Владимир Андреевич Стеклов
9 января 1864 г. (28 декабря 1863 г.)
— 30 мая 1926 г.

Труды В. А. Стеклова по уравнениям математической физики и развитие его результатов в этой области.

Гущин А.К.

Математический институт им. В.А. Стеклова

13 мая 2013 года

Основные направления исследований В.А. Стеклова в области математической физики.

1 Обоснование метода разделения переменных. Теория замкнутости.

2 Исследование разрешимости основных краевых задач для уравнения Пуассона.

3 Собственные функции оператора Лапласа с основными граничными условиями.

"Основные задачи математической физики", ч.1, 1922 г.; ч. 2, 1923 г.. Второе издание под редакцией В.С. Владимирова, 1983 г..

Основные идеи доказательства существования собственных функций оператора Лапласа содержатся в работах В.А. Стеклова

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2 série, 1900, t. 2, p. 273 – 303; 1900, t. 2, p. 273 – 303; 1904, t. 6, p. 351 – 475.

Результаты этого направления должны были составить третью часть книги.

Краткое изложение всех основных результатов В.А. Стеклова имеется в книге **В.С. Владимиров, И.И. Маркуш. "Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки". "Наука" 1981 г.** Там же приведен полный список его трудов.

1. Обоснование метода разделения переменных.

Предложен в XVIII веке Л. Эйлером для задачи о колебании однородной упругой струны (Д. Бернулли, Ж. Лагранж). В работе Ж. Фурье "Аналитическая теория тепла" этот метод был применен к задаче о распространении тепла. (С. Пуассон, Г. Ламе, М.В. Остроградский и др.).

$$v''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]v(x) = 0, \ a < x < b,$$

$$v(a) = v(b) = 0.$$

Функции p и q непрерывны на $[a, b]$, $p(x) > 0$.

Система собственных (фундаментальных) функций $\{v_k(x), k = 1, 2, \ldots\}$ замкнута (полна).

Теорема Стеклова. *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая условиям*

$$|f(x)-f(x')| \leq C|x-x'|, \; x \in [a,b], x' \in [a,b]$$

$$f(a) = f(b) = 0$$

разлагается во всем промежутке $[a,b]$ *в равномерно сходящийся ряд*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)$$

в котором

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x) v_k(x) dx.$$

2. Результаты В.А. Стеклова по разрешимость основных краевых задач для уравнения Пуассона.

Основные результаты в этом направлении — строгое доказательство существования решений внутренних и внешних задач Дирихле, Неймана и третьей краевой задачи для широкого класса областей при минимально возможных предположениях относительно граничных функций. Этому кругу вопросов посвящены работы Стеклова 1897 — 1902 годов. Результаты исследований подробно изложены во второй части его книги "Основные задачи математической физики".

Ограниченная область $D \subset \mathbf{R}_3$ и неограниченная область $D' = \mathbf{R}_3 \setminus \bar{D}$, $\partial D = \partial D' = S$; $\nu = \nu_x$ — нормаль (единичная и внешняя к D) к S в точке $x \in S$.

Внутренняя задача Дирихле.

$$u \in C^2(D) \text{ и для всех } x \in D \; \Delta u(x) = f(x)$$

$$u \in C(\bar{D}) \text{ и для всех } x \in S \; u(x) = u_0(x).$$

Теорема об однозначной разрешимости внутренней задачи Дирихле. *Для любой непрерывной граничной функции u_0 и любой непрерывной в $\bar{D}$ и удовлетворяющей условию Гёльдера внутри области D правой части f существует единственное решение задачи Дирихле.*

Условие $u_0 \in C(S)$ необходимо для существования решения. Условие на f близко к точному; его можно немного ослабить, заменив условием Дини. Но для непрерывной f утверждение неверно.

Введенное в 1882 году О. Гёльдером в его диссертации

Beiträge zur Potentialtheorie. Stuttgart. 1882

условие $(f \in C^{\alpha}(D), 0 < \alpha < 1)$ имеет вид

для каждой точки области D существует такая окрестность и такое положительное число C , что для любых точек x и y из этой окрестности справедлива оценка

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Объёмный потенциал

$$U(x) = \int_D \frac{f(y)}{|x - y|} dy$$

с плотностью $f \in C^{\alpha}(D)$ является решением в области D уравнения Пуассона.

