

Секция «Математика и механика»

Условия дискретности групп изометрий пространства Лобачевского в терминах расстояний

Маслей Александр Викторович

Аспирант

Новосибирский государственный университет, Механико-математический
факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: masley.alexander@gmail.com

Рассмотрим модель Пуанкаре $\mathbb{H}^3$ трехмерного пространства Лобачевского. Обозначим через $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ группу всех сохраняющих ориентацию изометрий $\mathbb{H}^3$. Хорошо известно, что $Isom^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL(2, \mathbb{C})$. Пусть $G < Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Группа G называется элементарной, если существует конечная G -орбита в $\overline{\mathbb{H}^3}$. В противном случае группа G называется неэлементарной. Классификация всех элементарных дискретных групп G приведена, например, в [4]. Из результатов [2] следует, что неэлементарная группа G дискретна тогда и только тогда, когда любая ее двупорожденная подгруппа дискретна.

Каждый нетривиальный элемент группы $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ является эллиптическим, параболическим или локсодромическим. Для групп с двумя эллиптическими порождающими достаточные условия дискретности были получены в [1] и [3]. Следующее утверждение улучшает эти результаты в случае, когда один из порождающих имеет порядок 2.

Теорема. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < Isom^+(\mathbb{H}^3)$ такова, что f и g – эллиптические элементы порядков $m \leq 3$ и 2 соответственно, $\delta(f, g)$ – гиперболическое расстояние между осями порождающих, $\theta(f, g)$ – угол между этими осями. Если выполнено одно из следующих условий

$$(1) \quad 0 \leq \theta(f, g) \leq \pi/4 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \delta(f, g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m) \cos \theta(f, g),$$

$$(2) \quad \pi/4 \leq \theta(f, g) \leq \pi/2 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \delta(f, g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m) \sin \theta(f, g),$$

то группа G дискретна, неэлементарна и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Разработанные методы позволили установить достаточные условия дискретности также для групп изометрий $\mathbb{H}^3$, порожденных двумя непараболическими элементами.

Литература

1. Gehring F.W., Maclachlan C., Martin G.J. On the discreteness of the free product of finite cyclic groups // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1996. No. 228. P. 9-15.
2. Jorgensen T. A note on subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ // Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2). 1977. V. 28, No. 110. P. 739-749.
3. Rasskazov A.A. On the distance between the axes of elliptic elements generating a free product of cyclic groups // Adv. Geom. 6. 2006. No. 1. P. 85-92.
4. Ratcliffe J.G. Foundations of hyperbolic manifolds. Springer-Verlag, 2006.

Слова благодарности

Автор благодарит научного руководителя Андрея Юрьевича Веснина за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант РФФИ-13-01-00513) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1414.2012.1.).