Многоканальные системы обслуживания с неидентичными приборами

Андрей В. Ткаченко[1]

[1]Механико-математический факультет
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
(e-mail: tkachenko.av.87@gmail.com)

25 сентября 2013

Содержание

Литература по многоканальным системам

- Kendall D.G. (1953) Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain.
- Kiefer J., Wolfowitz J. (1955) On the Theory of Queues With Many Servers.
- Loynes R.M. (1962) The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times.
- Боровков А.А. (1965) Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания.
- Iglehart D.L., Whitt W. (1970) Multiple Channel Queues in Heavy Traffic.
- Kollerstrom J. (1974) Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers.
- Фосс С.Г. (1983) Об условиях эргодичности в многоканальных системах массового обслуживания с ожиданием.
- Sadowsky J.S., Szpankowski W. (1995) The Probability of Large Queue Lengths and Waiting Times in a Heterogeneous Multiserver Queue.
- Morozov E. (1997) The stability of a non-homogeneous queueing system with regenerative input.
- Foss S., Korshunov D. (2006) Heavy Tails in Multi-Server Queue.
- Печинкин А.В., Соколов И.А., Чаплыгин В.В. (2009) Многолинейная система массового обслуживания с групповым отказом приборов.
- Sakuma Y., Inoie A. (2012) Stationary distribution of a multi-server vacation queue with constant impatient times.

Новизна

Новизна рассматриваемых в диссертационной работы моделей

- входящий поток в систему регенерирующий, при этом моменты регенерации могут не совпадать с моментами поступления требований;
- приборы неидентичные и времена обслуживания поступающих требований не обязательно имеют показательное распределение;
- функционирование системы может зависеть от внешних факторов и ограничений.

Для таких систем удается определить необходимое и достаточное условие эргодичности, а также установить предельное поведение процесса, ее характеризующего, в условиях высокой и сверхвысокой загрузки.

Многоканальная система с неидентичными приборами и регенерирующим входящим потоком

Входящий поток

Определение

Поток $X(t)$ называется регенерирующим, если существует возрастающая последовательность случайных величин $\{\theta_i,\ i \geq 0\}, \theta_0 = 0$, такая что последовательность

$$\{\varkappa_i\}_{i=0}^{\infty} = \{X(\theta_{i-1} + t) - X(\theta_{i-1}), \theta_i - \theta_{i-1}, t \in [0, \theta_i - \theta_{i-1})\}_{i=0}^{\infty} \qquad (2.1)$$

состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов.

θ_i — i-й момент регенерации;

$\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ — i-й период регенерации;

$\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$ — число требований поступивших в систему за i-й период регенерации;

$\lambda = \frac{a}{\mu}$ — интенсивностью входящего потока, где $\mu = E\tau_i < \infty$, $a = E\xi_i < \infty$.

Дисциплина обслуживания

- Рассматриваемая система состоит из r приборов обслуживания.
- Поступившее требование направляется на любой свободный прибор, когда таковой имеется, иначе оно встает в общую очередь.
- Требования обсуживаются в порядке поступления в систему.
- Время обслуживания n-го требования на i-м приборе η_n^i имеет функцию распределения $B_i(x)$ с конечным математическим ожиданием β_i^{-1}, $(i = 1, \ldots, r)$, $\beta = \sum_{i=1}^{r} \beta_i$.
- Времена обслуживания требований - независимые случайные величины, не зависящие от входящего потока.

