau} (x - q(x)) \cdot \delta x(q(x))\,\rho(x,\tau)\,\mathrm{d}x = 0$$

Следовательно, $x - q(x)$ есть градиент

Выпуклость и монотонность

Что мы знаем про поле смещений $x - q(x)$?
Оно потенциально, так что $q(x) = \nabla_x \Theta(x)$,
и монотонно:

$$(x_1 - x_2) \cdot (q(x_1) - q(x_2)) \geq 0$$

Выпуклость и монотонность

Что мы знаем про поле смещений $x - q(x)$?
Оно потенциально, так что $q(x) = \nabla_x \Theta(x)$,
и монотонно:

$$(x_1 - x_2) \cdot (q(x_1) - q(x_2)) \geq 0$$

Действительно, пусть последнее неравенство нарушено:

$$-x_1 \cdot q(x_2) - x_2 \cdot q(x_1) < -x_1 \cdot q(x_1) - x_2 \cdot q(x_2)$$

$$\frac{1}{2}|x_2 - q(x_1)|^2 + \frac{1}{2}|x_1 - q(x_2)|^2 < \frac{1}{2}|x_1 - q(x_1)|^2 + \frac{1}{2}|x_2 - q(x_2)|^2$$

Следовательно, отображение $q(x)$ неоптимально.

Выпуклость и монотонность

Что мы знаем про поле смещений $x - q(x)$?
Оно потенциально, так что $q(x) = \nabla_x \Theta(x)$,
и монотонно:

$$(x_1 - x_2) \cdot (q(x_1) - q(x_2)) \geq 0$$

Действительно, пусть последнее неравенство нарушено:

$$-x_1 \cdot q(x_2) - x_2 \cdot q(x_1) < -x_1 \cdot q(x_1) - x_2 \cdot q(x_2)$$

$$\frac{1}{2}|x_2 - q(x_1)|^2 + \frac{1}{2}|x_1 - q(x_2)|^2 < \frac{1}{2}|x_1 - q(x_1)|^2 + \frac{1}{2}|x_2 - q(x_2)|^2$$

Следовательно, отображение $q(x)$ неоптимально.

$(x_1 - x_2) \cdot (\nabla_x \Theta(x_1) - \nabla_x \Theta(x_2)) \geq 0$, т. е. Θ выпукла

Выпуклость и монотонность

Что мы знаем про поле смещений $x - q(x)$?
Оно потенциально, так что $q(x) = \nabla_x \Theta(x)$,
и монотонно:

$$(x_1 - x_2) \cdot (q(x_1) - q(x_2)) \geq 0$$

Циклическая монотонность $q(\cdot)$: для любого $k > 1$

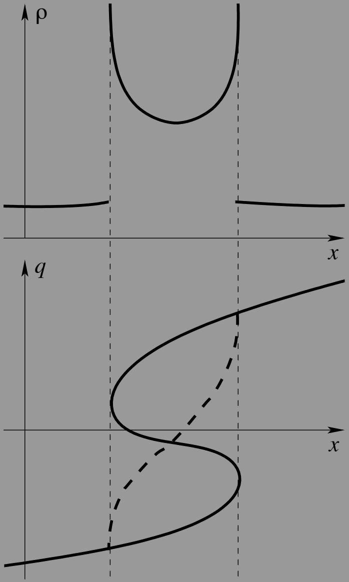
$$\begin{aligned} -x_1 \cdot q(x_k) - x_2 \cdot q(x_1) - \cdots - x_k \cdot q(x_{k-1}) \\ \geq -x_1 \cdot q(x_1) - \cdots - x_k \cdot q(x_k) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ существует такая выпуклая $\Theta(\cdot)$,
что $q(x)$ задает наклон опорной плоскости к графику $\Theta(x)$

Это позволяет рассматривать негладкие потенциалы Θ, Φ
и многозначные отображения $q(x)$, $x(q)$

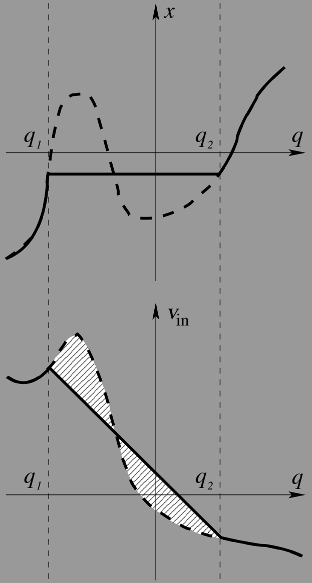
Источники ошибок реконструкции

- потеря единственности в многопотоковом течении
- потеря информации на сингулярном многообразии
- неизвестные границы носителя $\rho_0(q)$



