Теология науки на примере теории вероятностей

В.Н. Тутубалин

(Доклад на семинаре ПРЕМОЛАБ)

1. Введение: ненаблюдаемые сущности

Студенты мехмата бывают, грубо говоря, двух категорий: одни поступают на факультет ради самой математики, другие – ради её приложений. Правда, поначалу студенты, будучи спрошены, обычно отвечают, что хотели бы заниматься и тем, и другим, т.е. разрабатывать новые математические методы и тут же применять их на практике. Но на самом деле этого могут достигнуть лишь очень немногие выдающиеся умы (например, А.Н. Колмогоров), и студенты это довольно скоро понимают либо сами, либо после небольших объяснений. Кафедра теории вероятностей ежегодно набирает полный комплект студентов (человек пятьдесят) и почти каждый год даже имеет возможность проводить конкурс. А происходит это за счет студентов, интересующихся приложениями. Но почему-то в практике преподавания как для всех студентов, так и для студентов нашей кафедры получается так, что преподаватели очень не торопятся предъявлять примеры каких-то реальных приложений. Считается, конечно, что такие приложения существуют, например, классическая теория ошибок наблюдений, теоретическим обоснованием которой являются закон больших чисел и центральная предельная теорема. Эти теоремы изучаются в четвертом семестре, в течение которого и происходит выбор кафедры студентами (а начало занятий на кафедре приходится на сентябрь следующего учебного года). Так вот, насколько я помню, при начале этих занятий на кафедре ни один из студентов не мог ответить на следующий вопрос.

Пусть даны результаты измерений (в повторных опытах) $x_1, x_2, \ldots x_n$ некоторой физической константы a. Понятно, что за оценку для a мы возьмем среднее арифметическое из наблюдений $\bar{x}$. Как оценить, насколько сильно по порядку величины может отличаться эта оценка от истинного значения a?

Ясно, что при изучении курса теории вероятностей преподаватели не показывали студентам соответствующего элементарного приема теории ошибок (например, доверительного интервала, основанного на нормальном приближении для распределения $\bar{x}$ и эмпирической оценке дисперсии ошибки наблюдения).

А почему они его не показывали?

Этот вопрос относится к числу таких вопросов, на которые нельзя ответить в рамках той «философии науки», которая была весьма популярна во второй половине XX века. Прежде всего, на нехватку отведенного на теорию вероятностей (в четвертом семестре) учебного времени ссылаться нечего: надо всего лишь объяснить на основе закона больших чисел, что дисперсию можно оценивать по наблюдениям – дело пяти минут. Сам прием вполне признан современной научной парадигмой: например, вы не опубликуете статью в медицинском журнале, если в ней не будет хоть каких-нибудь доверительных интервалов. Наконец, вполне доступны источники исходных данных, а арифметические вычисления в наш компьютерный век вполне можно поручить пакету Excel.

Возьмем для примера задачник Л.Д. Мешалкина [1]. Шестидесятые годы XX века, когда появился этот задачник, являются временем максимального расцвета науки в Советском Союзе, и по своему содержанию задачник Мешалкина вполне соответствует этому понятию расцвета. Кроме массы интересных чисто математических задач, он содержит достаточный для преподавания курса теории вероятностей набор таких задач, на которых можно понять основные приемы приложений. Он, правда, имеет существенный недостаток оформления: пояснения к ряду задач даны в столь сжатой форме, что студент не может их самостоятельно понять – требуется помощь преподавателя. Но в эпоху всеобщего энтузиазма по отношению к науке кто же будет заботиться об идеальном оформлении?!

Так вот, в этом задачнике имеется задача 456, в которой приводятся результаты опытов Милликена (1909 - 1913 гг.) по измерению заряда электрона (58 наблюдений). Казалось бы, преподавателям все карты в руки: в какой-то ситуации можно просить студентов скопировать эти данные с заранее заготовленного электронного носителя и произвести с помощью Excel требуемую в задаче обработку. Ну а если время не позволяет, то можно сообщить готовый результат: практически гарантирована точность определения искомой константы не хуже 0.1%, к которой и стремился Милликен. Почему же этого нет в реальном преподавании?