Достаточно исследовать разрешимость основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Неймана.

$u \in C^2(D) \quad$ и для всех $x \in D$ $\Delta u(x) = f(x)$

$$\forall x \in S \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x) = u_0(x).$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x)$$

— правильная внутренняя нормальная производная, то есть равномерный по $x \in S$ предел

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_x}(x - t\nu_x) \text{ при } t \to +0.$$

Теорема о разрешимости внутренней задачи Неймана. *Для любых* $u_0 \in C(S)$ *и* $f \in C(\bar{D}) \cap C^{\alpha}(D)$, *удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_S u_0(x)ds$$

существует решение задачи Неймана. Любые два решения этой задачи отличаются на постоянную.

Решение задачи Неймана с непрерывной u_0 не обязано принадлежать $C^1(\bar{D})$. Непрерывную дифференцируемость решения в замыкании области можно обеспечить требованием $u_0 \in C^{\beta}(S)$.

Для внешних задач Дирихле и Неймана дополнительно требуется условие убывания решения на бесконечности.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

К. Гаусс, 1828 г.

П. Дирихле, до 1857 года; минимум интеграла Дирихле

$$\int\limits_D |\nabla v(x)|^2 dx$$

К. Нейман, 1870 г.

Существование решений задачи Дирихле и "основной задачи гидродинамики" (задачи Неймана).

Метод Неймана (метод последовательных приближений) проходил только для выпуклых областей и использовал в то время недоказанное и в общем случае неверное утверждение о существовании и совпадении предельных значений изнутри $\frac{\partial W_i}{\partial \nu}$ и извне $\frac{\partial W_e}{\partial \nu}$ производных по нормали потенциала двойного слоя

$$W(x) = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \mu(y) ds_y.$$

Достаточное условие :
$\exists C$ и $\exists \beta > 0 \ \forall x^0 \in S \ \forall \rho$

$$\int\limits_0^{2\pi} (\mu(\rho, \omega) - \mu_0)\, d\omega \le C\rho^{1+\beta}$$

$\mu_0 = \mu(x^0)$ было получено А.М. Ляпуновым в 1898 г.

A. Liapounoff. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet, Journal des Mathématiques, Paris. 1898.

Условие точное: взять в нем $\beta = 0$ нельзя. Не гарантирует выполнение этого свойства и непрерывная дифференцируемость μ.

Невыпуклая область.

Первый результат был получен в 1896 г. А. Пуанкаре

La méthode de Neumann et le probléme de Dirichlet", Acta Mathematica, 1, 20, Stockholm, 1896.

Доказательство опиралось на утверждение о существовании и совпадении правильных нормальных производные потенциала двойного слоя и на оценку

$$\frac{1}{m} < \int\limits_{D'} |\nabla V(x)|^2 dx / \int\limits_{D} |\nabla V(x)|^2 dx < m.$$

потенциала простого слоя

$$V(x) = \int\limits_{S} \frac{\rho(y)}{|x-y|} ds_y,$$

плотность которого удовлетворяет условию

$$\int\limits_{S} \rho(x) ds_x = 0.$$

Фундаментальная теорема Пуанкаре. В её доказательстве имелся пробел.

В 1899 году А. Корн ликвидировал этот пробел в случае звездной области D.

A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Berlin, 1899.

В.А. Стеклов в работах

W. Stekloff. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris. 1899. 128. 588 – 591,

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1900. 2/ 207 – 272.

обосновывает справедливость теорем о разрешимости для поверхностей S, для которых справедлива фундаментальная теорема Пуанкаре. В последствии Стеклов дал независимое доказательство теоремы о существовании решения и получил фундаментальную теорему Пуанкаре как следствие теоремы о разрешимости.

В 1901 году С. Заремба в работе

Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie

доказал справедливость для любой поверхности Ляпунова приведенных оценок для отношения потенциалов, плотности которых берутся из дополнения к пространству достаточно большой размерности p. При этом постоянная $m = m(p)$ в этих оценках стремится к единице при $p \to \infty$.

Доказательство этого результата (Стеклов назвал его фундаментальной теоремой Пуанкаре — Зарембы) опирается на аналогичную оценку для обобщенного потенциала простого слоя

$$v(x) = \int\limits_S \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}\omega(y)ds_y,$$

порожденного уравнением $\Delta v - \kappa^2 v = 0$ с достаточно большим коэффициентом κ. Эти результаты Стеклов существенно использовал при доказательстве своих теорем.

