О понятии асимптотического решения

Д.В. Аносов

14 мая 2013 г.

Пример 1

$M = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^1$, $(s, x) \in M$.

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \varepsilon\dot{x} = -x + f(s) \end{cases}$$

$f(s)$ — аналитическая 1-периодическая функция.

$$\varepsilon\dot{x} = -x + f(t)$$

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n f^{(n)}(t).$$

$x = f(t) - \varepsilon\dot{x} = f(t) - \varepsilon\frac{d}{dt}(f - \varepsilon\dot{x}) = f(t) - \varepsilon\dot{f}(t) + \varepsilon^2\ddot{x} =$
$f(t) - \varepsilon\dot{f}(t) + \varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(f - \varepsilon\dot{x}) = \ldots.$

Пример 1

$$\varepsilon\dot{x} = -x + f(t) \tag{1}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\varepsilon)^n f^{(n)}(t) \tag{2}$$

Теорема

1. Ряд (2) *расходится для типичных f при всех $\varepsilon \neq 0$.*
2. При некоторых ε, сколь угодно близких к нулю, система (1) *не имеет* 1*-периодических решений.*

Доказательство.

1. Если ряд сходится при $\varepsilon = \varepsilon_0$, то в круге $\{|\varepsilon| < |\varepsilon_0|/2\}$ он сходится равномерно со всеми производными. Тогда там (2) — «настоящее» решение, 1-периодичное по построению. Это противоречит п. 2.

Пример 1

$$\varepsilon \dot{x} = -x + f(t) \tag{1}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n f^{(n)}(t) \tag{2}$$

Теорема

1. Ряд (2) расходится для типичных f при всех $\varepsilon \neq 0$.
2. При некоторых ε, сколь угодно близких к нулю, система (1) не имеет 1-периодических решений.

Доказательство.

2. Разложим $x(t)$ и $f(t)$ в ряды Фурье. Тогда

$$(2\pi i n \varepsilon + 1)\hat{x}_n = \hat{f}_n.$$

Если $\varepsilon = -1/2\pi i n$, а f такова, что $\hat{f}_n \neq 0$, то такого $\hat{x}_n$ не существует.

Пример 2

$$\varepsilon\dot{x} = e^{2\pi i t}x + 1 \tag{3}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \tag{4}$$

Пример 2

$$\varepsilon\dot{x} = e^{2\pi i t}x + 1 \tag{3}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \tag{4}$$

$$\begin{array}{l|r}
\varepsilon^n,\ n > 0 & \dot{x}_{n-1} = e^{2\pi i t}x_n \\
\varepsilon^0 & 0 = e^{2\pi i t}x_0 + 1
\end{array}$$

Пример 2

$$\varepsilon \dot{x} = e^{2\pi i t} x + 1 \tag{3}$$

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \tag{4}$$

Теорема

Уравнение (3) не имеет периодических решений.

Пример 2

$$\varepsilon\dot{x} = e^{2\pi i t}x + 1 \tag{3}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) \tag{4}$$

Теорема

Уравнение (3) не имеет периодических решений.

$$x(t) = C\exp\left(\frac{e^{2\pi i t}}{2\pi i\varepsilon}\right).$$

$$\dot{C}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{e^{2\pi i t}}{2\pi i\varepsilon}\right).$$

$$C(1) - C(0) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \exp\left(-\frac{e^{2\pi i t}}{2\pi i\varepsilon}\right)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{|z|=1}\exp\left(-\frac{z}{2\pi i\varepsilon}\right)\frac{dz}{2\pi i z} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Пример 2

$$\varepsilon\dot{x} = e^{2\pi i t}x + 1 \tag{3}$$

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n(t) \tag{4}$$

Теорема

Уравнение (3) не имеет периодических решений.

$$x(t) = C\exp\left(\frac{e^{2\pi i t}}{2\pi i\varepsilon}\right).$$

$$x(n) = x(0) + n\cdot\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{2\pi i\varepsilon}\right).$$