Бифуркации Андронова-Хопфа (двухмерная динамическая система)

Слово бифуркация в переводе с латыни означает раздвоение. Термин бифуркация используется в различных разделах естественных наук, но точное определение понятия бифуркации может зависеть от класса исследуемых проблем. Часто исследование состояний равновесия некоторой системы в зависимости от параметра может быть сведено к решению уравнения $f(x,\alpha)=0$, причем $f(0,\alpha)=0$. Говорят, что α_0 – бифуркационное значение параметра, если в любой окрестности точки α_0 уравнение $f(x,\alpha)=0$ решения, отличные от тривиального, и стремящиеся к нулю при $\alpha \to \alpha_0$.

Иначе определяется бифуркации в теории динамических систем, описывающих развитие процесса во времени. Пусть динамическая система описывается автономной системой дифференциальных уравнений, содержащей числовой параметр

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\alpha),\ \ f(0,\alpha)=0 \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что функция $f(x,\alpha)$ имеет частные производные всех порядков в некоторой окрестности точки $(0,\alpha_0)$. Предположим, что $x=0$ изолированное положение равновесия.

Замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические решения. Изолированная замкнутая фазовая траектория называется предельным циклом. Предельный цикл Γ устойчив, если для любой окрестности $O_1(\Gamma)$ существует такая окрестность $O_2(\Gamma)\subset O_1(\Gamma)$, что все интегральные кривые $x(t)$, пересекающие $O_2(\Gamma)$ при $t=t_1$ остаются в окрестности $O_1(\Gamma)$ при $t>t_1$. Если

$$\rho\big(x(t),\Gamma\big)=\min_{y\in\Gamma}\rho\big(x(t),y\big)\to 0\ \ при\ t\to+\infty, \tag{1.2}$$

то предельный цикл асимптотически устойчив.

Теорема Пуанкаре-Бендиксона. *Любая фазовая траектория, лежащая внутри компакта, либо замкнута, либо асимптотически стремится при $t\to+\infty$ к положению равновесия или предельному циклу.*

Значение параметра $\alpha^*\in(0,\alpha_0)$, бифуркационное, если при переходе через это значение параметра фазовые картинки в окрестности положения равновесия $x=0$ качественно различны (не могут быть получены одна из другой при помощи непрерывного и взаимно однозначного отображения).

Бифуркации, возникающие, когда матрица $f_x(0,\alpha^*)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений, называют бифуркациями Андронова-Хопфа.

Начнем с простого, но принципиально важного примера

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \varepsilon x_1 - \varepsilon x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{1}$$

Матрица линеаризированной системы

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(\varepsilon)$ имеет собственные значения $\varepsilon \pm i$. При $\varepsilon < 0$ положение равновесия $x=0$ линеаризироваaной системы, будет устойчивым фокусом, а при $\varepsilon>0$ неустойчивым фокусом, при $\varepsilon = 0$ центром.

Умножая первое уравнение на x_1, а второе уравнение на x_2 и складывая результат, получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{dt} = \varepsilon\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \varepsilon\left(x_1^2 + x_2^2\right)^4 \tag{2}$$

Умножая второе уравнение (1) на x_1 первое на x_2 и вычитая результат, получаем, что

$$x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2^2 \tag{3}$$

Перейдем в уравнениях (2.3) к полярным координатам

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta$$

Уравнения (2) и (3) запишутся в виде

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{dr}{dt} - r + r^3 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Уравнение (4) имеет следующие решения

$$r=0,\ r = 2,\ \ r = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right)e^{-2\varepsilon\left(t - t_0\right)}}}\ .$$

Получаем следующие решения системы уравнений (1)

Положение равновесия $x_1 = 0,\ x_2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0$;

Предельный цикл

$$x_1 = \cos\left(t - t_0\right),\, x_2 = \sin\left(t - t_0\right)$$

Семейство траекторий

$$x = \frac{r_0 \cos\left(t - t_0\right)}{\sqrt{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{-2\varepsilon\left(t - t_0\right)}}}, \;\; y = \frac{r_0 \cos\left(t - t_0\right)}{\sqrt{r_0^2 + \left(1 - r_0^2\right) e^{-2\varepsilon\left(t - t_0\right)}}} \tag{5}$$

