

METRIC SPACE WITH MEASURE: OLD AND NEW PROBLEMS.

A.VERSHIK (PETERSBURG DEPTH. OF MATHEMATICAL
INSTITUTE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES)
CONFERENCE DEVOTED TO 70-th ANNIVERSARY of
V.M.BUCHSTABER.

18 июня 2013 г.

CONTENT

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE m -SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ)

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE m -SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.
4. Main notion: Virtual continuity of the functions of several arguments.

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES ; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.
4. Main notion: Virtual continuity of the functions of several arguments.
5. Various properties of the virtual continuity.

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm-SPACES ; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.
4. Main notion: Virtual continuity of the functions of several arguments.
5. Various properties of the virtual continuity.
6. Applications: Sobolev embedding theorems,

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE mm -SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.
4. Main notion: Virtual continuity of the functions of several arguments.
5. Various properties of the virtual continuity.
6. Applications: Sobolev embedding theorems, virtual continuity of the kernels of nuclear operators,

CONTENT

THREE MAIN TOPICS: **CLASSIFICATION OF THE m -SPACES; VIRTUAL CONTINUITY OF THE FUNCTIONS AND SOBOLEV THEOREMS; DYNAMICS OF METRICS**

1. Measure and Metrics, Admissible metrics. Metric (Gromov) triples. (X, ρ, μ) VARIABLE METRICS.
2. Classification of the metric triples and measurable functions of several arguments. Matrix distribution.
3. Classical Lusin theorem for one variable and general posing of the problem.
4. Main notion: Virtual continuity of the functions of several arguments.
5. Various properties of the virtual continuity.
6. Applications: Sobolev embedding theorems, virtual continuity of the kernels of nuclear operators, the restriction of the metrics on the partitions.
7. Dynamic of the metrics, Scaling entropy. Main examples.

Допустимые метрики

Допустимые метрики

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство Лебега-Рохлина — $\sim ([0, 1], \mathcal{A}, m)$.

We will consider various (semi)-metrics on it.

Допустимые метрики

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство Лебега-Рохлина — $\sim ([0, 1], \mathcal{A}, m)$.

We will consider various (semi)-metrics on it.

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — (полу-)метрика на X , измеримая по $\mu \times \mu$.

Допустимые метрики

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство Лебега-Рохлина — $\sim ([0, 1], \mathcal{A}, m)$.

We will consider various (semi)-metrics on it.

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — (полу-)метрика на X , измеримая по $\mu \times \mu$.

Definition

ρ — допустимая (полу-)метрика, а (X, μ, ρ) — допустимая (полу-)метрическая тройка; если существует $X_0 \subset X$, т.ч. $\mu(X_0) = 1$, и (X_0, ρ) — сепарабельно.

Допустимые метрики

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство Лебега-Рохлина — $\sim ([0, 1], \mathcal{A}, m)$.

We will consider various (semi)-metrics on it.

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — (полу-)метрика на X , измеримая по $\mu \times \mu$.

Definition

ρ — допустимая (полу-)метрика, а (X, μ, ρ) — допустимая (полу-)метрическая тройка; если существует $X_0 \subset X$, т.ч. $\mu(X_0) = 1$, и (X_0, ρ) — сепарабельно.

Lemma (Об эквивалентности метрик)

Пусть ρ_1 и ρ_2 — две допустимые метрики на (X, μ) . Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется $K \subset X$, т.ч. $\mu(K) > 1 - \epsilon$ и топологии, задаваемые метриками ρ_1 и ρ_2 на K , совпадают.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК (Громов, Вершик)

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК (Громов, Вершик)

$$(X, \mu, \rho) \sim (X', \mu', \rho') \text{ iff}$$

$$\exists T : X \rightarrow X'; \quad T\mu = \mu' \quad \rho'(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

(T — изометрия, сохраняющая меру).

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК (Громов, Вершик)

$$(X, \mu, \rho) \sim (X', \mu', \rho') \text{ iff}$$

$$\exists T : X \rightarrow X'; \quad T\mu = \mu' \quad \rho'(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

(T — изометрия, сохраняющая меру).