Нужно несколько глубже заглянуть в процесс «обоснования» общепринятого метода доверительных интервалов. Результат *i*-го измерения всегда можно представить в виде $x_i = a + \delta_i$, где *a* – истинное значение, δ_i - ошибка *i*-го измерения. Однако вся штука состоит в том, что на ошибки измерений мы смотрим, как на независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нулевое математическое ожидание (последнее называется «отсутствием систематической ошибки»). Тогда и вступает в действие вся вероятностная кухня, которая говорит, что дисперсия среднего арифметического из *n* наблюдений в *n* раз меньше, чем дисперсия отдельного наблюдения, а последняя оценивается по выборке. Каков статус этой модели, в частности, подлежит ли она экспериментальной проверке? Ну, очевидно, что нет. Ведь в теории вероятностей случайные величины – это измеримые функции на пространстве элементарных событий. Значит, надо в доступном для экспериментальной проверки виде предъявить это пространство и функции на нем, чего в приложениях никогда не бывает. Поэтому я предпочитаю при объяснении ситуации студентам употреблять вместо слова «модель» слово «душа». Мы наделяем реально существующие числа – результаты измерений (точнее, ошибки измерений) – душой в виде независимых случайных величин, и на основании свойств этой души предлагаем сделать нечто с реальными данными.

Смысл слова «душа» проясняется следующим примером. Этнографы выяснили, что эскимосы Аляски рассуждали следующим образом. Например, им надо понять, что будет: догонит охотник лося, которого он преследует, или нет. Оказывается, в духовном мире душа охотника на душе лыж бежит по душе снега за душой лося, и если там догонит, то и в реальном мире тоже. Для эскимосов это важно, потому что на духовный мир можно воздействовать шаманской пляской. В нашей современной научной парадигме шаманские пляски не приняты, но мы употребляем такую душу, на которую можно воздействовать центральной предельной теоремой. На её основе всё, чего мы не знаем об ошибках наблюдений, сводится к единственному параметру - дисперсии ошибки отдельного наблюдения, которая оценивается по выборке.

Любая наука устроена так, что в основе лежат некоторые души, т.е. несопоставимые непосредственно с реальностью сущности. Однако с реальностью могут быть сопоставлены выводы, вытекающие из свойств этих душ. Например, в случае неудачи охоты на лося шаману может быть предъявлено обвинение, что он плохо плясал. Другой пример - из книги Т.Куна [2]. Во второй половине XVIII века было обнаружено, что при нагревании окислов ртути удается собрать некий газ. Встал вопрос, какова природа, т.е. душа, этого газа: то ли это «дефлогистированный воздух», то ли новый газ, который можно назвать, скажем, «кислородом». Подтвердилось второе.

Научную революцию по Куну можно понимать как более или менее радикальное преобразование представлений о душе. Т.Кун, вообще, очень глубокий писатель. Для примера два его замечания из книги [2]. Одно касается понятия химического элемента как такого вещества, которое методами химии не может быть разложено на составные части. Кун замечает, что современные нам учебники химии приписывают это понятие Р. Бойлю, однако на самом деле Бойль использовал понятие элемента только для того, чтобы доказать, что такого вещества не может быть. Второй пример касается понятия скорости в классической механике и в специальной теории относительности. Принято считать, что при малых скоростях специальная теория относительности переходит в классическую механику, но Кун замечает, что это не так, потому что понятия скорости в этих теориях не совпадают. Кун не очень поясняет, в чем состоит это несовпадение, но, действительно, в классической механике векторы скоростей могут быть отождествлены с точками евклидова пространства, а в специальной теории относительности – с точками пространства Лобачевского. Таким образом, математические души скоростей в этих теориях различны.

Некоторые души были отвергнуты наукой, например, флогистон (отвергнутый с большим скандалом) или эфир (отвергнутый без скандала). Другие – как атомно-молекулярные представления – оказались весьма жизнеспособными. Однако не мешает заметить, что, например, уравнение теплопроводности выводится, фактически исходя из представления о флогистоне, который только называется иначе – тепловой энергией. Мы должны понимать эту тепловую энергию, как некую субстанцию, которая течет в соответствии с градиентом температуры (так называемый «закон Фурье»). Из атомно-молекулярных представлений добраться до простого и общепринятого уравнения теплопроводности, насколько мне известно, невозможно.