Источники ошибок реконструкции

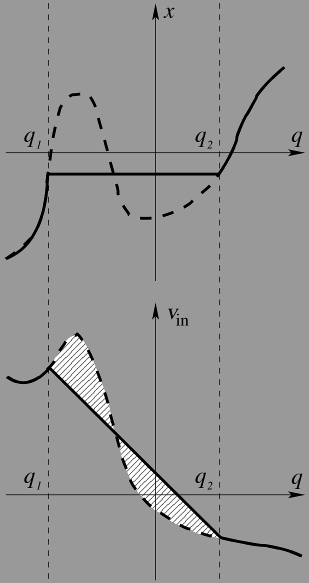
- потеря единственности в многопотоковом течении
- потеря информации на сингулярном многообразии
- неизвестные границы носителя $\rho_0(q)$



Источники ошибок реконструкции

- потеря единственности в многопотоковом течении
- потеря информации на сингулярном многообразии
- неизвестные границы носителя $\rho_0(q)$

- восстановление монотонного отображения вместо циклически монотонного, Croft and Gaztañaga (1997)



Метод МАК

современное распределение: из каталога галактик

$\rho(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_i m_i\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$

начальное распределение: регулярная сетка $(\boldsymbol{q}_j)$

$\rho_0(\boldsymbol{q}) = \sum_j \mu\,\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_j)$ $\quad$ (m_i выбираются кратными μ)

задача о назначениях: минимизировать $\frac{1}{2}\sum_{i,j}\gamma_{ij}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2$

при условиях $\gamma_{ij}\geq 0$, $\sum_j \gamma_{ij} = m_i$, $\sum_i \gamma_{ij} = \mu$

двойственная задача: максимизировать $-\sum_i m_i\theta_i - \mu\sum_j \phi_j$

при условиях $\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2 + \theta_i + \phi_j \geq 0$

$$\min_{\gamma_{ij}\geq 0}\ \max_{\theta_i,\phi_j}\left[\sum_{i,j}\gamma_{ij}\ \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2+\sum_i\theta_i\Big(\sum_j\gamma_{ij}-m_i\Big)+\sum_j\phi_j\Big(\sum_i\gamma_{ij}-\mu\Big)\right]$$

Метод МАК

современное распределение: из каталога галактик

$\rho(\boldsymbol{x},\tau) = \sum_i m_i\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$

начальное распределение: регулярная сетка $(\boldsymbol{q}_j)$

$\rho_0(\boldsymbol{q}) = \sum_j \mu\,\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_j)$ (m_i выбираются кратными μ)

задача о назначениях: минимизировать $\frac{1}{2}\sum_{i,j}\gamma_{ij}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2$

при условиях $\gamma_{ij}\geq 0$, $\sum_j \gamma_{ij} = m_i$, $\sum_i \gamma_{ij} = \mu$

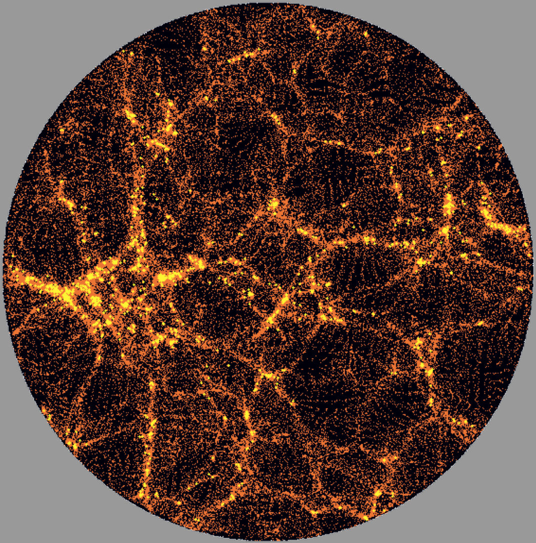
двойственная задача: максимизировать $-\sum_i m_i\theta_i - \mu\sum_j \phi_j$

при условиях $\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2 + \theta_i + \phi_j \geq 0$

$$\min_{\gamma_{ij}\geq 0}\ \max_{\theta_i,\phi_j}\left[\sum_{i,j}\gamma_{ij}\left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{q}_j|^2 + \theta_i + \phi_j\right) - \sum_i m_i\theta_i - \mu\sum_j \phi_j\right]$$

Тестирование метода МАК

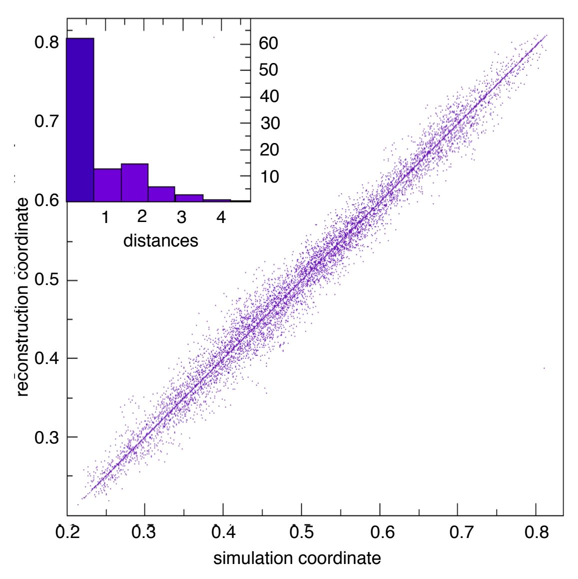
- $N = 128^3$ частиц
- $200 \times 200 \times 200$ Мпк
- периодические краевые условия
- вписанной сферой высечено 17178 частиц из подрешетки с 32^3 вершинами



