Российская академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

В. В. Козлов

В. А. Стеклов и задача о падении тяжелого твердого тела в жидкости

2013

Уравнения Кирхгофа

$$\dot{m} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + p \times \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial m},$$

m — импульсивный момент, p — импульсивная сила,

$2H = (Am, m) + 2(Bm, p) + (Cp, p)$ — кинетическая энергия системы тело + жидкость.

Это — уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $e(3)$.

Законы сохранения: $F_1 = H, \quad F_2 = (m, p), \quad F_3 = (p, p)$.

Если существует дополнительный первый интеграл F_4 (независимый с F_1, F_2 и F_3), то уравнения Кирхгофа вполне интегрируемы.

$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3), \quad C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$.

1°. *Случай Кирхгофа* (1870): $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$,

$$F_4 = m_3.$$

2°. *Случай Клебша* (1871): $b_1 = b_2 = b_3$ и

$$a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0. \tag{1}$$

3°. *Случай Стеклова–Ляпунова* (1893):

$$a_1^{-1}(b_2 - b_3) + a_2^{-1}(b_3 - b_1) + a_3^{-1}(b_1 - b_2) = 0, \tag{2}$$

$$c_1 - (b_2 - b_3)^2 a_1^{-1} = c_2 - (b_3 - b_1)^2 a_2^{-1} = c_3 - (b_1 - b_2)^2 a_3^{-1}.$$

4°. *Частный случай Чаплыгина* (1902):

$$2H = a(m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2) + b(m, p) + a((d + c)p_1^2 + (d - c)p_2^2 + dp_3^2),$$

b, d — несущественные параметры; $F_2 = (m, p) = 0$

$$F_4 = (m_1^2 - m_2^2 + cp_3^2)^2 + 4m_1^2 m_2^2$$

Теорема (Козлов–Онищенко, 1982). ***Пусть $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ и числа a_1, a_2, a_3 различны. Если имеется дополнительный (к функциям F_1, F_2, F_3) аналитический интеграл, то $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и выполнено (2).***

Если $B = 0$, то новый аналитический интеграл существует лишь в случае, когда $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и выполнено (1).

Ю. В. Баркин – А. В. Борисов (1989), С. Т. Садэтов (1990). Остался не до конца рассмотренным случай, когда $a_1 = a_2 = a_3$.

5°. *Случай В. В. Соколова* (2001):

$$2H = m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2 + am_3p_1 - a^2p_3^2,$$

F_4 — многочлен четвертой степени,

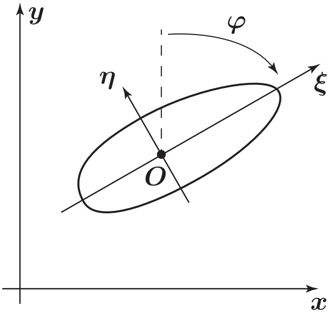
B — недиагональная матрица.

6°. *Частный случай Соколова–Цыганова* (2002):

$$2H = m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2 + a_1(2m_3p_1 - m_1p_3) + a_2(2m_3p_2 - m_2p_3),$$

$$F_4 = (m_3 + a_1p_1 + a_2p_2)(m_1^2 + m_2^2); \qquad F_2 = (m, p) = 0.$$

Задача о падении



$T = \frac{1}{2}(a_1 u^2 + a_2 v^2 + b\omega^2)$ — кинетическая энергия системы «тело + жидкость»;

$a_2 \geqslant a_1$ и $\omega = -\dot\varphi$

Уравнения Кирхгофа:

$a_1 \dot u - a_2 \omega v = -p\cos\varphi,$

$a_2 \dot v + a_1 \omega u = -p\sin\varphi,$

$b\dot\omega + (a_2 - a_1)uv = 0.$

Рассматривается «уравновешенный» случай, когда суммарный момент веса тела и силы Архимеда относительно точки O равен нулю; p — вес системы «тело—жидкость».

$$a_1 u = -pt\cos\varphi + s\cos(\varphi + \alpha), \quad a_2 v = -pt\sin\varphi + s\sin(\varphi + \alpha),$$

$$s, \alpha = \text{const}; \quad s \text{ — начальный «толчок» тела,}$$

$$\ddot\varphi = \frac{a_2 - a_1}{b} uv; \qquad \dot x = u\sin\varphi - v\cos\varphi, \quad \dot y = u\cos\varphi + v\sin\varphi$$

В. А. Стеклов (1893), С. А. Чаплыгин (1890, опубликовано в 1933)

$$\ddot{\varphi} = kt^2 \sin\varphi\cos\varphi, \qquad k = \frac{a_2 - a_1}{b a_1 a_2}\, p^2 \geqslant 0, \tag{3}$$

$\psi = 2\varphi$, $\ddot{\psi} = kt^2 \sin\psi$ — «нестационарный» маятник.

Теорема (1989). *Это уравнение не допускает первого интеграла вида* $\displaystyle\sum_{s=0}^{n} a_s(\psi, t)\dot{\psi}^s$ *с* 2π*-периодическими коэффициентами.*

Замена времени: $\tau = \dfrac{t^2}{2}$, $(\,\cdot\,)' = \dfrac{d(\,\cdot\,)}{d\tau}$.

$\varphi'' + \dfrac{\varphi'}{2\tau} = k\sin\varphi\cos\varphi$; второе слагаемое дает вязкое трение;

$$E = \frac{(\varphi')^2}{2} + \frac{k}{2}\cos^2\varphi, \qquad E' = -\frac{(\varphi')^2}{2\tau} \leqslant 0.$$

Следовательно, равновесия $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ устойчивы,

а равновесия $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ неустойчивы.

