

**КВАНТОВАНИЕ
НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ
ПОЛЕЙ**

**ВНЕ РАМОК ТЕОРИИ
ВОЗМУЩЕНИЙ.**

А.А. Славнов

**Математический институт им. В.А. Стеклова
РАН.**

В теории поля постулируется, что элементарная частица описывается полем, которое при каждом x принадлежит представлению полупростой компактной группы Ли, т.е., если $\omega(x)$ - функция со значениями в калибровочной группе Ω

$$\psi(x) \rightarrow \psi^\omega(x) = \Gamma[\omega(x)]\psi(x) \quad (1)$$

Полевые конфигурации $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ и $\Gamma[\omega(x)]\psi(x)$, $A_\mu^\omega(x)$ описывают одну и ту же физическую ситуацию. Этот постулат называется принципом относительности в зарядовом пространстве. Аналогичный постулат используется для Абелевой группы $U(1)$, описывающей электромагнитное поле.

Здесь поле $A_\mu(x)$ на физическом языке называется калибровочным полем, и описывает параллельный перенос в зарядовом пространстве, а с точки зрения математики - это связность в главном расслоении. При калибровочных преобразованиях (1) оно преобразуется следующим образом

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^\omega(x) = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \partial_\mu\omega(x)\omega^{-1}(x) \quad (2)$$

Принцип относительности в зарядовом пространстве позволяет однозначно вводить взаимодействие путем замены обычной производной в свободном Лагранжиане на ковариантную производную

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - g\Gamma(A_\mu) \quad (3)$$

Свободный лагранжиан поля $A_\mu(x)$ равен квадрату тензора кривизны

$$L_0 = \frac{1}{8} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (4)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu A_\nu] \quad (5)$$

Как видно из формул (4, 5), калибровочное поле является безмассовым что в течение длительного времени препятствовало его использованию в моделях слабых взаимодействий, которые являются короткодействующими, т.е. соответствующими обмену массивной частицей.

В работах П.Хиггса и Ф.Англера и П.Брута было показано, как можно ввести массу векторного поля, сохраняя калибровочную инвариантность. Для этого нужно ввести калибровочно инвариантное взаимодействие скалярного поля со специальным потенциалом, генерирующим спонтанное нарушение глобальной симметрии теории, но сохраняющим ее калибровочную инвариантность. Соответствующий Лагранжиан для группы $U(1)$ имеет вид

$$L = (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi - \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^* \varphi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6)$$

Потенциал

$$-m^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^*\varphi)^2 \quad (7)$$

неустойчив и генерирует спонтанное нарушение глобальной симметрии, ответственной за сохранение заряда полей φ . С формальной точки зрения поля φ приобретают в таком потенциале мнимую массу. Для того, чтобы строить теорию возмущений по константе связи, необходимо предварительно сделать сдвиг полей φ на константу $\varphi \rightarrow \varphi + C$. Ясно, что сдвиг полей на константу (т.е. по сути дела замена переменных) не может нарушить калибровочную инвариантность теории, однако явный вид преобразований изменится.

Если до замены калибровочное преобразование поля φ было фазовым преобразованием, то после замены калибровочное преобразование поля φ включает сдвиг на произвольную функцию

$$\varphi(x) \rightarrow \exp\{i\alpha(x)\}\varphi(x) - C(\exp\{i\alpha(x)\} - 1) \quad (8)$$

Поле φ после сдвига при калибровочном преобразовании меняется на произвольную функцию, и наряду с векторным полем A_μ тоже становится калибровочным полем. При сдвиге поля φ на константу член $(D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi)$ генерирует массу векторного поля. Основная заслуга Хиггса состоит в том, что он показал, как можно ввести массу векторного поля не нарушая калибровочной инвариантности.

Калибровочно инвариантное действие описывает систему со связями, что не позволяет непосредственно применить методы квантования, основанные на гамильтоновости действия.

$$A = \int d^4x [p\dot{q} - H(p, q) + \lambda^a C^a] \quad (9)$$

Л.Д.Фаддеев и В.Н.Попов, Б.Де Витт: редукция калибровочно инвариантного действия к гамильтоновой системе H^* путем явного решения связей и наложения подходящих условий калибровки. $H(p, q) \rightarrow H^*(p^*, q^*)$. Те же методы применяются для анализа систем с спонтанно нарушенной симметрией, реализующих неэквивалентное представление канонических перестановочных соотношений.