Theorem

Построим по метрике отображение:

$$F_\rho : X^\infty \times X^\infty \rightarrow M_\infty(\mathbb{R}) \quad F_\rho(\{x_i\}_i, \{y_j\}_j) = \{\rho(x_i, y_j)\}_{i,j},$$

и снабдим $X^\infty \times X^\infty$ произведением мер $\mu^\infty \times \mu^\infty$. Тогда образ меры — $F_{\rho}(\mu^{2\infty}) \equiv D_\rho$, называемый МАТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ метрики ρ относительно меры μ (или случайной матрицей расстояний) есть полный инвариант эквивалентности метрик на пространстве с мерой.*

Матричные распределения и случайные матрицы

Матричные распределения и случайные матрицы

Аналогия с функциями одной переменной.

Матричные распределения и случайные матрицы

Аналогия с функциями одной переменной.

Обобщение классификации на произвольные измеримые функции: для чистых функций матричное распределение -полный инвариант. (V.2002)

Матричные распределения и случайные матрицы

Аналогия с функциями одной переменной.

Обобщение классификации на произвольные измеримые функции: для чистых функций матричное распределение -полный инвариант. (V.2002)

Рассмотрим случайную матрицу расстояний $\{\rho(x_i, y_j)\}_{i,j}$ и соответствующую меру D_ρ на пространстве бесконечных матриц. Как восстановить тройку (X, ρ, μ) по ней?

Эргодический метод. Характеристика мер D_ρ

Матричные распределения и случайные матрицы

Аналогия с функциями одной переменной.

Обобщение классификации на произвольные измеримые функции: для чистых функций матричное распределение -полный инвариант. (V.2002)

Рассмотрим случайную матрицу расстояний $\{\rho(x_i, y_j)\}_{i,j}$ и соответствующую меру D_ρ на пространстве бесконечных матриц. Как восстановить тройку (X, ρ, μ) по ней?

Эргодический метод. Характеристика мер D_ρ

Theorem

Для матричного распределения, как меры на бесконечных матрицах выполнено характеристическое условие:

$$M_\infty(\mathbb{R}) \ni \{r_{i,j}\} \rightarrow \text{Meas}_r(\mathbb{N}),$$

т.е. матрице сопоставляется эмпирическая мера столбцов, и это сопоставление есть биекция почти всюду.

Теорема Лузина.

Theorem (Обобщенная теорема Лузина)

Пусть (X, μ, ρ) — допустимая метрическая тройка, Y — сепарабельное метрическое пространство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует множество $K \subset X$, т.ч. $\mu(K) > 1 - \epsilon$ и сужение функции f на K непрерывно.

Теорема Лузина.

Theorem (Обобщенная теорема Лузина)

Пусть (X, μ, ρ) — допустимая метрическая тройка, Y — сепарабельное метрическое пространство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует множество $K \subset X$, т.ч. $\mu(K) > 1 - \epsilon$ и сужение функции f на K непрерывно.

Theorem

Пусть (X, μ) — пространство Лебега. Тогда для любой измеримой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ существует допустимая (полу-)метрика ρ на X , т.ч. функция f непрерывна по топологии, задаваемой ρ .

Теорема Лузина.

Theorem (Обобщенная теорема Лузина)

Пусть (X, μ, ρ) — допустимая метрическая тройка, Y — сепарабельное метрическое пространство. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует множество $K \subset X$, т.ч. $\mu(K) > 1 - \epsilon$ и сужение функции f на K непрерывно.

Theorem

Пусть (X, μ) — пространство Лебега. Тогда для любой измеримой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ существует допустимая (полу-)метрика ρ на X , т.ч. функция f непрерывна по топологии, задаваемой ρ .

Теорема Лузина не выполнена для функций нескольких переменных! Что такое функция нескольких переменных?

$$(X_1, \mu_1) \leftarrow (X, \nu) \rightarrow (X_2, \mu_2), \quad \rho_1, \rho_2$$

Виртуально непрерывные функции (1)

Definition

Пусть (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) — пространства Лебега-Рохлина. Измеримая функция f , заданная на $X \subset X_1 \times X_2$, называется виртуально непрерывной, если выполнено хотя бы одно из следующих равносильных утверждений:

Виртуально непрерывные функции (1)

Definition

Пусть (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) — пространства Лебега-Рохлина. Измеримая функция f , заданная на $X \subset X_1 \times X_2$, называется виртуально непрерывной, если выполнено хотя бы одно из следующих равносильных утверждений:

- ▶ Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ меры хотя бы $1 - \varepsilon$ каждое и допустимые полуметрики ρ_1, ρ_2 на X'_1, X'_2 соответственно, такие что функция f совпадает почти всюду с непрерывной функцией на $(X'_1 \times X'_2, \rho_1 \times \rho_2)$. (здесь $\times = +$ или $\max$ и т.д.)