2. Судьба души из случайных величин

В общепринятых учебниках считается, что вероятность события проявляется как его частота в длинном ряду однородных опытов. Нетрудно показать, рассуждая логически, что таких однородных опытов не может быть, как и химических элементов по Р. Бойлю. Действительно, если все опыты проводятся в одинаковых условиях (которые мы успешно контролируем), то и исход всех опытов должен быть одним – рассматриваемое событие либо во всех сразу опытах наступит, либо не наступит. А если мы не полностью контролируем условия опыта, то как мы можем знать, что они остаются настолько одинаковыми, чтобы обеспечить статистическую однородность, т.е. постоянство вероятности наступления события?

В задачнике Мешалкина результаты измерений Милликена приведены в порядке возрастания, т.е. в виде вариационного ряда. Но в книге Ю.В. Линника [3] они приведены в другом порядке: вероятно, в порядке их получения Милликеном. Наличие компьютеров делает нас полубогами в отношении предшествующих поколений исследователей. В частности, для нас не составляет труда нарисовать тот или иной график, на что прежде ушло бы не меньше часа работы. Вот что получается, если нарисовать график наблюдений Милликена в том порядке, в каком их приводит Линник.

Рис. 1.Данные Милликена в порядке получения

Кто же, глядя на этот график, станет утверждать, что наблюдения Милликена представляют собой *одинаково распределенные* случайные величины?! Разброс наблюдений в правой половине графика явно больше, чем в левой.

Мы еще похожи на полубогов в отношении предшествующих историков науки, потому что у нас есть интернет, из которого можно извлекать прямо себе на дом научные публикации, например, соответствующую статью Милликена. И там есть объяснение большего разброса второй половины наблюдений: Милликен менял давление воздуха, тормозившего движение заряженных капелек масла под действием электрического поля. (А Кэвендиш, измерявший силу тяготения, менял проволоку, на которой висело коромысло крутильных весов.) То есть говорить об адекватности модели одинаково распределенных (в разных опытах) ошибок измерения нельзя.

Но если говорить не о модели, а о душе, то душа, которой мы наделяем реальные явления, конечно, не может быть адекватной, и этого от неё никто и не требует. Но она может быть полезной или бесполезной в том смысле – приводят или нет извлекаемые из этой души следствия к желаемому результату. В случае обработки измерений желаемый результат состоит в том, чтобы построенный доверительный интервал в самом деле содержал истинное значение искомой константы. А как можно это проверить? Ну, надо подождать несколько десятков или сотен лет, пока наука разработает существенно более точный способ измерения этой константы, и тогда все будет ясно.

Увы! В случае Милликена результат отрицательный. В то время как практически гарантированная теорией ошибок точность составляет 0.1% от измеряемой величины, фактическая ошибка составляет 0.6%. И причина этого (как считают историки физики) не в том, что ошибки в разных опытах статистически неоднородны, а в том, что Милликен использовал не совсем верное значение вязкости воздуха. Оценке последней величины Милликен уделяет в своей работе много внимания, но вот – не совсем получилось.

А в случае измерений Кэвендиша (1797-1798гг.) вообще получается интересно. Он измерял среднюю плотность Земли по отношению к плотности воды. У него есть четкое определение того, что понимается под этой средней плотностью Земли. Оно заключается в следующем. Представим себе шар, центр которого совпадает с центром Земли, а радиус равен расстоянию от центра Земли до той точки, где находились крутильные весы Кэвендиша. Пусть этот шар заполнен однородным веществом таким образом, что его сила тяготения в точности равна силе тяготения Земли (в той самой точке). Спрашивается, чему равно отношение плотности этого вещества к плотности воды: это и есть искомая постоянная. Таким образом, каждый отдельный опыт Кэвендиша приносит в конце концов некое безразмерное число (всего опытов 29).