Из формул (5) следует, что при $\varepsilon < 0$ устойчиво положение равновесия и неустойчив предельный цикл. При $\varepsilon > 0$ положение равновесия неустойчиво, а предельный цикл устойчив. При переходе через бифуркационное значения параметра $\varepsilon = 0$ происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

Заметим еще, что систему уравнений (1) можно записать в комплексном виде. Полагая

$$x_1 + i x_2 = z, \;\; \alpha + i\beta = \lambda \;,$$

получаем уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z - \varepsilon z \left|z\right|^2 \tag{6}$$

В системе (1) нелинейные члены обращались в ноль при $\varepsilon = 0$. Система

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\beta x_2 + \varepsilon x_1 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 + \varepsilon x_2 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

сводится к системе (1) при помощи замены $x_1 = y_1\sqrt{\left|\varepsilon\right|}, \;\; x_2 = y_2\sqrt{\left|\varepsilon\right|}$. В фазовой плоскости $\left(y_1, y_2\right)$ предельный цикл является окружностью радиуса 1, а в фазовой плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ предельный цикл является окружность радиуса $\sqrt{\left|\varepsilon\right|}$.

Важность примеров (1) и (7) обусловлена тем, что они описывают типичную ситуацию бифуркации Хопфа в системах второго порядка.

Пусть (1.1) есть система второго порядка. Запишем ее в следующем виде

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax + f\left(x\right), \\ &A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; f\left(0\right) = 0, \; f_x\left(0\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Характеристическое уравнение для матрицы A

$$\left(a_{11} - \lambda\right)\left(a_{22} - \lambda\right) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + d = 0, \;\; \varepsilon = -\frac{1}{2} SpA = -\frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{22}}{2}, \;\; d = \det A \;.$$

Предполагается, что характеристическое уравнение имеет комплексные собственные значения. Для этого необходимо, чтобы $a_{12}a_{21} \neq 0$.

Предполагается, что $d >> \varepsilon^2$. Собственное число и собственный вектор матрицы A

$$\lambda = -\varepsilon + i\beta,\ \beta = \sqrt{d-\varepsilon^2},\ \ h = \left(a_{12},\ \lambda - a_{11}\right) \tag{9}$$

Возьмем в качестве базисных вектора $h, \bar{h}$.

$$x = \xi h + \bar{\xi}\bar{h},\ \ f\left(x\right) = F\left(\xi, \bar{\xi}\right)h + \overline{F\left(\xi, \bar{\xi}\right)}\bar{h}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8), получаем

$$\dot{\xi}h + \dot{\bar{\xi}}\bar{h} = \xi\lambda h + \overline{\xi\lambda}h + F\left(\xi, \bar{\xi}\right)h + \overline{F\left(\xi, \bar{\xi}\right)}\bar{h}$$

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + F\left(\xi, \bar{\xi}\right),\ \ \dot{\bar{\xi}} = \bar{\lambda}\bar{\xi} + \overline{F\left(\xi, \bar{\xi}\right)} \tag{10}$$

Если первоначальный базис был $\left(e_1, e_2\right)$, то

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 = h\xi + \bar{h}\bar{\xi} = \xi\left(a_{12}e_1, \lambda - a_{11}e_2\right) + \bar{\xi}\left(a_{12}e_1, \bar{\lambda} - a_{11}e_2\right)$$

Откуда следует, что

$$\begin{gathered} x_1 = a_{12}\left(\xi + \bar{\xi}\right),\ \ x_2 = \xi\left(\lambda - a_{11}\right) + \bar{\xi}\left(\bar{\lambda} - a_{11}\right) \\ \xi = -x_1\frac{\bar{\lambda} - a_{11}}{a_{12}\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)} + x_2\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} = i\frac{\varepsilon - a_{11} + i\beta}{2\beta a_{12}}x_1 - \frac{i}{2\beta}x_2 = \frac{-\beta + i\left(\varepsilon - a_{11}\right)}{2\beta a_{12}}x_1 - \frac{i}{2\beta}x_2 \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} F\left(\xi\right) = \frac{-\beta + i\left(\varepsilon - a_{11}\right)}{2\beta a_{12}} f_1\left(a_{12}\left(\xi + \bar{\xi}\right), \xi\left(\lambda - a_{11}\right) + \bar{\xi}\left(\bar{\lambda} - a_{11}\right)\right) - \\ -\frac{i}{2\beta} f_2\left(a_{12}\left(\xi + \bar{\xi}\right), \xi\left(\lambda - a_{11}\right) + \bar{\xi}\left(\bar{\lambda} - a_{11}\right)\right) \end{gathered} \tag{12}$$