Виртуально непрерывные функции (1)

Definition

Пусть (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) — пространства Лебега-Рохлина. Измеримая функция f , заданная на $X \subset X_1 \times X_2$, называется виртуально непрерывной, если выполнено хотя бы одно из следующих равносильных утверждений:

- ▶ Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ меры хотя бы $1 - \varepsilon$ каждое и допустимые полуметрики ρ_1, ρ_2 на X'_1, X'_2 соответственно, такие что функция f совпадает почти всюду с непрерывной функцией на $(X'_1 \times X'_2, \rho_1 \times \rho_2)$. (здесь $\times = +$ или $\max$ и т.д.)
- ▶ Найдутся множества $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ полной меры каждое и допустимые полуметрики ρ_1, ρ_2 на X'_1, X'_2 соответственно, такие что функция f совпадает почти всюду с непрерывной функцией на $(X'_1 \times X'_2, \rho_1 \times \rho_2)$.

Виртуально непрерывные функции (2)

- ▶ Для любого $\varepsilon > 0$ и любых допустимых метрик ρ_1, ρ_2 на X_1, X_2 найдутся множества $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ меры хотя бы $1 - \varepsilon$ каждое, такие что функция f совпадает почти всюду с непрерывной функцией на $(X'_1 \times X'_2, \rho_1 \times \rho_2)$.

Виртуально непрерывные функции (2)

- ▶ Для любого $\varepsilon > 0$ и любых допустимых метрик ρ_1, ρ_2 на X_1, X_2 найдутся множества $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ меры хотя бы $1 - \varepsilon$ каждое, такие что функция f совпадает почти всюду с непрерывной функцией на $(X'_1 \times X'_2, \rho_1 \times \rho_2)$.
- ▶ Найдется множество полной меры $X'_2 \subset X_2$ и ρ_2 — допустимая метрика на X_2 , такая что при μ_1 -почти всех $x_1 \in X_1$ функция $f(x_1, \cdot)$ непрерывна на (X'_2, ρ_2) .

Еще одно определение

Еще одно определение

Функцию двух переменных на $X \times Y$ полезно рассматривать, как отображение из X в пространство функций на Y , (т.е. $f(x, y) \equiv f_x(y)$). Более подробно о том, как использовать это для классификации измеримых функций, см. в [?].

Виртуальная непрерывность описывается в этих терминах следующим равносильным определением:

Еще одно определение

Функцию двух переменных на $X \times Y$ полезно рассматривать, как отображение из X в пространство функций на Y , (т.е. $f(x, y) \equiv f_x(y)$). Более подробно о том, как использовать это для классификации измеримых функций, см. в [?].

Виртуальная непрерывность описывается в этих терминах следующим равносильным определением:

Theorem

Виртуальная непрерывность функции $f(\cdot, \cdot)$ равносильна следующему свойству функции: для любого 0 найдутся множества $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ меры хотя бы $1 - \epsilon$ каждое, такие что множество функций вида $f_x(\cdot)$ на Y' (переменная x пробегает X') образует вполне ограниченное (предкомпактное) семейство в $L_\infty(Y')$.

Т.е. непрерывность по одному аргументу гарантирует виртуальную непрерывность.

Еще одно определение

Функцию двух переменных на $X \times Y$ полезно рассматривать, как отображение из X в пространство функций на Y , (т.е. $f(x, y) \equiv f_x(y)$). Более подробно о том, как использовать это для классификации измеримых функций, см. в [?].

Виртуальная непрерывность описывается в этих терминах следующим равносильным определением:

Theorem

Виртуальная непрерывность функции $f(\cdot, \cdot)$ равносильна следующему свойству функции: для любого 0 найдутся множества $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ меры хотя бы $1 - \epsilon$ каждое, такие что множество функций вида $f_x(\cdot)$ на Y' (переменная x пробегает X') образует вполне ограниченное (предкомпактное) семейство в $L_\infty(Y')$.

Т.е. непрерывность по одному аргументу гарантирует виртуальную непрерывность. Скрытая симметрия аргументов.

vc-норма.