Кэвендиш теории ошибок не знал (она возникла лет на 10-20 позже у Лапласа и Гаусса). Доверительный интервал по его данным сосчитал не кто иной, как П.Л. Чебышев в своей магистерской (по-нашему – кандидатской) диссертации «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845 г.) Задачу диссертации поставил попечитель московского учебного округа граф И.Г. Строганов. Считается, что он был хорошим попечителем, что подтверждается и данным случаем. Строганов, очевидно. знал, что на Западе (а именно у Лапласа) возникла такая замечательная наука – теория вероятностей, которая **одна может доставить прочное основание для всех наук, основанных на опыте и наблюдении.** Вот он и поручил аспиранту П.Л. Чебышеву разобраться в этой науке и изложить её для российского употребления, однако без употребления «высшей математики», чтобы её мог понять и выпускник гимназии. Например, знак интеграла употреблять запрещалось, и потому у Чебышева возникают суммы, содержащие 10^{15} слагаемых. Понятно, что Чебышев принялся изучать Лапласа, в частности его «Аналитическую теорию вероятностей». Эта книга начинается с введения под названием “Essai philosophique...", в котором Лаплас запрещает себе употреблять вообще какие-либо формулы, и эта часть написана вполне понятно. Но суть дела излагается в математической части. Эту математическую часть понять вообще нельзя, потому что Лаплас пользуется математическим анализом некоторым странным для нас образом. (Только покойный профессор кафедры теории вероятностей А.Д. Соловьев уже в наше время как-то сумел в ней разобраться.) Строганов об этом знать не мог, а молодому аспиранту Чебышеву неудобно было бы сказать, что он не понимает Лапласа, так как это означало бы признание в собственной глупости. Поэтому Чебышев вступает в борьбу за доказательство центральной предельной теоремы (для сумм дискретных одинаково распределенных величин) с помощью оценки всяких факториалов. Доказать он её не доказал, но уверился в её правильности. А на последней странице своего труда он выписывает доверительный интервал по данным Кэвендиша.

По данным Кэвендиша, но с одной оговоркой. Наименьшее значение из наблюдений Кэвендиша, равное 4.88, у Чебышева заменено на 5.88. Традицией указывать источник данных Чебышев, конечно, пренебрегает, но, по всей вероятности, он это сделал не сам, а воспользовался неким устоявшимся мнением. Дело в том, что в качестве среднего значения своих наблюдений Кэвендиш приводит 5.48, а это число получается именно после такой замены (без нее получается 5.44). Однако первичный протокол соответствующего опыта (работу Кэвендиша, а там есть первичные протоколы, тоже можно достать в бесплатном интернете, но с некоторым трудом) не дает никаких оснований для подобной замены. В общем, здесь некая тайна, весьма не безразличная к вопросу о том, поймал или не поймал доверительный интервал истинное значение.

По-видимому, в результате борьбы с факториалами и с суммами из 10^{15} слагаемых Чебышев сильно устал, потому что арифметические вычисления с данными Кэвендиша он выполняет явно плохо. (И это при том, что Чебышев вообще считается хорошим вычислителем.) Он совершает некое округление среднего значения, которое должно было бы сильно повлиять на результат вычисления дисперсии (такая ошибка непростительна и для гимназиста, о котором заботился граф Строганов). Но к счастью, эта ошибка компенсируется еще одной арифметической ошибкой. Получается правильное значение для оценки стандартного отклонения – примерно 0.04 для стандартного отклонения *среднего* из 29 наблюдений. Чебышев дает доверительный интервал вида 5.48±0.1, полуширина которого 0.1 составляет 2.5 стандартного отклонения, т.е. примерно с уровнем доверия 0.99. Но теперь спрашивается – поймал или не поймал?

В течение почти всего XX века считалось, что истинное значение равно 5.52, т.е.отстоит от выборочного среднего на одно стандартное отклонение, и это было прекрасно. Но в 90-е годы прошлого века стали появляться другие оценки. В интернете можно найти все что угодно в пределах от 5.50 до 5.60, а последняя величина уже не лезет в интервал. Иными словами, казалось бы, прекрасный научный метод – подождать 200 лет после Кэвендиша или 150 лет после Чебышева – в данном случае дает сбой.