Процесс, связанный с системой

- Введем $\overrightarrow{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t))$ — r-мерный случайный процесс с неотрицательными координатами, описывающий эволюцию системы.
- Пусть процесс $\overrightarrow{W}(t)$ определяется с помощью некоторого функционала через начальное значение $\overrightarrow{W}(0)$, входящий поток $X(s)$ до момента t включительно и членами последовательности векторов $\{\vec{\eta}_k = (\eta_k^1, \dots, \eta_k^r)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е.
$$\overrightarrow{W}(t) = \Phi(\overrightarrow{W}(0), t, \{X(s), s \le t\}, \overrightarrow{\eta}_1, \dots \overrightarrow{\eta}_{X(t)}), \tag{2.2}$$
где $\Phi(\cdot)$ — некоторая функция в соответствующем пространстве со значениями в $\mathbb{R}_+^r$. В качестве координат такого процесса можно рассматривать, виртуальное время ожидания на каждом приборе многоканальной системы.
- Для процесса $\overrightarrow{W}(t)$ введем вложенную цепь Маркова
$$\overrightarrow{W}_n = \overrightarrow{W}(\theta_n - 0) = (W_{n1}, \dots, W_{nr}) \tag{2.3}$$
и суммы координат $w(t) = \sum_{j=1}^r W_j(t)$, $w_n = \sum_{j=1}^r W_{nj}$.

Определение эргодичности процесса

Определение

Будем говорить, что точка $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}_+^r$ *достижима из нуля процессом* $\overrightarrow{Y}(t)$, *если для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существуют* ε*-окрестность,* $\Delta_\varepsilon(\overrightarrow{y}) = \{\overrightarrow{x} : \ ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| < \varepsilon\}$ *и* t_ε *такие, что* $\mathsf{P}\{\overrightarrow{Y}(t_\varepsilon) \in \Delta_\varepsilon(\overrightarrow{y}) | \overrightarrow{Y}(0) = 0\} > 0$. *Обозначим* $B_0(\overrightarrow{Y}(\cdot))$ *множество точек, достижимых из нуля процессом* $\overrightarrow{Y}(t)$.

Определение

Процесс $\{\overrightarrow{Y}(t), \ t \geq 0\}$ *назовем эргодическим, если для любого начального состояния* $\overrightarrow{Y}(0) = \overrightarrow{y} \in B_0(\overrightarrow{Y}(\cdot))$ *существует предел*

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{\overrightarrow{Y}(t) \leq \overrightarrow{x}\} = F(\overrightarrow{x}),$$

являющийся функцией распределения, и $F(\overrightarrow{x})$ *не зависит от* $\overrightarrow{y}$.

Определение стохастической ограниченности процесса

Определение

Случайный процесс $\{\overrightarrow{Y}(t), t \geq 0\}$ *со значениями в* $\mathbb{R}_+^r$ *стохастически ограничен, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_r) < \infty$ *и* t_0*, такие что для всех* $t > t_0$ *выполнено* $\mathrm{P}\{\overrightarrow{Y}(t) < \overrightarrow{y}\} > 1 - \varepsilon$.

Определение

Случайный процесс $\overrightarrow{Y}(t)$ *сильно стохастически неограничен, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_r) < \infty$ *существует* $t_0 < \infty$ *такое, что при* $t > t_0$ *выполнено* $\mathrm{P}\{\overrightarrow{Y}(t) \geq \overrightarrow{y}\} > 1 - \varepsilon$.

Дополнительные условия

Будем предполагать выполнение следующих условий

Условия

1. $P\{w_{n+1} = 0 | w_n = 0\} > 0$.
2. *Для любого* $\overrightarrow{x} < \infty$, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^r$ *найдутся целое* $m(\overrightarrow{x})$ *и* $\delta(\overrightarrow{x}) > 0$, *такие что при всех* $\overrightarrow{y} \in B_0\left(\overrightarrow{W}_n\right)$ *и* $\overrightarrow{y} \leq \overrightarrow{x}$ *выполняется равенство* $P\{w_{n+m(\overrightarrow{x})} = 0 | \overrightarrow{W}_n = \overrightarrow{y}\} > \delta(\overrightarrow{x})$.
3. *Для произвольных* $\varepsilon > 0$ *и* $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^r_+$ *существуют* $\delta > 0$ *и целое* n_0, *такие что* $\left| P\{\overrightarrow{W}_n \leq \overrightarrow{x} | \overrightarrow{W}_0 = \overrightarrow{y}^*\} - P\{\overrightarrow{W}_n \leq \overrightarrow{x} | \overrightarrow{W}_0 = \overrightarrow{y}\} \right| < \varepsilon$, *если* $n > n_0$, $\|\overrightarrow{y}^* - \overrightarrow{y}\| < \delta$ *и* $\overrightarrow{y}^*, \overrightarrow{y} \in B_0\left(\overrightarrow{W}_n\right)$.
4. *Распределение* τ_n *содержит абсолютно непрерывную компоненту.*
5. *Последовательность случайных величин* $u_n = \max_{1 \leq i,j \leq r} |W_{ni} - W_{nj}|$, *стохастически ограничена при* $n \to \infty$.