Без ограниченя общности можно считать, что $\beta = 1$ Итак, система уравнений приводится к комплексной форме

$$\begin{gathered} \frac{dz}{dt} = \lambda z + f\left(z, \bar{z}, \varepsilon\right), \\ \lambda = \varepsilon + i,\ \ f\left(z, \bar{z}, \varepsilon\right) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k\left(z, \bar{z}\right),\ f_k\left(z, \bar{z}\right) = \sum_{m=0}^{k} a_{k-m,\,k}\left(\varepsilon\right)z^{k-m}\bar{z}^m \end{gathered} \tag{13}$$

Приведение системы к нормальному виду. Рассмотрим замену

$$z = \zeta + \omega\left(\zeta\right),\ \ \omega\left(\zeta\right) = \sum_{k=2}^{2n+1}\omega_k\left(\zeta, \bar{\zeta}\right), \omega_k\left(\zeta, \bar{\zeta}\right) = \sum_{j=0}^{k} c_{k-j,\,j}\zeta^{k-j}\bar{\zeta}^{\,j}. \tag{14}$$

Потребуем, чтобы в результате такой замены уравнение принимало следующий вид

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta + \psi(\zeta), \psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{2k+1}\zeta^{k+1}\overline{\zeta}^{k} + O\left(\zeta^{2n+2}\right) \text{ при } \zeta \to 0, \tag{15}$$

Подставляя выражения (14) и (15) в уравнение (13), получаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}\dot{\zeta} + \frac{\partial z}{\partial \overline{\zeta}}\dot{\overline{\zeta}} = \lambda z + f\left(z, \overline{z}, \varepsilon\right), \tag{16}$$

$$\left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\right)\left(\lambda\zeta + \psi(\zeta)\right) + \frac{\partial \omega}{\partial \overline{\zeta}}\left(\overline{\lambda}\overline{\zeta} + \overline{\psi}(\zeta)\right) = \lambda(\zeta + \omega) + f\left(\zeta + \omega, \overline{\zeta} + \overline{\omega}\right) \tag{17}$$

$$\lambda\left(\zeta\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \omega\right) + \overline{\lambda}\overline{\zeta}\frac{\partial \omega}{\partial \overline{\zeta}} + \psi = -\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\psi - \frac{\partial \omega}{\partial \overline{\zeta}}\overline{\psi} + f\left(\zeta + \omega, \overline{\zeta} + \overline{\omega}\right) \tag{18}$$

Из формулы (14)следует, что

$$\lambda\left(\zeta\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \omega\right) + \overline{\lambda}\overline{\zeta}\frac{\partial \omega}{\partial \overline{\zeta}} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(\lambda(k-j-1) + \overline{\lambda}j\right)\zeta^{k-j}\overline{\zeta}^{j}c_{k-j,\,j} + O\left(\zeta^{2n+2}\right)$$

Неизвестные коэффициенты находятся из уравнения (18) после сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $\zeta^{k}\overline{\zeta}^{m}$ Рассмотрим число

$$\lambda(k-j-1) + \overline{\lambda}j = \varepsilon(k-j) + \beta(k-2j-1)$$

Мнимая часть этого числа обращается в ноль при $\kappa = 2j+1$. Чтобы избежать проблемы малых коэффициентов положим $c_{j+1,\,j} = 0$.