Следует еще отметить, что сам Кэвендиш полагал, что невероятно, чтобы он ошибся более, чем на 1/14 (=7%) измеряемой величины. Действительно, в пределы ±7%≈0.35 влезает всё. (Эту оценку Кэвендиш делает, впрочем, без каких-либо объяснений.)

Неудачи с доверительными интервалами – это дело давнее. Лаплас в своем «Философском очерке» указывает доверительные интервалы для таких двух величин: отношение массы Юпитера к массе Солнца и отношение массы Сатурна к массе Солнца. В то время как абсолютные значения масс планет (даже, как мы только что видели, массы Земли) определены с небольшой точностью, их отношения к массе Солнца определяются точнее (по расстояниям от планет их спутников и периодам обращения этих спутников). Лаплас выразил найденные им доверительные интервалы в следующей изящной форме. Он предложил будущим поколениям ученых держать с ним пари о том, что эти будущие поколения изменят найденные им значения не более, чем на 1%. В случае Юпитера он предлагал поставить один франк против миллиона франков, а в случае Сатурна – один франк против 11000 франков. Это означало, что (по мнению Лапласа) доверительный интервал ±1% ловит истинное значение с вероятностью $1\text{-}10^{-6}$ в случае Юпитера и с вероятностью 1-1/11000 в случае Сатурна. С Сатурном, действительно, оказалось все в порядке: современное значение отличается от найденного Лапласом гораздо меньше, чем на 1%. Но для Юпитера разница составляет 2,3%. Причем выяснилось это довольно скоро: вопрос обсуждается уже в книге Курно [4], впервые изданной в 1843 году. По тону этого места книги Курно понятно, что установление ошибки Лапласа вызвало в ученых кругах некий шок.

Ведь в конце концов теория ошибок претендует на то, что она может совершить настоящее чудо. Для оценки того, с какой точностью определена из опыта та или иная константа, оказывается, не нужно знать ни что измерялось, ни какими именно методами, ни даже в каких единицах выражались результаты измерения. Достаточно знать только сами результаты измерения $x_1, x_2, ... x_n$, которые можно редуцировать к эмпирическим оценкам среднего и дисперсии. Ну а чудо на то и чудо, чтобы получаться не всегда: кроме техники, нужна ещё благодать.

Вот теперь, наконец, можно сказать, почему чудо теории ошибок не преподается студентам: каждый преподаватель, может быть, лично и не сталкивался, но общественному мнению известно, что в благодати частенько бывает отказано. Вопрос оказывается скользким, а такое преподавать неудобно: лучше заняться бесспорной математикой. А что при этом теряется?

Конечно, те доверительные интервалы, которые предлагает теория ошибок, не годятся на века развития науки: прочной основы для всех наук, основанных на опыте и наблюдении, не получается. Но пока идет конкретный процесс измерений, результаты которых колеблются, очень бы хотелось для пользы и достоинства науки, чтобы хоть статистические свойства измерений не менялись бы во времени и от замены одного наблюдателя другим. Наука многими способами пытается проверить, нет ли ошибок, и вот такая проверка статистической стабильности – один из подобных способов. Доверительные интервалы, построенные по наблюдениям, сделанным одинаковым способом в понедельник и вторник, должны, по меньшей мере, перекрываться, иначе мы наблюдениям не поверим. Существуют и более элегантные способы проверки стабильности статистических свойств, например, сравнение эмпирических функций распределения. Но все такие способы требуют снабжения реальных наблюдений душой из тех или иных случайных величин. В каких-то случаях она может оказаться полезной, а мы в преподавании фактически теряем все её приложения.

3. Новое явление графа Льва Толстого

Автор данного текста должен признать, что единственный источник, по которому он знакомился с теологией, это «Критика догматического богословия» Л.Толстого – книга, несомненно, еретическая. Но основы вероучения Толстой излагает, по-видимому, верно, как с помощью цитат, так и собственными словами. Эти основы состоят в том, что существует некий Высший Разум, или Бог, который вообще-то для человека непостижим, но он может открыть кое-что из своей мудрости, ниспослав откровения тем людям, которые этого достойны. Для подтверждения (и лучшего понимания) истин, данных в откровении, он может ниспослать чудеса.