Эргодичность и стохастическая ограниченность

Теорема (1)

Пусть выполнены условия 1 и 2.

1. *Если для некоторого начального состояния* $\overrightarrow{y}_0 \in B_0(\overrightarrow{W}_n)$ *процесс* $\overrightarrow{W}_n$ *стохастически ограничен, то при условии 3 он эргодичен.*
2. *Если процесс* w_n *стохастически неограничен при любом начальном состоянии* $\overrightarrow{W}_0 = \overrightarrow{y} \in B_0(\overrightarrow{W}_n)$, *то он сильно стохастически неограничен.*
3. *Если выполнено условие 5, это верно и для процесса* $\overrightarrow{W}_n$.
4. *Данные утверждения имеют место для процесса* $\overrightarrow{W}(t)$ *при условии 4.*

Эргодичность многоканальной системы обслуживания

Пусть $\overrightarrow{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t))$, где $W_i(t)$ — время от момента t до момента, когда i-й прибор освободится от обслуживания требований, пришедших раньше t. Пусть $\overrightarrow{W}_n = (W_{n1}, \ldots, W_{nr}) = \overrightarrow{W}(\theta_n - 0)$.

Теорема (2)

1. *Если для некоторого $i = \overline{1, r}$ выполнено* $P\{\xi_2 = 0\} + P\{\xi_2 = 1,\ \tau_2 - t_1 > \eta_1^i\} > 0$ *и*
$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} < 1, \tag{2.4}$$
то процесс $\overrightarrow{W}_n$ эргодичен. Если, кроме того, распределение τ_n содержит абсолютно непрерывную компоненту, то процесс $\overrightarrow{W}(t)$ эргодичен.
2. *При $\rho > 1$, а также при $\rho = 1$ и дополнительных условиях $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$ выполненных для некоторого $\delta > 0$, все эти процессы сильно стохастически неограничены.*

Предельные теоремы при сверхвысокой загрузке

Пусть $Q(t)$ — число требований в системе в момент t. Введем процесс

$$\widehat{Q}_n(t) = \frac{Q(nt) - (\lambda - \sum_{i=1}^{r} \beta_i)nt}{\sigma\sqrt{n}}, \text{ где} \qquad (2.5)$$

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_S^2 > 0, \ \sigma_S^2 = \sum_{i}^{r} \sigma_{S^i}^2, \ \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\mu} + \frac{a^2\sigma_\tau^2}{\mu^3} - \frac{2ar_{\xi\tau}}{\mu^2}, \ \sigma_{S^i}^2 = \beta_i^3\sigma_i^2,$$

$$\sigma_i^2 = \int_0^\infty (x - \beta_i^{-1})^2 dB_i(x), \ \sigma_\xi^2 = D\xi_2, \ \sigma_\tau^2 = D\tau_2, \ r_{\xi\tau} = cov(\xi_2, \tau_2).$$

Теорема (3)

Пусть число требований в начальный момент $Q(0)$ конечно почти наверно и для некоторого $\delta > 0$ выполнены условия $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$. Тогда при $n \to \infty$ справедливы утверждения.

1. *Если $\rho > 1$, то процесс $\widehat{Q}_n(t)$ слабо сходится к стандартному винеровскому процессу на любом конечном интервале $[0, v]$;*
2. *если $\rho = 1$, то процесс $\widehat{Q}_n(t)$ слабо сходится к модулю стандартного винеровского процесса на любом конечном интервале $[0, v]$;*

Предельная теорема при высокой загрузке

Задается последовательность систем S_n, таких что загрузка $\rho_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

- входящий поток в систему S_n

$$X_n(t) = X\left(\rho^{-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)t\right); \qquad (2.6)$$

