Ограниченность оператора Гильберта в случае двух непрерывных мер

Александр Резников

Вопрос об ограниченности оператора H_u, определенного формулой

$$H_u(f) = H(fu) = \int \frac{f \cdot u dy}{x - y},$$

в последнее время "будоражил" математическое сообщество. Именно, требовалось дать условие ограниченности этого оператора в смысле

$$\|H_u(f)\|_{L^2(v)} \leqslant C(u, v)\|f\|_{L^2(u)}$$

или

$$\|H_u(f)\|_{L^{2,\infty}(v)} \leqslant C(u, v)\|f\|_{L^2(u)}.$$

В процессе изучения этого вопроса было выдвинуто несколько гипотез. Одна из них выглядит так:

"Если максимальный оператор Харди-Литтлвуда M_u ограничен из $L^2(u)$ в $L^2(v)$, а "сопряженный" оператор M_v ограничен из $L^2(v)$ в $L^2(u)$, то оператор Гильберта ограничен?"

Другая гипотеза, изначально выдвинутая Д. Сарасоном, звучит следующим образом:

"Если для любого интервала I функции u и v удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I u dx\right) \cdot \left(\frac{1}{|I|}\int_I v dx\right) \leqslant 1,$$

то оператор Гильберта ограничен?"

Оказывается, что обе гипотезы неверны.

В докладе мы рассмотрим усиление второй гипотезы, опеспечивающее ограниченность и максимального оператора, и преобразования Гильберта, и других сингулярных интегральных операторов.