Definition

Для $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ определим конечную или бесконечную vc-норму:

$$\|f\|_{vc} = \inf \left\{ \int_{X_1} |g_1(x_1)| d\mu_1 + \int_{X_2} |g_2(x_2)| d\mu_2 : \right. \\ \left. g_1(x_1) + g_2(x_2) \geq |f(x_1, x_2)| \text{ для } \mu_1 \times \mu_2 \text{ п.в. } (x_1, x_2) \right\}. \quad (1)$$

vc-норма.

Definition

Для $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ определим конечную или бесконечную vc-норму:

$$\|f\|_{vc} = \inf \left\{ \int_{X_1} |g_1(x_1)| d\mu_1 + \int_{X_2} |g_2(x_2)| d\mu_2 : \right. \\ \left. g_1(x_1) + g_2(x_2) \geq |f(x_1, x_2)| \text{ для } \mu_1 \times \mu_2 \text{ п.в. } (x_1, x_2) \right\}. \quad (1)$$

Theorem

$$\|f\|_{vc} = \sup \left\{ \int f(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) : \right. \\ \left. \int_{X_2} \phi(x_1, \cdot) d\mu_2 \leq 1 \text{ для } \mu_1 \text{ п.в. } x_1, \int_{X_1} \phi(\cdot, x_2) d\mu_1 \leq 1 \text{ для } \mu_2 \text{ п.в. } x_2 \right\}.$$

Пространство VC^1 и теорема двойственности

Пространство VC^1 и теорема двойственности

Пространство VC^1 есть пространство виртуально непрерывных функций с конечной vc -нормой.

Пространство VC^1 и теорема двойственности

Пространство VC^1 есть пространство виртуально непрерывных функций с конечной vc -нормой. Пространство ступенчатых функций плотно в VC^1 .

Пространство VC^1 и теорема двойственности

Пространство VC^1 есть пространство виртуально непрерывных функций с конечной vc -нормой. Пространство ступенчатых функций плотно в VC^1 .

Theorem

Сопряженным к пространству VC^1 является пространство зарядов (=знакопеременных мер) ν на $X_1 \times X_2$ с конечной нормой

$$\|\nu\|_{me} = \max\left\{\sup \operatorname{ess} \frac{d|\nu|_1}{d\mu_1}(x), \sup \operatorname{ess} \frac{d|\nu|_2}{d\mu_2}(y)\right\},$$

где $|\nu|$ — вариация заряда ν , $|\nu|_1$ и $|\nu|_2$ — проекции меры $|\nu|$ на X_1 и X_2 соответственно, а $\frac{d|\nu|_i}{d\mu_i}$, $i = 1, 2$ — производная Радона-Никодима.

(Аналог пространства Канторовича-Рубинштейна).

Теорема вложения

Theorem

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ — области, удовлетворяющие условию конуса. Пусть $pl > d$ или $p = 1, l = d$. Тогда пространство $W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ непрерывно вкладывается в пространство виртуально непрерывных функций — VC^1 .

Теорема вложения

Theorem

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ — области, удовлетворяющие условию конуса. Пусть $pl > d$ или $p = 1, l = d$. Тогда пространство $W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ непрерывно вкладывается в пространство виртуально непрерывных функций — VC^1 .

Таким образом, условия теоремы вложения есть скрытые условия непрерывности. Метрика, относительно которой функции непрерывны не очевидна. Отсюда вытекает основное следствие — теорема о следах. Ограничение на носители бистохастических мер.

Теорема вложения

Theorem

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ — области, удовлетворяющие условию конуса. Пусть $pl > d$ или $p = 1, l = d$. Тогда пространство $W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ непрерывно вкладывается в пространство виртуально непрерывных функций — VC^1 .

Таким образом, условия теоремы вложения есть скрытые условия непрерывности. Метрика, относительно которой функции непрерывны не очевидна. Отсюда вытекает основное следствие — теорема о следах. Ограничение на носители бистохастических мер.

Corollary

При тех же условиях для функции $f \in W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определен интеграл $\int f(x, y) d\nu(x, y)$, где ν — мера на $X_1 \times X_2$ с конечной нормой $\|\nu\|_{me}$ (ограниченность производных Р.-Н. проекций меры).

Теорема вложения

Theorem

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ — области, удовлетворяющие условию конуса. Пусть $pl > d$ или $p = 1, l = d$. Тогда пространство $W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ непрерывно вкладывается в пространство виртуально непрерывных функций — VC^1 .