Проведенное В.А. Стекловым исследование разрешимости основных краевых задач базируется на изучении "основной задачи электростатики" — задачи Робена: *найти такую плотность* ρ *потенциала простого слоя* V, *при которой потенциал является постоянной функцией внутри* S *(в области* D*).* ρ — ненулевое решение интегрального уравнения Робена

$$\rho(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \rho(y) \frac{\partial}{\partial_{n_x}} (\frac{1}{|x-y|}) ds_y.$$

G. Robin, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, CIV, 1887.

Если существует отличное от тождественного нуля решение этого уравнения, то оно может быть найдено методом последовательных приближений. Однако вопрос о существовании такого решения (собственной функции соответствующего интегрального оператора) оставался открытым.

Существование положительного решения и одномерность соответствующего собственного подпространства было доказано В.А. Стекловым сначала для выпуклой дважды гладкой поверхности

Сообщения Харьковского математического общества, сер. 2, 1897, V,

а затем для произвольной поверхности Ляпунова

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série 2, 1900, 2.

Доказательство этой теоремы основано на следующей идее: последовательные приближения

$$\rho_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{\rho_{k-1}(y) \cos\psi}{|x-y|^2} ds_y$$

где ψ — угол между нормалью в точке x и вектором $x - y$, рассматриваются на инвариантном множестве

$$\int\limits_S \rho ds = M \neq 0$$

и устанавливаются оценки

$$|\rho_k - \rho_{k-1}| \leq \text{const}\, \tau^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

с $\tau < 1$.

В случае выполнения этих неравенств Стеклов говорит, что к поверхности S применим принцип Робена. Для ограниченных такими поверхностями областей доказываются теоремы о разрешимости основных краевых задач.

Основная трудность — это доказательство применимости принципа Робена к любой поверхности Ляпунова.

W. Stekloff. Sur les problèms fondamentaux de la physique mathh́matique. Annales scietif. de l'École normale supérieure. série 3. 1902. 19. 191 –259, 455 – 490.

Оно существенно опирается на результаты Зарембы и доказанной с их помощью следующей теоремы.

Для любой непрерывной функции f существует потенциал простого слоя V, удовлетворяющий на поверхности S условию

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f,$$

и он является мероморфной функцией параметра λ. Причем её полюса лежат вне открытого единичного круга.

Это утверждение тесно связано с изучением собственных функций введенного в 1895 году Стекловым оператора, ставящего в соответствие непрерывной на S функции φ, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_S \varphi ds = 0,$$

значение на S решения V задачи Неймана с граничной функцией φ. Этот оператор называют *оператором Стеклова*, а его собственные функции — *фундаментальными функциями Стеклова.* Они являются естественным аналогом сферических функций.

Развитие результатов В.А. Стеклова.

В своих исследованиях Стеклов не пользовался теорией интегральных уравнений. Использование теорем Фредгольма существенно облегчает доказательство существования решения. Однако существенного усиления результатов Стеклова применение этой теории не дает. По этому поводу см., например, книгу Н.М. Гюнтера "Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики." М., Гостехиздат, 1953.

Ослабление требований на гладкость границы.

Метод Перрона. Регулярность граничной точки.

Предложенный О. Перроном

Perron O. Math. Zeit. 1923. 18. 42 – 54

метод построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа отделяет задачу существования решения от изучения его граничного поведения. Он элементарен и опирается только на принцип максимума и разрешимость задачи Дирихле в шаре (Г. Шварц).

Идея метода принадлежит А. Пуанкаре (méthode du balayade)

American Journal. XII. 1889.

S_{u_0} — множество всех непрерывных в замыкании области D субгармонических функций, удовлетворяющих на границе неравенству $v \le u_0$. Функция

$$u(x) = \sup_{v \in S_{u_0}} v(x)$$

(*Решение Перрона*) гармонична в D.

$x^0 \in \partial D$ — *регулярная точка*, если

$\forall u_0 \in C(S)$ решение Перрона u непрерывно в x^0 и $u(x^0) = u_0(x^0)$.

Достаточные условия регулярности.

$n = 2$. x^0 является концом лежащей вне $\bar{D} \setminus x^0$ кривой.

n = 3. Можно коснуться x^0 извне конусом, получающимся вращением вокруг оси x_1 кривой $x_2 = x_1^k$.

