

Пример.

Фазовое пространство $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Точка из $\mathbb{T}$ обычно обозначается через s (её можно считать числом mod 1), точка из $\mathbb{R}$ — через x (это обычное вещественное число). Фазовые точки, стало быть, суть пары (s, x) . Будем рассматривать систему ОДУ

$$\dot{s} = 1, \quad \varepsilon \dot{x} = -x + f(s), \quad (1)$$

где f — вещественная аналитическая функция (на $\mathbb{T}$). Время обычно обозначается через t . С некоторой условностью можно перейти к записи

$$\varepsilon \dot{x} = -x + f(x). \quad (2)$$

f теперь — вещественная аналитическая периодическая функция на числовой оси с периодом 1.

Из (2) следует, что

$$x = f - \varepsilon \dot{x}, \text{ подробнее: } x(t, \varepsilon) = f(t) - \varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) \quad (3)$$

(точка = дифференцирование по t). Заменяем в (3) последний (самый правый) символ x на $f - \varepsilon \dot{x}$. Получим

$$x = f - \varepsilon \dot{f} + \varepsilon^2 \ddot{x}.$$

Опять заменим последнее x на $f - \varepsilon \dot{x}$:

$$x = f - \varepsilon \dot{f} + \varepsilon^2 \ddot{x},$$

и так далее. Получается, что при любом $n > 0$

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n (-\varepsilon)^k f^{(k)}(t) + (-\varepsilon)^{n+1} x^{n+1}(t, \varepsilon).$$

А это означает, что $x(t)$ допускает при каждом t разложение в асимптотический ряд по степеням ε (зависящий от параметра t)

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k f^{(k)}(t). \quad (4)$$

Действительно, частичная сумма этого ряда

$$S_n(\varepsilon; t) = \sum_{k=0}^n (-\varepsilon)^k f^{(k)}(t)$$

отличается от $x(t, \varepsilon)$ на величину порядка ε^{n+1} .

Оказывается, что ряд (4), вообще говоря, расходится. Поскольку он зависит от двух независимых переменных (t и ε), причём (4) является степенным рядом по одной из них (по ε), а по другой (по t) — нет (от t каким-то образом зависят коэффициенты упомянутого ряда), то стоит уточнить, как именно понимается сходимость или расходимость такого ряда. Будет доказано

Утверждение 1. Если f не является целой функцией, то при любом t ряд (4) сходится только при $\varepsilon = 0$.

Непосредственно будет доказано утверждение, формулировка которого выглядит несколько иначе:

Утверждение 2. Если при каком-нибудь фиксированном t круг сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \varepsilon^k / k!$ (ряда Тейлора для функции $\varepsilon \mapsto f(t + \varepsilon)$) имеет конечный радиус, то при этом t ряд (4) сходится только при $\varepsilon = 0$.

Убедимся, что утверждение 2 $\longrightarrow$ утверждение 1. Если бы при каком-нибудь t круг сходимости ряда из утверждения 2 имел бесконечный радиус, то круг совпадал бы со всей плоскостью комплексного переменного $\mathbb{C}$ и функция f была бы целой. У нас же сказано, что функция f не целая. Стало быть, при любом t круг сходимости ряда из утверждения 2 имеет конечный радиус, а тогда это утверждение гарантирует, что при любом t ряд (4) сходится только при $\varepsilon = 0$. А в заключении утверждения 1 так и говорится.

Обозначим через R_t радиус круга сходимости ряда Тейлора функции $\varepsilon \mapsto f(t + \varepsilon)$, а через r_t — радиус круга сходимости ряда (4). По теореме Коши–Адамара, R_t и r_t следующим образом выражаются через коэффициенты этих рядов:

$$\frac{1}{R_t} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|/n!}, \quad \frac{1}{r_t} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|}.$$

Мы хотим доказать, что $r_t > 0 \longrightarrow R_t = \infty$, т.е.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|} < \infty \longrightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|/n!} = 0.$$

Допустим, что $\overline{\lim} \sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|} < \infty$. Возьмём какое-нибудь число a , большее этого предела. Тогда при всех достаточно больших n будет $\sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|} < a$. А n -ый элемент последовательности $\sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|/n!}$, верхний предел

которой равен $\frac{1}{R_t}$, в $\sqrt[n]{n!}$ раз меньше, чем $\sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|}$. Следовательно, при достаточно больших n будет

$$\sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|/n!} \leq \frac{a}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Из формулы Стирлинга видно, что $\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}(1 + o(1))$. При достаточно больших n это $> n/3$, значит, $\frac{a}{\sqrt[n]{n!}} < 3a/n$, $\sqrt[n]{|f^{(n)}(t)|/n!} < 3a/n$. Верхний предел при $n \rightarrow \infty$ равен 0, между тем он оценивает сверху $\frac{1}{R_t}$.