Я потому думаю, что это изложение Толстого корректно, что в науке происходит то же самое. В самом деле, представление о том, что в математической теории вероятностей нужно думать с помощью теории меры, утвердилось в науке в начале XX века. Наиболее полно оно выражено в «Основных понятиях теории вероятностей» Колмогорова. Что же это, как не откровение? Теория меры возникла в результате углубленного изучения числового континуума. Казалось бы, такой науке, которая собирается прилагаться через теорию ошибок, нет дела до столь тонких свойств континуума. Но это не так. Например, формулу для вычисления математического ожидания функции от случайной величины

$$\mathbf{E}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\xi}(x) dx$$

(где $p_{\xi}(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ) нельзя доказать без использования интеграла Лебега. А эта формула используется постоянно.

Откровения о связи между теорией вероятностей и теории меры сподобился не один Колмогоров, но также ряд других математиков. По этой причине «Основные понятия теории вероятностей» могли быть поняты и были с восторгом приняты во всем мире. Но где же доказательства того, что всё это есть именно божественное откровение, а не дьявольское наваждение?

Ну, доказательства в науке получаются из эксперимента. При этом вовсе не запрещается мысленный эксперимент, которым только и занимается математика как таковая. В результате таких математических экспериментов был доказан целый ряд новых теорем – весьма элегантных с точки зрения той эстетики, которая присуща теории функций вещественной переменной, очень популярной в те времена. Например, вместо обычного закона больших чисел, основанного на неравенстве Чебышева, появился усиленный закон, основанный на гораздо более интересном неравенстве Колмогорова. Это только один пример, а вообще в чудесах в виде замечательных математических теорем недостатка не было. В отличие от теории ошибок, эти чудеса представлены и в современном преподавании – в курсах теории вероятностей и случайных процессов.

Но эта математическая эстетика не имела отношения к приложениям теории вероятностей. В самом деле, когда мы преподаем математическую статистику, перед нами всегда возникает, например, задача – как обосновать обычную оценку s^2 дисперсии по выборке. «Обосновать» в данном случае является общепринятым, но не отвечающим существу дела термином. Следовало бы говорить «сакрализовать», т.е. связать реально получаемое число с той душой (в виде независимых случайных величин), которой наделяются наблюдения. Для этого доказывается, что оценка s^2 является *состоятельной*, т.е. при возрастании объема выборки сходится к теоретической дисперсии отдельного наблюдения (теоретическая дисперсия, равно как и сходимость к ней, существует только в духовном мире). Если в этом доказательстве сослаться на обычный закон больших чисел, то получится сходимость по вероятности, а если сослаться на усиленный закон – то сходимость с вероятностью 1. Но для практики, всегда имеющей дело с конечным объемом выборки, эта тонкая разница весьма безразлична.

В мемуарах, относящихся к 30-м годам XX века, можно усмотреть деликатные намеки на то, что существовало определенное несогласие между А.Н. Колмогоровым и А.Я. Хинчиным с одной стороны и Е.Е. Слуцким с другой. Колмогоров и Хинчин интересовались математическим развитием теории вероятностей и случайных процессов, а Слуцкий хотел приложений. Но тут нет сомнения в том, что обе стороны на деле признавали появившийся позже китайский лозунг «Пусть расцветают сто цветов, пусть соперничают сто школ», так что особой остроты дискуссия не имела. Кроме того, все, несомненно, понимали, что вынести сор из избы - означает привлечь внимание идеологических органов.

Однако, Высший Разум, по-видимому, не любит застоя в тех или иных областях человеческой деятельности. Поэтому он посылает некоторым людям такие откровения, которые способны расшевелить застой.