- последовательности времен обслуживания $\{\eta_k^i\}_{k=1}^{\infty}, i = \overline{1, r}$ одинаковы для всех систем S_n;

Пусть $Q_n(t)$ — число требований в системе S_n. Введем процесс

$$\widetilde{Q}_n(t) = \frac{Q_n(nt)}{\sqrt{n}}, \qquad (2.7)$$

Теорема (4)

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(0)}{n} = 0$ *п.н. и для некоторого* $\delta > 0$ *выполнены условия* $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *процесс* $\widetilde{Q}_n(t)$ *слабо сходится на конечном интервале* $[0, v]$ *к диффузионному процессу с отражением в нуле и параметрами* $(-\beta, \widetilde{\sigma}^2)$. *Здесь* $\widetilde{\sigma}^2 = \sigma_S^2 + \frac{\sigma_X^2}{\rho}$.

Многоканальная система с неидентичными приборами и регенерирующим входящим потоком, функционирующая в случайной среде

Описание модели

Рассматривается многоканальная система с неидентичными приборами и регенерирующим входящим потоком, функционирующая в случайной среде. Случайная среда воздействует на систему целиком и

- $\{s_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательные моменты времени, когда система выводится из строя случайной средой;
- $\{s_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность моментов восстановления системы;
- $u_n^1 = s_n^1 - s_{n-1}^2$ — интервалы функционирования системы в обычном режиме, распределеные по показательному закону со средним a_1
- $u_n^2 = s_n^2 - s_n^1$, — интервалы восстановления системы, имеющие произвольное распределение с конечным средним a_2.
- после восстановления, система продолжает обслуживание всех требований, обслуживание которых было прервано поломкой системы, на тех же приборах.

Эргодическая теорема

Пусть $Q(t)$ — число требований в системе.

Теорема (5)

1. *Если для некоторого* $i = \overline{1, r}$ *выполнено* $P\{\xi_2 = 0\} + P\{\xi_2 = 1,\ \tau_2 - t_1 > \eta_1^i\} > 0$ *и распределение* τ_1 *содержит абсолютно непрерывную компоненту и*
$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\lambda}}{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} < 1, \tag{3.1}$$
где $\tilde{\lambda} = \lambda \frac{a_1 + a_2}{a_1}$, *то процесс* $Q(t)$ *эргодичен.*
2. *При* $\tilde{\rho} > 1$, *а также при* $\tilde{\rho} = 1$ *и условиях* $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$, *выполненных для некоторого* $\delta > 0$, *этот процесс неэргодичен.*

Многоканальная система с неидентичными приборами, регенерирующим входящим потоком и нетерпеливыми клиентами

Описание модели

Рассматривается многоканальная система с неидентичными приборами, регенерирующим входящим потоком, и возможностью неприсоединения входящих требований к очереди. Вероятности неприсоединения описываются следующим образом

- Задана невозрастающая последовательность $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$, $f_j \in [0, 1]$.
- Требование, заставшее в системе j требований, независимо от других с вероятностью f_j присоединяется к системе до завершения обслуживания и с вероятностью $1 - f_j$ навсегда покидает ее.

Предложенная модель включает в себя следующие системы

- если $f_j = 1$ при $j \leq m$ для некоторого $m \geq r$ и $f_j = 0$ при $j > m$, то получаем систему с $m - r$ местами для ожидания в очереди;
- если при $m = r$, то получаем систему с отказами;
- если при $f_j = 1$ для всех j, то получаем классическую модель без ограничений.

Эргодическая теорема

Пусть $Q(t)$ — число требований в системе и $Q_n = Q(\theta_n)$.

