

Биллиард и жесткий поворот

Д.Трещев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Москва 2013

I. Введение

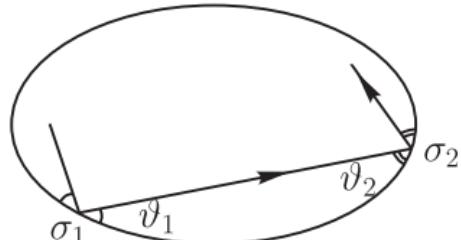
1. Биллиард.

Фазовое пространство: $b : Z \rightarrow Z$.

Биллиардное отображение:

$$(\sigma_1, \vartheta_1) \mapsto (\sigma_2, \vartheta_2)$$

Инвариантная мера: $\sin \vartheta d\vartheta d\sigma$.



2. Мотивировки. Важный класс дискретных гамильтоновых (лагранжевых) систем. Биллиард и геодезический поток. Спектр оператора Лапласа на двумерной плоской области.

Биллиардные отображения образуют в пространстве симплектических отображений тощее множество: первых столько, сколько функций от одной переменной (кривизна как функция натурального параметра), последних – сколько функций двух переменных (производящая функция) \Rightarrow жесткость в различных вопросах динамики биллиардных систем.

2. Некоторые классические проблемы.

(а) Проблема интегрируемости.

Гипотеза. Если биллиард (как динамическая система) интегрируем, то любой гладкий кусок граничной кривой – это отрезок прямой или кривой второго порядка.

Болотин 1990: доказательство при условии регулярности продолжения (куска) кривой биллиарда в комплексную область.

(б) Плотность множества периодических точек.

(в) **Гипотеза** (Иврий 1980). Пусть кривая биллиарда кусочно гладкая. Тогда мера множества периодических точек на фазовом цилиндре $Z = \{\sigma, \vartheta\}$ равна нулю.

Доказательство для периодических орбит периода 3: Рыхлик 1989; периода 4: Глуцюк, Кудряшов 2012; период ≥ 5 : вопрос открыт.

II. Наша задача.

1. Симметричный биллиард.

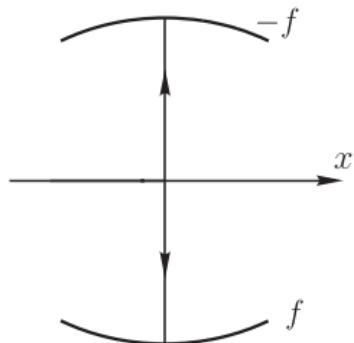
$$f(x) = \frac{1}{2}(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots),$$

$a_0 = -1$, $s_x : Z \rightarrow Z$ – симметрия
относительно оси x .

$b \circ s_x = s_x \circ b \Rightarrow$ определена “проекция” отображения b на фактор Z/s_x . Ее опять будем обозначать b .

2. Пара точек периода 2 порождается траекторией, совпадающей с отрезком $\{x = 0, y \in [-1/2, 1/2]\}$.

В фактор-системе получаем неподвижную точку O .



В линейном приближении около O b – поворот или гиперболический поворот (не считая вырождений). Поворот $\Leftrightarrow a_2 \in (0, 2)$. Рассмотрим этот случай.

Вопрос. Можно ли подобрать $\{a_{2j}\}$ так, чтобы b оказалось локально сопряженным повороту плоскости на угол α ? Варианты:

- (а) Ряд $\sum a_{2j}x^{2j}$ формальный.
- (б) Радиус сходимости > 0 .

III. Основное уравнение

1. Итак, локально около $0 \in \mathbb{R}^2$

$$b \circ h = h \circ \rho, \quad (1)$$

где $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – поворот на угол α , а h – искомое сопряжение.

2. (Калибровочная симметрия). Пусть $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ коммутирует с ρ : $s \circ \rho = \rho \circ s$. Тогда для любого (b, h) – решения (1) пара $(b, h \circ s)$ – тоже решение.

3. Как писать (1) более явно? Координаты (σ, ϑ) неудобные . . .

Будем считать, что b – отображение вида $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_3)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_2} (l(\sigma_1, \sigma_2) + l(\sigma_2, \sigma_3)) = 0.$$

Сопряжение h имеет 2 компоненты:

$$h = (\chi, \hat{\chi}), \quad \chi(0, 0) = \hat{\chi}(0, 0) = 0.$$

4. Вычисление: уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2f' \circ \chi (\tau_- f \circ \chi \tau_+ f \circ \chi - \tau_- \chi \tau_+ \chi) \\ & + (1 - (f' \circ \chi)^2) (\tau_- \chi \tau_+ f \circ \chi + \tau_+ \chi \tau_- f \circ \chi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где обозначено

$$\tau_{\pm} \chi = \chi - \chi \circ \rho^{\pm 1}, \quad \tau_{\pm} f \circ \chi = f \circ \chi + f \circ \chi \circ \rho^{\pm 1}.$$



5. (Техническое замечание). Удобно использовать комплексные координаты z, \bar{z} на $\mathbb{R}^2 = \{u, v\}$,

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv.$$

Тогда $\rho(z, \bar{z}) = (\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z})$, $\lambda = e^{i\alpha}$.