При $k = 2$ приравниваем соответствующие квадратичные формы

$$\begin{gathered} c_{20}\lambda\zeta^{2} + c_{11}\overline{\lambda}\zeta\overline{\zeta} + c_{02}\left(2\overline{\lambda} - \lambda\right)\overline{\zeta}^{2} = \alpha_{20}\zeta^{2} + \alpha_{11}\zeta\overline{\zeta} + \alpha_{02}\overline{\zeta}^{2}, \\ c_{20} = \frac{\alpha_{20}}{\lambda},\ c_{11} = \frac{\alpha_{11}}{\overline{\lambda}}, c_{02} = \frac{\alpha_{02}}{2\lambda - \overline{\lambda}} \end{gathered} \tag{19}$$

Приравниваем формы третьего порядка

$$\begin{gathered} 2\lambda c_{30}\zeta^{3} + 2\overline{\lambda}c_{12}\zeta\overline{\zeta}^{2} + \left(3\overline{\lambda} - \lambda\right)c_{03} + \beta_{3}\zeta^{2}\overline{\zeta} = \alpha_{30}\zeta^{3} + \alpha_{21}\zeta^{2}\overline{\zeta} + \alpha_{12}\zeta\overline{\zeta}^{2} + \alpha_{30}\overline{\zeta}^{3} + \\ + \left(2\alpha_{20}\zeta + \alpha_{11}\overline{\zeta}\right)\left(c_{20}\zeta^{2} + c_{11}\zeta\overline{\zeta} + c_{02}\overline{\zeta}^{2}\right) + \left(\alpha_{11}\zeta + 2\alpha_{02}\overline{\zeta}\right)\left(\overline{c}_{20}\overline{\zeta}^{2} + \overline{c}_{11}\zeta\overline{\zeta} + \overline{c}_{02}\zeta^{2}\right) \end{gathered}$$

Из этого равенства определяются неизвестные коэффициенты

$$\begin{gathered} c_{30} = (2\lambda)^{-1}\left(\alpha_{30} + 2\alpha_{20}c_{20} + \alpha_{11}\overline{c}_{02}\right), \beta_{3} = \alpha_{21} + a_{11}c_{20} + 2a_{20}c_{11} + a_{11}\overline{c}_{11} + 2\alpha_{02}\overline{c}_{02}, \\ c_{12} = \left(2\overline{\lambda}\right)^{-1}\left(\alpha_{12} + a_{11}c_{11} + 2\alpha_{20}c_{02} + \alpha_{11}\overline{c}_{20} + 2a_{02}\overline{c}_{11}\right), c_{03} = \left(3\overline{\lambda} - \lambda\right)^{-1}\left(\alpha_{03} + \alpha_{11}c_{02} + 2\alpha_{02}\overline{c}_{02}\right). \end{gathered}$$

Аналогично определяются остальные коэффициенты. Так как выкладки громоздкие, то их можно проводить на компьютере при помощи программ символьных вычислений.

Уравнение в нормальной форме

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta + \sum_{k=1}^{n} \beta_{2k+1}\zeta^{k+1}\bar{\zeta}^{k} + O\left(\zeta^{2n+2}\right),\ \lambda = \varepsilon + i\beta,\ |\beta| >> \varepsilon > 0$$

В полярных координатах

$$\zeta = \sqrt{\varepsilon} r e^{i\theta},\ \dot{r} + ir\dot{\theta} = \lambda r + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k}\beta_{2k+1} r^{2k+1} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+2}\psi\left(r,\theta\right) \tag{20}$$

В формуле (20) $\psi\left(r,\theta\right)$ гладкая 2π - периодическая функция. Отделяя действительную и мнимую части, получаем систему уравнений

$$\dot{r} = \varepsilon r + \varepsilon r^{3}\,\mathrm{Re}\,\beta_{3} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k} r^{2k+1}\,\mathrm{Re}\,\beta_{2k+1} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+2}\psi_{1}\left(r,\theta\right) \tag{20}$$

$$\dot{\theta} = 1 + \varepsilon r^{2}\,\mathrm{Im}\,\beta_{3} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k} r^{2k}\,\mathrm{Im}\,\beta_{2k+1} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+1}\psi_{2}\left(r,\theta\right) \tag{21}$$

При малых значениях параметра и при ограниченных значениях r в качестве независимой переменной можно принять полярный угол θ. Получаем систему уравнений

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r - \varepsilon a_{3} r^{3} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k} r^{2k+1} a_{k} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+2}\psi_{3}\left(r,\theta\right),\ \ a_{3} = \mathrm{Im}\,\beta_{3} - \mathrm{Re}\,\beta_{3} \tag{22}$$

$$\frac{dt}{\partial\theta} = 1 - \varepsilon r^{2}\,\mathrm{Im}\,\beta_{3} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k} b_{k} r^{2k} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+1}\psi_{4}\left(r,\theta\right) \tag{23}$$

Предполагается, что $a_{3} >> \varepsilon$. Поэтому без ограничения общности можно считать $a_{3} = 1$. Уравнение (22) решается независимо от уравнения (23). Если функция $r\left(\theta,\varepsilon\right)$ найдена, то функция $t\left(\theta,\varepsilon\right)$ находится из уравнения (23).