Теорема (6)

1. *Пусть последовательность* f_j *и ее предел* $f \geq 0$ *таковы, что* $\sum_{j=0}^{\infty}(f_j - f) < \infty$ *и* $P\{\xi_2 = 0\} + P\{\xi_2 = 1,\ \tau_2 - t_1 > \eta_1^i\} > 0$. *Если*

$$\rho = f\lambda\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i\right)^{-1} < 1, \tag{4.1}$$

то процесс Q_n *эргодичен. Если, кроме того, распределение* τ_1 *содержит абсолютно непрерывную компоненту, то процесс* $Q(t)$ *эргодичен.*

2. *При* $\rho > 1$, *а также при* $\rho = 1$ *и дополнительных условиях* $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$, *выполненных для некоторого* $\delta > 0$, *эти процессы сильно стохастически неограничены.*

Предельная теорема при сверхвысокой загрузке

Рассмотрим нормированный процесс

$$\widehat{Q}_n(t) = \frac{Q(nt) - \left(\lambda f - \sum_{i=1}^{r} \beta_i\right) nt}{\widehat{\sigma}\sqrt{n}}, \text{ где} \quad (4.2)$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\beta^2, \ \sigma_X^2 = \frac{f(1-f)a + f^2\sigma_\xi^2}{\tau} + \frac{(fa)^2\sigma_\tau^2}{\tau^3} - \frac{2af^2 cov(\xi_1, \tau_1)}{\tau^2},$$

$$\sigma_\beta^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2\beta_i^3, \ \sigma_\tau^2 = D(\tau_1), \ \sigma_\xi^2 = D(\xi_1), \ \sigma_i^2 = D(\eta_1^i), \ i = \overline{1, r}.$$

Теорема (7)

Пусть $Q(0)$ конечно п. н., для некоторого $\delta > 0$ выполнены условия $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$ и $\sum_{j=0}^{\infty}(f_j - f) < \infty$. Тогда

1. *Если $\rho > 1$, то процесс $\widehat{Q}_n(t)$ слабо сходится к стандартному винеровскому процессу на любом конечном интервале $[0, v]$ при $n \to \infty$;*
2. *если $\rho = 1$, то процесс $\widehat{Q}_n(t)$ слабо сходится к модулю стандартного винеровского процесса на любом конечном интервале $[0, v]$ при $n \to \infty$;*

Предельная теорема при высокой загрузке

Задается последовательность систем S_n, таких что загрузка $\rho_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

- входящий поток в систему S_n

$$X_n(t) = X\left(\rho^{-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)t\right); \tag{4.3}$$

- последовательности времен обслуживания $\{\eta_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $i = \overline{1, r}$ и вероятностей присоединения $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ одинаковы для всех систем S_n;

Пусть $Q_n(t)$ — число требований в системе S_n. Введем процесс

$$\widetilde{Q}_n(t) = \frac{Q_n(nt)}{\sqrt{n}}, \tag{4.4}$$

Теорема (8)

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(0)}{n} = 0$ *п.н., для некоторого* $\delta > 0$ *выполнены условия* $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E(\eta_1^i)^2 < \infty$, $i = \overline{1, r}$ *и* $\sum_{j=0}^{\infty}(f_j - f) < \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *процесс* $\widetilde{Q}_n(t)$ *слабо сходится на любом конечном интервале* $[0, v]$ *к диффузионному процессу с отражением в нуле и параметрами* $(-\beta, \widetilde{\sigma}^2)$. *Здесь* $\widetilde{\sigma}^2 = \sigma_S^2 + \frac{\sigma_X^2}{\rho}$.

Список опубликованных работ

Статьи, входящие в перечень ВАК

- *Афанасьева Л.Г.., Ткаченко А.В.,* Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком, Теория Вероятностей и ее Применения, Т. 58, № 2, 2013, с. 210–234.
- *Ткаченко, А. В.,* Одноканальная система с ненадежным прибором и различными временами обслуживания, Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, №2, 2013, с. 10–17.
- *Ткаченко, А. В.,* Многоканальные системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди и регенерирующим входящим потоком, Рукопись деп. в ВИНИТИ, 03.07.2013, 195-В2013, 19с.

Опубликованные тезисы конференций

- Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком и неидентичными приборами: Тез. докл. Международной конференции "Теория Вероятностей и ее Приложения"посвященной 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко, Москва, 2012, с. 210–211.
- Queueing Systems with Regenerative Input Flow and Heterogeneous Servers: Тез. докл. XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Светлогорск, 2012, с. 9–10.
- Multichannel Queuing Systems in a Random Environment: Тез. докл. Seventh International Workshop on Simulation, Римини, 2013, с. 347–348.