См., например, И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными.

Lebesque H. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. 24. 371 –402.

Заменить степенной порядок касания в вершине конуса экспоненциальным нельзя.

Критерий регулярности граничной точки. Wiener N. The Dirichlet problem. J. Math. and Phys. 1924. 3. 127 – 146.

$$\operatorname{cap} Q =$$

$$\inf \left\{ \int\limits_{Q} |\nabla v(x)|^2 dx : v \in C_0^1(\mathbf{R}_n), v(x) = 1 \text{ на} Q \right\}.$$

Критерий Винера. Точка $x_0 \in \partial D$ регулярна тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{cap}\{x \in Q : |x - x^0| < \lambda^k\} \lambda^{-k(n-2)}\}.$$

О дальнейшем развитии этой тематики см. работу М.В. Келдыша, Успехи матем. наук, VIII, 1941, 171 – 231.

Метод сеток.

Существование решения задачи Дирихле доказано методом сеток в работах:

Л.А. Люстерник, Матем. сборник, 33, 2, 1926, 173 – 201

(для $n = 2$)

И.Г. Петровского, Успехи матем. наук, VIII, 1941, 161 – 170

(для произвольного n).

Эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x).$$

Результаты справедливы и для общего уравнения при условии неположительности коэффициента при свободном члене. Если этот коэффициент принимает и положительные значения, то нужны условия малости области.

Теорема о единственности решения немедленно следует из принципа максимума. Сильный принцип максимума был доказан в 1927 году Э. Хопфом

Hopf E. Sitz. Ber. Preuss Akad. Wissensch. Berlin. Math.-Phys. Kl. 19. 1927. 147 – 152.

Доказательство существования решения базируется на идее замораживания коэффициентов: уравнения с гладкими коэффициентами можно локально рассматривать как возмущения уравнений с постоянными коэффициентами.

Проблема существования и основные свойства решений задачи Дирихле были исследованы в 1929 - 1932 годах Г. Жиро

Giraud G. Ann. Sci. École Norm. Sup. 1929, 46, 3, 131 – 245; 1932, 49, 3, 1 – 104, 245 – 309

методом интегральных уравнений, связанным с представлением решения в виде поверхностных интегралов (потенциалов).

Метод Шаудера.

Основой метода Шаудера

Schauder J. Math. Zeit. 1934. 38.257 – 282; Studia Math. 1935. 5. 34– 42) являются априорные оценки решений в $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ и разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этом пространстве. Последнее утверждение и оценки решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона были получены в 1909 году А. Корном.

Граница области достаточно гладкая, коэффициенты и правая часть уравнения непрерывны по Гёльдеру в $\bar{D}$ с некоторым показателем α, а $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Достаточно рассмотреть случай $u_0 = 0$. Уравнение с переменными коэффициентами и уравнение Пуассона непрерывно соединяются семейством эллиптических уравнений $tLu + (1-t)\Delta u = f$. Ограниченность обратного оператора для оператора Лапласа и равномерные по параметру априорные оценки норм Гёльдера вторых производных решения позволяют утверждать, что каждый из этих операторов отображает $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ на все пространство $C^{\alpha}(\bar{D})$. Таким образом, получается безупречный во всех отношениях результат об осуществляемом оператором L изоморфизме указанных пространств.

Непосредственное, не использующее теорему существования доказательство результата о непрерывности по Гёльдеру вторых производных решения (из $C^2(D)$) было получено в 1932 году Хопфом

Hopf E. Math. Z. 1932. 34. 194 – 233.

Его метод, основанный на идее Корна

Korn A. Berlin: Schwarz Festschrift. 1914. 215 – 229

возмущения уравнения с постоянными коэффициентами предвосхищает некоторые важные аспекты теории Шаудера.

Теорема о существовании решения из $C^{2+\alpha}(D)$ задачи Дирихле с непрерывной граничной функцией. Распространение метода Перрона.

Эквивалентность регулярности граничной точки относительно оператора L и ее регулярности относительно оператора Лапласа.

О.А. Олейник. Матем. сб. 24: 1. 1949. 3 – 14.