6. Предложение. Для любого иррационального $\alpha/(2\pi)$ уравнение (2) имеет формальное решение f, χ .

Д.Бурлаков & А.Сеславина 2011.

Малые знаменатели вида $(\lambda^{k-1} - 1)(\lambda^{-k-1} - 1)$.

IV. Численные результаты

- 1.** Вычисляем a_{2j} как функции $\lambda = e^{i\alpha}$. Формулы быстро усложняются. С помощью MAPLE можно вычислить около десятка коэффициентов. Ясных окончательных закономерностей не видно ...
- 2.** Возьмем конкретное $\alpha = 2\pi g$, где g – золотое сечение. Получаем a_2, a_4, \dots :

$$\begin{aligned} & 1.7373, 1.2449, 1.7631, 3.1125, 6.1475, 13.002, 28.803, \\ & 65.969, 154.94, 371.18, 903.40, 2227.5, 5552.9, \dots \end{aligned}$$

Последовательность $b_j = a_{2j}/a_{2j-2}$ монотонно растет:

$$\begin{aligned} & 0.71658, 1.4161, 1.7653, 1.9750, 2.1151, 2.2151, \\ & 2.2903, 2.3487, 2.3955, 2.4338, 2.4657, 2.4928, \dots \end{aligned}$$

Положим $b_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} b_j \leq \infty$. Тогда $b_\infty^{-1/2}$ – радиус сходимости ряда f .

(а) (Ускорение сходимости I). Предположим, что $b_\infty < \infty$ и

$$b_j \approx b_\infty - \frac{c_1}{j} \quad (3)$$

Имея b_j и b_{j+1} , вычисляем из двух равенств (3)

$$b_\infty = (j+1)b_{j+1} - jb_j, \quad c_1 = j(j+1)(b_{j+1} - b_j).$$

Для b_∞ получаем последовательность

$$2.81542, 2.81274, 2.81413, 2.81512, 2.81575, 2.81616,$$

$$2.81644, 2.81664, 2.81678, 2.81689, 2.81698, \dots$$

(б) (Ускорение сходимости II).

Считая, что $b_j \approx b_\infty - c_1/j - c_2/j^2$, получаем:

$$b_\infty = \frac{(j+2)^2 b_{j+2} - 2(j+1)^2 b_{j+1} + j^2 b_j}{2!},$$

2.8100676, 2.8162207, 2.8170990, 2.8173217, 2.8173956,

2.8174247, 2.8174376, 2.8174439, 2.8174470, 2.8174487, ...

(в) (Ускорение сходимости III). Если предположить, что

$$b_j \approx b_\infty - c_1/j - c_2/j^2 - c_3/j^3,$$

имеем:

$$b_\infty = \frac{(j+3)^3 b_{j+3} - 3(j+2)^3 b_{j+2} + 3(j+1)^3 b_{j+1} - j^3 b_j}{3!},$$

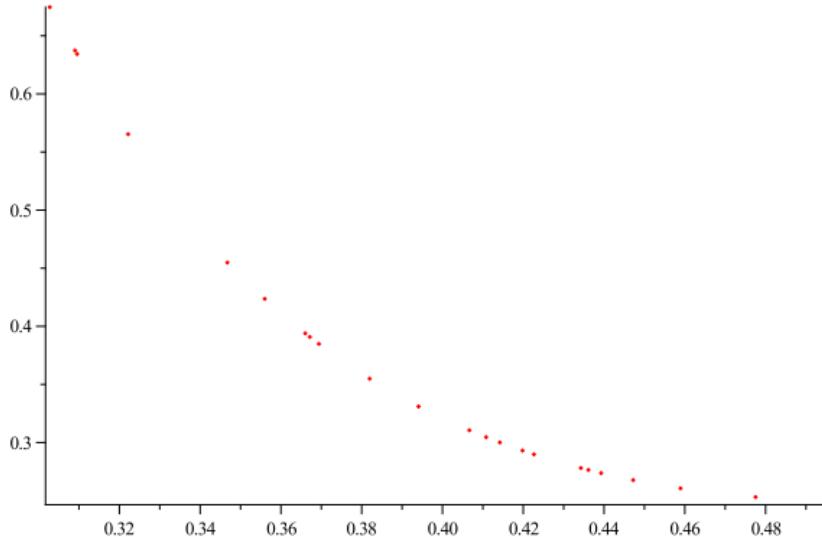
2.82032285, 2.81797742, 2.81761859, 2.81751871, 2.81748308,

2.81746786, 2.81746049, 2.81745658, 2.81745436, ...