Полагая в уравнении (22) $\tau = \varepsilon\theta$, получаем уравнение

$$\frac{dr}{d\tau} = r - r^{3} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k-1} r^{2k+1} a_{k} + \varepsilon^{n} r^{2n+2}\psi_{3}\left(r,\varepsilon^{-1}\tau\right) \tag{24}$$

Будем искать приближенное решение уравнения (22) в следующем виде

$$R_{n}\left(\tau,\varepsilon\right) = a\left(\tau\right) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{k} r_{k}\left(\tau\right). \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (24) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получаем рекуррентную систему уравнений. При $\varepsilon = 0$ получаем уравнение

$$\frac{da}{d\tau} = a - a^{3},\ \ a\left(\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\left(\tau-\tau_{0}\right)}}} \tag{26}$$

Функция $a(\tau)$ строго возрастает и отображает расширенную прямую $\overline{R}=[-\infty,+\infty]$ на отрезок $[0,1]$. Рассмотрим множество $C(\overline{R})$ функций непрерывных на $\overline{R}$ и удовлетворяющих условию $|f(\tau)|\le c(f)a^2(\tau)$. Множество $C(\overline{R})$ будет банаховым пространством с нормой

$$\|f\|=\sup_{\tau\in R}\left\{a(\tau)^{-2}|f(\tau)|\right\} \tag{27}$$

Заметим, что функция $a(\tau)\notin C(\overline{R})$. Для определения функций $r_k(\tau)$ получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{dr_k}{d\tau}-r_k+3a^2r_k=\psi_k(a,r_1,\dots r_{k-1}),\, k\ge 2. \tag{28}$$

Многочлены $\psi_k(a,r_1,\dots r_{k-1})$ не содержат свободного члена и линейных членов и неотрицательны, если их аргументы неотрицательны.

Лемма 1. *Если функция* $g(\tau)\in C(\overline{R})$ *и* $g(\tau)\ge 0$ *то уравнение*

$$\frac{dr}{d\tau}-r+3a^2r=g(\tau) \tag{29}$$

имеет единственное неотрицательное решение в пространстве $C(\overline{R})$, причем $\|r\|\le 2\|g\|$.

Доказательство. Однородное уравнение (29) имеет частное решение $a'(\tau)=a(\tau)-a^3(\tau)$. Это решение положительно и не принадлежит пространству $C(\overline{R})$. Покажем, что частное решение неоднородного уравнения

$$r(\tau)=a'(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\frac{g(s)}{a'(s)}ds\ge 0 \tag{30}$$

принадлежит пространству $C(\overline{R})$. Так как $|g(s)|\le a^2(s)\|g\|$, то

$$\begin{aligned}0\le r(\tau)&=a'(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\|g\|a^2(s)}{a'(s)}ds=a'(\tau)\|g\|\int_{-\infty}^{\tau}\frac{a^2(s)a'(s)}{a'(s)^2}ds=\\&=a'(\tau)\|g\|\int_{-\infty}^{\tau}\frac{a'(s)}{\left(1-a(s)^2\right)^2}ds\le a'(\tau)\|g\|\int_{-\infty}^{\tau}\frac{a'(s)ds}{(1-a(s))^2}=\\&=a(s)\left(1-a(s)^2\right)\|g\|\frac{a(s)}{1-a(s)}\le 2a^2(s)\|g\|.\end{aligned} \tag{31}$$

Покажем, что функция $r(\tau)$ имеет конечный предел при $\tau\to+\infty$

$$\lim_{\tau\to+\infty} r(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{\int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{g(s)}{a'(s)} ds}{1/a'(\tau)} = -\lim_{\tau\to+\infty} \frac{g(\tau)}{a'(\tau)} \frac{a'(\tau)^2}{a''(\tau)} = -\lim_{\tau\to+\infty} \frac{g(\tau)a'(\tau)}{a'(\tau)\left(1-3a(\tau)\right)} = \frac{1}{2} g(+\infty) \quad (32)$$

Утверждение леммы следует из неравенства (31) и равенства (32). Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что все уравнения (28) могут быть последовательно разрешены в пространстве $C(\bar{R})$.