Таким образом, условия теоремы вложения есть скрытые условия непрерывности. Метрика, относительно которой функции непрерывны не очевидна. Отсюда вытекает основное следствие — теорема о следах. Ограничение на носители бистохастических мер.

Corollary

При тех же условиях для функции $f \in W_p^l(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определен интеграл $\int f(x, y) d\nu(x, y)$, где ν — мера на $X_1 \times X_2$ с конечной нормой $\|\nu\|_{me}$ (ограниченность производных Р.-Н. проекций меры).

О бистохастических и квазибистохастических меры и полиморфизмах.

Ядра ядерных операторов

Ядро ядерного оператора из L^2 и L^2 есть измеримая функция двух переменных.

Theorem

Пусть (X_1, μ_1) , (X_2, μ_2) — стандартные вероятностные пространства. Тогда пространство ядер f ядерных интегральных операторов T_f из $L_2(X_1)$ в $L_2(X_2)$ с нормой Шаттена-фон Неймана непрерывно вкладывается в VC^1 .

Ядра ядерных операторов

Ядро ядерного оператора из L^2 и L^2 есть измеримая функция двух переменных.

Theorem

Пусть (X_1, μ_1) , (X_2, μ_2) — стандартные вероятностные пространства. Тогда пространство ядер f ядерных интегральных операторов T_f из $L_2(X_1)$ в $L_2(X_2)$ с нормой Шаттена-фон Неймана непрерывно вкладывается в VC^1 .

Отсюда также следует существование различных следов у ядра — например, конечность интеграла по диагонали.

Ограничение метрик

Ограничение метрик

Пусть (X, μ, ρ) допустимая (метрическая) тройка и ξ -измеримое разбиение со слоями нулевой меры. Например квадрат $[0, 1]^2$ с лебеговой мерой и разбиение на вертикальный отрезки. Но метрика ρ — не евклидова, — а всего лишь измерима, как функция двух переменных. Q. Можно ли корректно определить метрик на слоях (вертикальных отрезках)?

Ограничение метрик

Пусть (X, μ, ρ) допустимая (метрическая) тройка и ξ -измеримое разбиение со слоями нулевой меры. Например квадрат $[0, 1]^2$ с лебеговой мерой и разбиение на вертикальный отрезки. Но метрика ρ — не евклидова, — а всего лишь измерима, как функция двух переменных. Q. Можно ли корректно определить метрик на слоях (вертикальных отрезках)?

Theorem

Существует корректное ограничение допустимой метрики на почти все элементы любого измеримого разбиения.

Ограничение метрик

Пусть (X, μ, ρ) допустимая (метрическая) тройка и ξ -измеримое разбиение со слоями нулевой меры. Например квадрат $[0, 1]^2$ с лебеговой мерой и разбиение на вертикальный отрезки. Но метрика ρ — не евклидова, — а всего лишь измерима, как функция двух переменных. Q. Можно ли корректно определить метрик на слоях (вертикальных отрезках)?

Theorem

Существует корректное ограничение допустимой метрики на почти все элементы любого измеримого разбиения.

Действительно, всякая допустимая метрика виртуально непрерывна и потому допускает корректное ограничение на подмногообразия. В нашем примере это подмногообразие: $\{(x = x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3\}$.

Динамика метрик

Пусть счетная группа G действует на пространстве X с инвариантной мерой μ . Рассмотрим допустимую метрику ρ на (X, μ) и определим ее эволюцию:

Динамика метрик

Пусть счетная группа G действует на пространстве X с инвариантной мерой μ . Рассмотрим допустимую метрику ρ на (X, μ) и определим ее эволюцию:

$$\rho_n(x, y) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \rho(gx, gy),$$

$G_n \subset G$ -(множество элементов группы G длины, не большей n в некоторых образующих).

Динамика метрик

Пусть счетная группа G действует на пространстве X с инвариантной мерой μ . Рассмотрим допустимую метрику ρ на (X, μ) и определим ее эволюцию:

$$\rho_n(x, y) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \rho(gx, gy),$$

$G_n \subset G$ -(множество элементов группы G длины, не большей n в некоторых образующих).

Метрика ρ_n есть допустимая метрика, и асимптотические свойства тройки (X, μ, ρ_n) , не зависящие от начальной метрики ρ доставляют инварианты действия группы G .