Можно продолжать в этом духе ...

Итак, вычисления показывают, что чрезвычайно вероятна следующая

Гипотеза 1. Для хороших чисел вращения $\alpha/(2\pi)$ функция f вещественно аналитична в окрестности нуля.



Величину b_∞ можно вычислить для различных значений α . Нарисуем на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{1}{b_\infty}\}$ получившиеся точки.

Функция не определена при рациональных значениях аргумента.

Гипотеза 2. Функция $\alpha \mapsto 1/b_\infty(\alpha)$ гладкая по Уитни.

Для $\alpha/(2\pi) < 1/3$ последовательность a_{2j} не очень хорошо описывается предложенными выше асимптотиками, а при $\alpha/(2\pi) < 1/4$ является знакопеременной.

3. При $\alpha/(2\pi) \approx 1/2$ имеем:

$$a_{2j} \approx \frac{2^j(2j-3)!!}{j!} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dy^j}(-\sqrt{1-4y}).$$

При $y = x^2$ получаем полуокружность, так что биллиард в круге — в определенном смысле, предельное решение при $\alpha/(2\pi) \rightarrow 1/2$.

5. Предположим, что

$$a_{2j} = c_0 b_\infty^j j^\sigma (1 + O(1/j)). \quad (4)$$

Тогда

$$b_j = b_\infty \left(1 + \frac{\sigma}{j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right), \quad \sigma = -\frac{c_1}{b_\infty}.$$

Вычисляем. Всегда получается $\sigma = -3/2$ с ошибкой $< 1/1000$.

Гипотеза 3. Имеет место асимптотика (4), где $\sigma = -3/2$.

Если гипотеза 3 верна, то

- (а) $f(x)$ определена и конечна в “крайних точках” $x_\pm = \pm b_\infty^{-1/2}$.
- (б) f имеет в x_\pm особенность типа $\sqrt{\pm(x_\pm - x)}$.

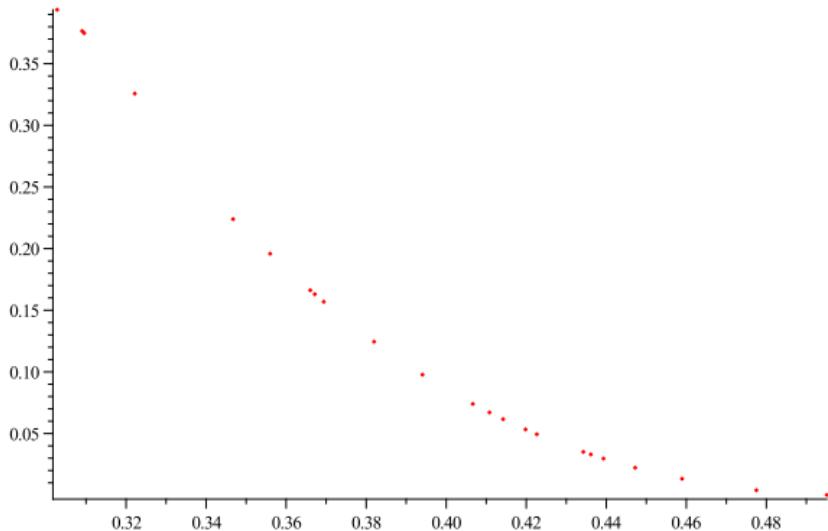
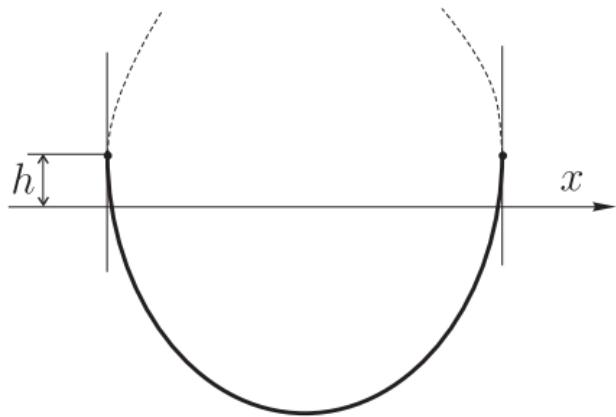


График функции $\frac{\alpha}{2\pi} \mapsto h(\alpha) := f(x_{\pm})$ изображен на рисунке.

Гипотеза 4. Функция $\alpha \mapsto 1/b_\infty(\alpha)$ гладкая по Уитни.



Гипотеза 5. Кривая биллиарда γ_α аналитически продолжается за точки $(x_{\pm}(\alpha), h(\alpha))$.