Дальнейшие результаты в этом направлении (уточняющие условия на коэффициенты уравнения, при которых справедлива эта теорема об эквивалентности) содержатся в работах Р.-М. Эрве (1962), Н.В. Крылова (1967), Ю.А. Алхутова (1981); полные ссылки на эти работы можно найти, например, в монографии

Д.Гилбарг, Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

Пространства Соболева. Обобщенные решения.

С.Л. Соболев

ДАН СССР. 1936. 1. 267 – 270,

Матем. сб. 1938. 4:3. 471 – 497,

Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 1950.

Пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций и теоремы вложения.

$v_{x_i} \in L_1(D)$ — *обобщенная производная функции* $v \in L_1(D)$, если

$\forall \eta \in C_0^\infty(D)$

$$\int_D v_{x_i}(x)\eta(x)dx = -\int_D v(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)dx.$$

Множество функций из $L_2(D)$, у которых существуют принадлежащие $L_2(D)$ обобщенные производные по всем $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, называется пространством $W_2^1(D)$. Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^1(D)} = \int_D [(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)w(x)]dx.$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ — замыкание множества $C_0^\infty(D)$.

$$(v, w)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} = \int_D (\nabla v(x), \nabla w(x))dx.$$

— эквивалентное скалярное произведение на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Гладкая поверхность $\Gamma \subset \bar{D}$. $v\mid_\Gamma \in L_2(\partial D)$ — след v на Γ; $W_2^{1/2}(\partial D)$. Если $\partial D \in C^1$ и $v \in W_2^1(D)$,то

$$v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D) \Longleftrightarrow v\mid_{\partial D} = 0.$$

Обобщенное решение.

Метод гильбертова пространства или вариационный подход к задаче Дирихле.

Hilbert D. Jber. Deutsch. Math. 1900. 8. 184 – 188.

Lebesque H. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. 24. 371 – 402.

Вариационный подход (нахождение минимума функционала энергии) немедленно приводит к следующей постановке задачи Дирихле.

Пусть $u_0 \in W_2^1(D)$, а $f \in W_2^{-1}(D)$. В частности,

$$\langle f, \eta \rangle = \int_D \eta \tilde{f} dx$$

с $\tilde{f} \in L_2(D)$.

Функция $u \in W_2^1(D)$ называется *обобщенным решением задачи Дирихле*, если

$$u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$$

и

$$\int\limits_D \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx = \langle f, \eta \rangle$$

для всех $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$; a_{ij} — измеримые и ограниченные функции.

Обобщенное решение существует для любых $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial D)$ и $f \in W_2^{-1}(D)$, решение единственно и справедлива оценка. Теорема об изоморфизме.

В случае общего эллиптического уравнения второго порядка задача сводится к операторному уравнению в пространстве $W_2^1(D)$ с вполне непрерывным оператором. Компактность оператор вложения $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$:

Rellich F. Math. Nachr. 1930. 31. 30 – 35;

Кондрашов В.И. ДАН СССР. 1945. 48. 563 — 566.

Естественное и удобное для исследования понятие обобщенного решения имеет один довольно существенный недостаток. Оно не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе функция является следом функции из $W_2^1(D)$. Это вызвано жестким требованием на выполнение граничного условия. Поэтому естественно расширить определение обобщенного решения. Можно рассмотреть обобщенное решение с $u_0 \in C(\partial D)$. Критерий Винера.

Естественным и наиболее простым пространством, содержащем и $C(\partial D)$ и $W_2^{1/2}(\partial D)$ является $L_2(\partial D)$ (можно $L_p(\partial D), p > 1$).

Решение с граничной функцией из L_2.

Как было показано в 1960 году И. Нечасом (Чехослов. матем. журнал. 10. 283 – 298) оператор, ставящий в соответствие граничной функции u_0 решение u задачи Дирихле (для простоты ограничимся случаем однородного уравнения) и рассматриваемый как оператор из $L_2(\partial D)$ в $L_2(D)$ является ограниченным оператором. Следовательно, его замыкание определено на всем $L_2(\partial D)$. Но пространство $L_2(D)$ слишком широкое, явное описание получаемой при таком расширении постановки задачи Дирихле и вариационный метод требуют существование у решения производных первого порядка.

В.П. Михайлов. Дифференц. уравнения. 1976. 12. 1877 – 1891.

Пусть $\partial D \in C^2$ и, для простоты, $f = 0$.