Динамика метрик

Пусть счетная группа G действует на пространстве X с инвариантной мерой μ . Рассмотрим допустимую метрику ρ на (X, μ) и определим ее эволюцию:

$$\rho_n(x, y) = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \rho(gx, gy),$$

$G_n \subset G$ -(множество элементов группы G длины, не большей n в некоторых образующих).

Метрика ρ_n есть допустимая метрика, и асимптотические свойства тройки (X, μ, ρ_n) , не зависящие от начальной метрики ρ доставляют инварианты действия группы G .

Первый такой инвариант — масштабированная энтропия— обобщает энтропию Колмогорова-Синяя.

Масштабированная энтропия

Масштабированная энтропия

Определим последовательность чисел

$$H(X, \rho_n, \epsilon) \equiv h_n(\epsilon)$$

,
как ϵ -энтропию тройки (X, μ, ρ_n) , т.е., как минимальные числа точек ϵ -сети по всем измеримым множествам, меры $> 1 - \epsilon$ относительно метрики ρ_n .

Масштабированная энтропия

Определим последовательность чисел

$$H(X, \rho_n, \epsilon) \equiv h_n(\epsilon)$$

,
как ϵ -энтропию тройки (X, μ, ρ_n) , т.е., как минимальные числа точек ϵ -сети по всем измеримым множествам, меры $> 1 - \epsilon$ относительно метрики ρ_n .

Масштабирующая последовательность $\{c_{n,\epsilon}\}$ определяется, как последовательность, для которой:

$$0 < \liminf_{c_{n,\epsilon}} \frac{(X, \rho_n, \epsilon)}{c_{n,\epsilon}} \leq \limsup_{c_{n,\epsilon}} \frac{(X, \rho_n, \epsilon)}{c_{n,\epsilon}} < \infty$$

(асимптотика по n не зависит от ϵ)

Примеры

Theorem

1.Группа действует с дискретным спектром тогда и только тогда, когда c_n -ограничена. (V.,Petrov, Zatitsky; S.Ferenzi)

Примеры

Theorem

1. *Группа действует с дискретным спектром тогда и только тогда, когда c_n -ограничена. (V.,Petrov, Zatitsky; S.Ferenzi)*
2. *$\{c_n\} \sim |G_n|, n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда колмогоровская энтропия положительна. (V)*

Примеры

Theorem

1. *Группа действует с дискретным спектром тогда и только тогда, когда c_n -ограничена. (V., Petrov, Zatitsky; S. Ferenzi)*

2. *$\{c_n\} \sim |G_n|$, $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда колмогоровская энтропия положительна. (V)*

CONJECTURE: асимптотика $\{c_n\}$ не зависит от выбора начальной метрики.

Примеры

Theorem

1. *Группа действует с дискретным спектром тогда и только тогда, когда c_n -ограничена. (V., Petrov, Zatitsky; S.Ferenzi)*

2. *$\{c_n\} \sim |G_n|$, $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда колмогоровская энтропия положительна. (V)*

CONJECTURE: асимптотика $\{c_n\}$ не зависит от выбора начальной метрики. Примеры роста $c_n \sim \ln|G_n|$ для локально конечных групп. Для групп $\mathbb{R}$ (и $\mathbb{Z}$) — это предположительно поток орициклов.

Примеры

Theorem

1. Группа действует с дискретным спектром тогда и только тогда, когда c_n -ограничена. (V., Petrov, Zatitsky; S.Ferenzi)

2. $\{c_n\} \sim |G_n|$, $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда колмогоровская энтропия положительна. (V)

CONJECTURE: асимптотика $\{c_n\}$ не зависит от выбора начальной метрики. Примеры роста $c_n \sim \ln|G_n|$ для локально конечных групп. Для групп $\mathbb{R}$ (и $\mathbb{Z}$) — это предположительно поток орициклов. Наибольший интерес представляют новые инварианты, для случая фиксированной положительной колмогоровской энтропии - они зависят от более сложных свойств последовательности метрик ρ_n на пространстве (X, μ) . (V.St.Petersburg Math.Journ. 2011, N1).

ВИТЯ, С ДНЕМ РОЖДЕНИЯ!

ВИТЯ, С ДНЕМ РОЖДЕНИЯ!
HAPPY BIRTHDAY TO YOU, VICTOR!

ВИТЯ, С ДНЕМ РОЖДЕНИЯ!
HAPPY BIRTHDAY TO YOU, VICTOR! УСПЕХОВ И
ЗДОРОВЬЯ!