$\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$:  $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$: 

Теорема (1989). *Для почти всех начальных данных* $\varphi_0, \dot\varphi_0$

$$\varphi(t) \to \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \qquad \frac{\dot\varphi(t)}{t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

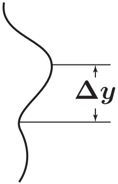
Асимптотика при больших t: $\quad \delta(t) = \varphi(t) - \dfrac{\pi}{2}$,

$$\delta(t) \sim \frac{c}{\sqrt{kt}} \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\, t^2 + \psi_0\right), \quad \dot\delta \sim c\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\, t^2 + \psi_0\right),$$

$$c, \psi_0 = \mathrm{const}.$$

Нули $\delta(t)$ **имеют асимптотику** $\; t_n \sim \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt[4]{k}}$.

Траектория падающего тела при нулевом начальном толчке

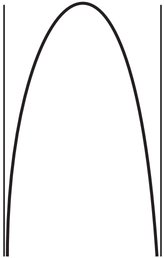


$$\Delta y \sim \frac{\pi p}{a_2\sqrt{k}},$$

$$x(t) \to \mathrm{const},$$

$$\frac{\dot y(t)}{t} \to \mathrm{const},$$

однако $\dot x(t)$ **и** $\ddot y(t)$ **неограничены.**



Это — двоякоасимптотическая траектория, когда при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ тело совершает один полный полуоборот.

$$\min \int_{-\infty}^{\infty} L\,dt, \qquad L = \frac{\dot{\psi}^2}{2} + k(1 - \cos\psi)t^2 \geqslant 0$$

При этом $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \ddot{y}(t) = -\dfrac{p}{a_2}$.

С. В. Болотин доказал существование двоякоасимптотических движений с любым числом полуоборотов тела.

В. А. Стеклов. Работы по механике 1902–1909 гг. Переводы с французского. Москва–Ижевск: Ин-т компьют. иследований. 2011.

А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Ин-т компьют. иследований. 2005.

Некоторые обобщения

$T = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$ — кинетическая энергия,

$V(x_1, \ldots, x_n)$ — потенциальная энергия.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -p(t)\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad p(t) > 0.$$

Это — уравнения Лагранжа с лагранжианом $L = T - pV$.

Пусть $x = 0$ — положение равновесия: $dV(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $x = 0$ — локальный максимум гладкой функции V. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.*

Теорема 2. *Пусть $\dot{p} \geqslant 0$ и V имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум. Тогда равновесие $x = 0$ устойчиво по отношению к координатам $x_1, \ldots, x_n$.*

$$\tau = g(t), \quad \dot{g} = \sqrt{p},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x} - Gx'k(\tau), \qquad G = \|g_{ij}\|, \quad k = \frac{\dot{p}}{2p^{3/2}},$$

$$(T^* + V)' = -k(Gx', x') = -2kT^* \leqslant 0.$$

Теорема 3. *Пусть*

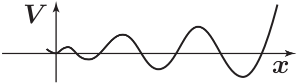
$$1)\ \ \dot p \geqslant 0, \qquad 2)\ \ \lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty, \qquad 3)\ \ \ddot p\, p \leqslant \frac{3}{2}\,\dot p^2$$

и функция V *аналитична по* $x_1, \ldots, x_n$ *в окрестности точки* $x = 0$. *Тогда, если* V *имеет в точке* $x = 0$ *строгий локальный минимум, то равновесие* $x = 0$ *асимптотически устойчиво по отношению к* $x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \to 0$ *при* $t \to +\infty)$. *Если же функция* V *не имеет в точке* $x = 0$ *локального минимума, то равновесие* $x = 0$ *неустойчиво по отношению к* $x_1, \ldots, x_n$.

Условие 3) $\iff$ $k(\tau)$ монотонно убывает при увеличении τ.

$$ct^\alpha, \quad ce^{\alpha t}, \quad c\ln(\alpha t) \quad (c, \alpha > 0); \qquad \int_{\tau_0}^{\infty} k\, d\tau = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\dot p}{2p}\, dt = \infty.$$

Теорема 3 не справедлива для бесконечно дифференцируемых функций. Контрпример: $V(0) = 0$ и $V(x) = e^{-x^2} \cos \dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$.



ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.

Вопрос о справедливости второй части теоремы 3 при $p = 1$ — знаменитая гипотеза А. М. Ляпунова (1897).

В. П. Паламодов (1977 и 1995).

Пусть $V = V_2 + V_3 + \cdots$ — ряд Маклорена потенциальной энергии и $x = 0$ — не точка минимума V_2. Тогда уравнения имеют асимптотическое решение

$$\sum_{s=1}^{\infty} x_s(t)\, e^{-s\lambda t}, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \tag{4}$$

где $x_s(t)$ — многочлен по t с постоянными коэффициентами.

Пусть $V = V_2 + V_m + V_{m+1} + \cdots$, $m \geqslant 3$, причем $V_2 \geqslant 0$ и $\Pi = \{x : V_2(x) = 0\}$ имеет $\dim > 0$. Если ограничение V_m на Π не имеет в точке $x = 0$ минимума, то система допускает асимптотическое решение вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{x_s(\ln t)}{t^{s\mu}}, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{5}$$

$x_s(\,\cdot\,)$ — многочлены с постоянными коэффициентами.

Вопрос: если $x = 0$ — не точка минимума аналитической функции V, то всегда ли уравнения движения имеют асимптотическое решение вида (4) или (5), или же необходимы ряды с кратными логарифмами?