Результаты тестирования

«квазипериодическая проекция»:

$$\tilde{q} = \frac{q_1 + \sqrt{2}q_2 + \sqrt{3}q_3}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$



Выпуклые функции и преобразование Лежандра

Выпуклая функция — верхняя огибающая семейства касательных к своему графику:

$$f(x) = \sup_{\boldsymbol{q}} \left[\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{x} - g(\boldsymbol{q}) \right] \qquad (*)$$

Выпуклые функции и преобразование Лежандра

Выпуклая функция — верхняя огибающая семейства касательных к своему графику:

$$f(x) = \sup_{q} [q \cdot x - g(q)] \qquad (*)$$

Неравенство Юнга:

$$f(x) + g(q) \geq x \cdot q \quad \text{для всех } x,\ q$$

Выпуклые функции и преобразование Лежандра

Выпуклая функция — верхняя огибающая
семейства касательных к своему графику:

$$f(x) = \sup_{q} [q \cdot x - g(q)], \qquad g(q) = \sup_{x} [q \cdot x - f(x)] \qquad (*)$$

Неравенство Юнга:

$$f(x) + g(q) \geq x \cdot q \quad \text{для всех } x,\ q$$

$f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — преобразования Лежандра друг друга

Выпуклые функции и преобразование Лежандра

Выпуклая функция — верхняя огибающая семейства касательных к своему графику:

$$f(x) = \sup_q [q \cdot x - g(q)], \qquad g(q) = \sup_x [q \cdot x - f(x)] \qquad (*)$$

Неравенство Юнга:

$f(x) + g(q) \geq x \cdot q$ для всех x, q

$f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — преобразования Лежандра друг друга

В гладком случае равенства в (*) достигаются при

$$x = \nabla_q g(q), \qquad q = \nabla_x f(x)$$

(назад к уравнению Монжа–Ампера...)

Список литературы

И. А. Богаевский. Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении. *Математический сборник*, 197(12):11–42, 2006. doi: 10.4213/sm1502.

J. Bec and K. Khanin. Burgers turbulence. *Physics Reports*, 447(1-2):1–66, 2007. doi: 10.1016/j.physrep.2007.04.002.

I. A. Bogaevsky. Matter evolution in Burgulence, Jul 2004.

Y. Brenier and E. Grenier. Sticky particles and scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6), 1998.

Список литературы (продолж.)

Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevskiĭ. Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346(2):501–524, December 2003. ISSN 0035-8711. doi: 10.1046/j.1365-2966.2003.07106.x.

P. Cannarsa and Y. Yu. Singular dynamics for semiconcave functions. *Journal of the European Mathematical Society*, 11:999–1024, 2009. doi: 10.4171/JEMS/173.

R. A. Croft and E. Gaztañaga. Reconstruction of cosmological density and velocity fields in the Lagrangian Zel'dovich approximation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 285:793–805, 1997.

Список литературы (продолж.)

W. E, Y. Rykov, and Y. Sinai. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. *Communications in Mathematical Physics*, 177(2):349–380, 1996.

D. Fanelli and E. Aurell. Asymptotic behavior of a planar perturbation in a three dimensional expanding universe. *Astron. Astrophys.*, 395:399–408, 2002.

U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevski. A reconstruction of the initial conditions of the universe by optimal mass transportation. *Nature*, 417:260–262, 2002. doi: 10.1038/417260a.

Список литературы (продолж.)

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. Shandarin. The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 236:385–402, 1989.

K. Khanin and A. Sobolevski. Particle dynamics inside shocks in Hamilton–Jacobi equations. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 168 (1916):1579–1593, 2010. doi: 10.1098/rsta.2009.0283.

A. Melott and S. Shandarin. Gravitational instability with high resolution. *The Astrophysical Journal*, 343:26–30, 1989. doi: doi:10.1086/167681.

M. Sever. An existence theorem in the large for zero-pressure gas dynamics. *Differential Integral Equations*, 14(9): 1077–1092, 2001.

Список литературы (продолж.)

A. I. Shnirel'man. On the principle of the shortest way in the dynamics of systems with constraints. In *Global analysis—studies and applications, II*, volume 1214 of *Lecture Notes in Math.*, pages 117–130. Springer, Berlin, 1986.

Sloan Digital Sky Survey Collaboration. Sloan digital sky survey, 2013. URL `http://www.sdss.org/`.

V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins, C. S. Frenk, N. Yoshida, L. Gao, J. Navarro, R. Thacker, D. Croton, J. Helly, J. A. Peacock, S. Cole, P. Thomas, H. Couchman, A. Evrard, J. Colberg, and F. Pearce. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435(7042):629–636, June 2005. doi: 10.1038/nature03597.

Список литературы (продолж.)

Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Team. Wilkinson microwave anisotropy probe, 2012. URL http://map.gsfc.nasa.gov/.