Ковариантное локальное описание электромагнитного поля требует введения вектор-потенциала A_μ , который наряду с наблюдаемыми трехмерно поперечными возбуждениями имеет также нефизические продольную и временную компоненты. В то же время действие калибровочного поля инвариантно относительно калибровочной группы Ω .

Такая ситуация характерна для теории поля. Введение дополнительных нефизических возбуждений позволяет сформулировать теорию в более симметричном виде и показать, что за счет дополнительной симметрии нефизические возбуждения ненаблюдаемы.

Мы применим эту идею для построения процедуры однозначного квантования калибровочных полей вне рамок теории возмущений.

Даже в классической теории калибровочно инвариантная система не определяет корректную задачу Коши. Калибровочно инвариантное уравнение второго порядка при фиксированных начальных условиях не определяет решение однозначно. Если функция φ_1 является решением, то калибровочно преобразованная функция φ_1^ω тоже решение.

Процедура квантования калибровочных полей включает предположение о том, что после наложения подходящего условия калибровки задача Коши становится однозначно определенной. Это действительно имеет место в случае электродинамики, инвариантной относительно калибровочной группы $U(1)$. Выберем в качестве калибровочного условия кулоновскую калибровку $\partial_i A_i = 0, i = 1, 2, 3$. и рассмотрим это условие при переходе к калибровочно преобразованному полю $A_i^\varepsilon = A_i + \partial_i \varepsilon$.

$$\partial_i A_i^\varepsilon = \partial_i A_i + \Delta \varepsilon = 0 \quad (10)$$

По условию $\partial_i A_i = 0$ и следовательно функция ε удовлетворяет уравнению $\Delta\varepsilon = 0$, т.е. является гармонической функцией. Поскольку гармоническая функция достигает экстремума на границе, а для существования действия необходимо убывание полей на пространственной бесконечности, мы приходим к выводу, что $\varepsilon = 0$.

$$A = \int d^4x [p\dot{q} - H(p, q) + \lambda^a C^a] \quad (11)$$

Перейдем к неабелевой калибровочной группе $SU(N)$.

В кулоновской калибровке бесконечно мало калибровочно преобразованное поле A_i^ε должно удовлетворять условию $\partial_i A_i^\varepsilon = 0$.

$$\Delta \varepsilon^a + i g t^{abc} \partial_i (A_i^b \varepsilon^c) = 0 \quad (12)$$

Это уравнение имеет решения для полей, обращающихся в ноль на пространственной бесконечности. Выбор представителя в классе калибровочно эквивалентных конфигураций неоднозначен. Этот факт был впервые отмечен В.Н.Грибовым.

Это не сказывается на построении теории возмущений по константе связи. В рамках теории возмущений уравнение (12) имеет только тривиальные решения и неоднозначность отсутствует.

И.Зингер показал, что не существует калибровочного условия, которое обеспечивало бы однозначный выбор представителя в классе калибровочно эквивалентных конфигураций. Это можно сделать локально, но глобальный однозначный выбор невозможен.

Если игнорировать эту проблему и, невзирая на неоднозначность, проквантовать теорию, то при больших полях (вне рамок теории возмущений) переход от одной калибровки к другой становится сингулярным. Вопрос о квантовании калибровочных полей вне рамок теории возмущений остается открытым.

В теории поля рассматриваются два класса калибровок: дифференциальные и алгебраические калибровки.

Дифференциальные калибровки включают дифференциальный оператор. Примерами таких калибровок являются Кулоновская калибровка $\partial_i A_i = 0$ или калибровка Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0, \mu = 0, 1, 2, 3$. Алгебраические калибровки не включают дифференциального оператора. Примерами таких калибровок являются гамильтонова калибровка $A_0 = 0$ или аксиальная калибровка $A_3 = 0$.

Дифференциальные калибровки не являются однозначными и не пригодны вне рамок теории возмущений. Алгебраические калибровки также имеют ряд существенных недостатков, наиболее очевидный из которых, отсутствие явной инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Согласно теореме И.Зингера не существует релятивистски инвариантной калибровки, свободной от неоднозначности Грибова и следовательно, устраняющей калибровочный произвол вне рамок теории возмущений.

Проблему неоднозначности Грибова можно обойти путем использования альтернативной формулировки неабелевых калибровочных теорий на основе теорем эквивалентности для преобразований, меняющих спектр.