Функция u является *решением из* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$, если

$u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$, уравнение выполняется как равенство обобщенных функций,

$$\int\limits_{\partial D} (u(x - \delta\nu(x)) - u_0(x))^2\, ds \to 0 \,\text{при}\, \delta \to +0.$$

При условии гладкости коэффициентов a_{ij} задача однозначно разрешима и для решения справедлива оценка

$$\int\limits_D \operatorname{dist}(x,\partial D)|\nabla u|^2 dx + \sup_{\delta\in(0,\delta_0)} \int\limits_{\partial D} u^2(x-\delta\nu(x))ds \leq \mathrm{const}\,\|u_0\|^2_{L_2(\partial D)}$$

с достаточно малым положительным δ_0.

Для общего уравнения второго порядка теорема о разрешимости имеет такой же вид, как и для задачи в $W_2^1(D)$: набор собственных значений с учетом кратности совпадает, совпадают и соответствующие им собственные подпространства.

Другое, более близкое к классической постановке определение решения задачи Дирихле, не использующее выделенное направление (нормали ν) и гладкость границы.

Гущин А.К. Матем. сб. 1988. 137. N 1. 19-64.

Роль пространства непрерывных функций играет следующее пространство $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\overline{Q})$.

μ — неотрицательная борелевская мера μ, $\operatorname{supp}\mu \subset \bar{D}$,

$\exists C = C(\mu)\ \forall x^0 \in \bar{D}\ \ \forall r > 0$

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq Cr^{n-1},$$

$\|\mu\| = \inf\{C\} < \infty$.

Истоки этой терминологии:

Carleson. L. Ann. of Math. 1962. 76. 547–559.

Hormander. L. Math. scand. 1967. 20. 65–78.

Пусть μ и υ — единичные меры, $\|\mu\| < \infty$, $\|\upsilon\| < \infty$. ϕ — мера в $\mathbf{R}_{2n}$, *соединяющая* меры μ и υ:

$$\phi(G \times \mathbf{R}_n) = \mu(G),$$
$$\phi(\mathbf{R}_n) \times G) = \upsilon(G)$$

для всех борелевских множеств $G \subset \mathbf{R}_n$.

$v \in C_{n-1}(\bar{Q})$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \mu \; \forall \upsilon$ и ϕ, соединяющей μ и υ и удовлетворяющей неравенству

$$\int_{\mathbf{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta,$$

выполняется оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\upsilon\|} \int_{\mathbf{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^2 d\phi(x, y) < \varepsilon.$$

$C_{n-1}(\bar{Q})$ — банахово пространство с нормой

$$\|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup_{\mu} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\mathbf{R}_n} |v(x)|^2 d\mu$$

$(n-1)$-мерно непрерывные функции имеют следы $v\,|_{\Gamma} \in L_2(\Gamma)$ на любой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности Γ и множество следов на Γ всех таких функций совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Определение решения. Функция u называется $(n-1)$-*мерно непрерывным решением задачи Дирихле*, если

$u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ и удовлетворяет уравнению,

$u \in C_{n-1}(\bar{Q})$ и $u\,|_{\partial D} = u_0$.

Разрешимость задачи Дирихле

Пусть $\partial Q \in C^1$ нормаль к ∂Q непрерывна по Дини, а коэффициенты уравнения удовлетворяют условию Дини на границе.

Для любой $u_0 \in L_2(\partial D)$ и $f \in W_2^{-1}(D)$ существует решение задачи Дирихле. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\int\limits_D \operatorname{dist}(x, \partial D)|\nabla u|^2 dx + \|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} \leq$$

$$\operatorname{const}\left[\|u_0\|^2_{L_2(\partial D)} + \|f\|)_{W_2^{-1}(D)}\right]$$

Условия на коэффициенты не являются точными. Однако совсем отказаться от них нельзя, теряется единственность решения.

Близкие к точным условиями на правую часть получены в работе

Гущин А.К., Михайлов В.П. Матем. сб. 1991. 182. N. 6. 787–810.

Для общего эллиптического уравнения второго порядка разрешимость исследована в 2011 году В.Ж. Думаняном

Математический сборник. 2011. 202. є 7. 75-94.

Аналогичные утверждения справедливы и для $u_0 \in L_p(\partial D)$ с $p > 1$

Гущин А.К. ТМФ. 2013. 174:2. 243255 .