Теорема. *Найдется такое число* $\varepsilon_0 > 0$*, что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение (24) имеет ограниченное* $r(\tau, \varepsilon)$ *решение на интервале* $-\infty < \tau < +\infty$ и

$\left|r(\tau, \varepsilon) - R_n(\tau, \varepsilon)\right| \le C(n) a^2(\tau) \varepsilon^{n+1}$.

Доказательство. Пусть $C(R)$ пространство ограниченных и непрерывных функций с конечной нормой (27). Будем рассматривать уравнение (24) как уравнение вида $Ar - F(r, \varepsilon) = 0$ в пространстве ограниченный и непрерывных функций $C(R)$, полагая

$$Ar = \frac{dr}{d\tau} - r,\; F(r, \varepsilon) = r^3 - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k-1} r^{2k+1} a_k - \varepsilon^n r^{2n+2} \psi_3\left(r, \varepsilon^{-1}\tau\right) \quad (33)$$

В силу наложенных ограничений оператор F действует в пространстве $C(R)$ и имеет и на любом отрезке имеет производную Фреше, удовлетворяющую условию Липшица с константой Липшица l . Возьмем в качестве начального приближения функцию $R_n(\tau, \varepsilon)$. Оператор $A - F'(R_n, \varepsilon)$ имеет ограниченный обратный оператор при достаточно малых значениях параметра ε . Действительно, при $\varepsilon = 0$ оператор

$$\left(A - F'\left(R_n(\tau, 0), 0\right)\right) r = \frac{dr}{d\tau} - 3a^2(\tau) r$$

Имеет ограниченный обратный в силу леммы 1. Так как оператор $A - F'(R_n, \varepsilon)$ отличается от оператора $A - F'\left(R_n(\tau, 0), 0\right)$ на ограниченный линейный оператор, норма которого имеет порядок ε , то оператор $A - F'(R_n, \varepsilon)$ также имеет ограниченный обратный при достаточно малых значениях параметра ε и $\kappa = \left\|A - F'(R_n)\right\| \le c_0$. В силу определения функции $R_n(\tau, \varepsilon)$ невязка

$$\left\|AR_n - F(R_n, \varepsilon)\right\| = \gamma(\varepsilon) \le c(n) \varepsilon^{n+1}$$

Но тогда для достаточно малых значений параметра $2l\kappa^2\gamma < 1$ и силу известной теоремы функционального анализа (см. модифицированный метод Ньютона решеия функциональных уравнений)уравнение $Ar - F(r, \varepsilon) = 0$ имеет решение, причем $\left\|r(\varepsilon) - R_n(\varepsilon)\right\| \le \varepsilon^{n+1}$, что и требовалось доказать.

Обратимся к решению уравнения (25). Положим

$$\theta = t + \varphi(\tau), \frac{d\varphi}{d\tau} = \delta_2 r^2 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^k \delta_{2k} r^{2k} + \varepsilon^{n+1} r^{2n+1} \psi_4\left(r, \varepsilon^{-1}\theta\right),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{-\infty}^{\tau} \left(\delta_2 r(s)^2 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^{k-1} \delta_{2k} r(s)^{2k} \right) ds + \varepsilon^{n+1} \int_{-\infty}^{\tau} r^{2n+1}(s) \psi_4\left(r(s), \varepsilon^{-1} s\right) ds$$

Лемма 2. *Асимптотика при* $\tau \to +\infty$

$$\varphi(\tau) = \bar{\varphi}(\tau) + \varepsilon^{n+1} \chi(\tau, \varepsilon),$$

$$\bar{\varphi}(\tau) = \theta_0 + \tau \left(\varepsilon^2 \delta_2 r_2 (+\infty)^2 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon^k \delta_{2k} r_k (+\infty)^{2k} \right), \|\chi\| \le C(n)$$

Доказательство. Получается применением правила Лопиталя.