Обычная теорема эквивалентности: наблюдаемые величины не меняются при точечных преобразованиях полей $\varphi(x) = \varphi'(x) + f(\varphi'(x))$. Преобразования, зависящие от производных по времени

$$\varphi = \frac{\partial^n \varphi'}{\partial t^n} + f\left(\frac{\partial^{n-1} \varphi'}{\partial t^{n-1}}, \dots, \frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) = \tilde{f}(\varphi') \quad (13)$$

При таком преобразовании теория меняется, но можно сформулировать условия, при которых наблюдаемые калибровочно инвариантные величины сохраняют свои значения.

$$L(\varphi) \rightarrow \tilde{L}(\varphi') = L[\varphi(\varphi')] + \bar{c}^a \frac{\delta \varphi^a}{\delta \varphi'^b} c^b \quad (14)$$

Поля $\bar{c}, c$ принадлежат алгебре Грассмана, а лагранжиан $\tilde{L}$ инвариантен относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta \varphi'_a = c_a \varepsilon$$

$$\delta c_a = 0; \quad \delta \bar{c}_a = \frac{\delta \tilde{L}}{\delta \varphi_a}(\varphi') \varepsilon \quad (15)$$

По теореме Нетер эта инвариантность генерирует сохраняющийся заряд Q , и физические векторы состояния можно выделить условием $Q|\phi\rangle_{phys}=0$. Это условие инвариантно относительно динамики. Заряд Q является нильпотентным, $Q^2=0$, а любой физический вектор представим в виде

$$|\phi\rangle_{phys}=|\psi\rangle+Q|\chi\rangle \quad (16)$$

где вектор $|\psi\rangle$ - это вектор включающий только возбуждения исходного гамильтониана, а вектор $Q|\chi\rangle$ обладает нулевой нормой и ортогонален всем физическим векторам. Следовательно матричный элемент любого калибровочно инвариантного оператора, вычисленный с помощью векторов $|\phi\rangle_{phys}$ совпадает с матричными элементами исходной теории.

Мы применим эту конструкцию к теории Янга-Миллса, инвариантной относительно калибровочной группы $SU(2)$. Лагранжиан поля Янга Миллса равен

$$L = \frac{1}{8} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (17)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu A_\nu] \quad (18)$$

В силу доказанной выше теоремы эта теория эквивалентна теории, описываемой Лагранжианом

$$\tilde{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - m^{-2} (D^2 \tilde{\phi})^* (D^2 \tilde{\phi}) + (D_\mu e)^* (D_\mu b) + (D_\mu b)^* (D_\mu e) \quad (19)$$

Здесь ϕ -двухкомпонентный комплексный дублет, параметризованный эрмитовыми компонентами

$$\phi = \left(\frac{i\phi^1 + \phi^2}{\sqrt{2}}, \frac{\phi^0 - i\phi^3}{\sqrt{2}} \right) \quad (20)$$

Аналогичная параметризация используется для элементов алгебры Грассмана b и e , причем поля e считаются эрмитовыми, а поля b антиэрмитовыми.

Не нарушая инвариантности действия относительно калибровочных преобразований и преобразований суперсимметрии (15) можно от действия (19) перейти к новому действию

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - m^{-2}(D^2\tilde{\phi})^*(D^2\tilde{\phi}) + (D_\mu e)^*(D_\mu b) + (D_\mu b)^*(D_\mu e) + \alpha^2(D_\mu\tilde{\phi})^*(D_\mu\tilde{\phi}) - \alpha^2 m^2(b^*e + e^*b) \quad (21)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \hat{\mu}; \quad \hat{\mu} = (0, \mu\sqrt{2}g^{-1}) \quad (22)$$

Здесь μ - произвольная константа размерности массы, а поле $\tilde{\phi}$ отличается от поля ϕ сдвигом на константу.

Новый Лагранжиан также калибровочно инвариантен и генерирует сохраняющийся заряд Q . Однако глобальная $SU(2)$ инвариантность спонтанно нарушена.

При калибровочном преобразовании поля ϕ^a сдвигаются на произвольную функцию, что позволяет наложить калибровочное условие $\phi^a = 0$. Калибровка $\phi^a = 0$ является алгебраической и не приводит к неоднозначности при каноническом квантовании. В то же время она явно релятивистски инвариантна и может с равным успехом быть использована как в теории возмущений так и вне ее.

Разумеется необходимо доказать, что в пределе $\alpha = 0$ матричные элементы всех калибровочно инвариантных операторов не содержат вклада нефизических компонент и в теории возмущений совпадают со стандартными. Это сделано.