В последние десятилетия XIX века для такой цели был избран Л.Н. Толстой. Надо сказать, что его сочинение «Критика догматического богословия» - это сочинение скучное, причем хорошо заметно, как самому Толстому скучно выписывать и опровергать те или иные пассажи из учебника богословия Макария. Но такие сочинения, как «Исповедь», «В чем моя вера?» или описание литургии в «Воскресении» скучными не назовешь. Понятно, что в течение двух десятков лет Священный Синод бесился и ярился, и не знал, что делать, читая эти сочинения. Наконец, в 1901 году Синод выпустил своё «Определение», знаменитое тем, что на него все плевали. Речь не шла об «анафеме» и даже об отлучении от церкви по воле церковного начальства. Синод просто констатировал, что Толстой сам порвал с православной церковью, и предлагал молиться о том, чтобы он покаялся и вернулся к церкви. То есть в констатирующей части «Определения», по сути дела, всё было правдой. Практическое последствие для Толстого (точнее – для его семьи) состояло в том, что в случае его смерти ни один священник не имел права похоронить его по православному обряду. А как раз вскоре после публикации «Определения» Толстой тяжело заболел.

В 60-х годах XX века в теории вероятностей сложилось такое положение, что вот: есть обширная и во многом эстетически прекрасная математическая теория, у которой, конечно, должны быть замечательные приложения, стоит только взяться за какие-то конкретные данные. Но что именно выходит из попыток приложений – было как-то неинтересно.

(Вспомните, как в задачнике Мешалкина данные Милликена даны в виде вариационного ряда, что не позволяет заметить их особенность, несовместимую с представлением об одинаково распределенных величинах. А тот факт, что доверительный интервал не содержит истинного значения, вообще в задачнике не был отмечен.)

Похоже, что не понравилось это Высшему Разуму, и он вызвал к жизни нового Толстого. Это полковник Павел Ефимович Эльясберг (см. [5]).

Эльясберг занимался космической баллистикой. Например, пусть некоторый спутник отделился от ракеты-носителя и летит только под действием земного (а также солнечного и лунного) тяготения и сопротивления атмосферы. Пусть его сначала видят радиолокаторы, расположенные у западных границ Советского Союза. По измерениям этих радиолокаторов вполне возможно определить параметры орбиты спутника, причем можно это сделать много раз. Обрабатывая эти определения в рамках теории ошибок, можно дать доверительные интервалы для параметров орбиты, а следовательно, и вычислить, в какой области пространства должен оказаться спутник в тот момент, когда его увидят РЛС, расположенные у восточных границ Союза. Увы! Спутник оказывается совсем не там, где ему полагалось бы быть, если считать, что параметры его орбиты были определены с той точностью, какая полагается по теории ошибок.

Эльясберг не описывает сколько-нибудь в деталях ни исходные измерения (наверно, это измерения дальностей спутника от нескольких разнесенных по поверхности Земли радиолокаторов), ни методику обработки: сглаживаются ли каким-либо образом сами первичные измерения радиолокаторов или много раз определяются параметры орбиты и затем усредняются. Неплохо бы также знать что-нибудь о систематических ошибках радиолокаторов (это можно понять по измерениям спутников с уже известной орбитой). Ничего конкретного из книги [5] узнать нельзя. Её пафос состоит в том, что предаются анафеме основные духовные сущности теории вероятностей – закон больших чисел и центральная предельная теорема (ну, не прямо, конечно, анафеме, т.е. дьяволу: они всего лишь объявляются «предрассудком XX века»). Общий смысл этой книги – разочарование в усвоенных смолоду ценностях – сближает ее с таким произведениями, как «Исповедь» и «В чем моя вера?».

Что касается «Воскресения», то у Толстого там есть такой мотив – намеренный обман священнослужителями простого народа, чтобы жить за его счет. Это, пожалуй, перебор: ведь многие священнослужители хотели доставить верующим хоть какое-нибудь утешение - какое могут. К счастью, подобный мотив у Эльясберга отсутствует. Не было также в отношении Эльясберга (насколько мне известно) ничего похожего на "Определение" Священного Синода.

Ведь если вспомнить описание литургии в «Воскресении», то речь идет, в частности, о следующем.

Если нарезать кусочки хлеба и налить в чашу вина, а потом помахать над ними вышитой салфеткой с произнесением известных слов, то хлеб пресуществляется в плоть Бога, а вино – в Его кровь. Верующие едят эту плоть, пьют кровь и таким способом приобщаются к Божеству. Толстой видит в этом величайшее издевательство над здравым смыслом, и ведь с чисто логической, рациональной точки зрения ему возразить нечего. То обстоятельство, что в течение тысяч лет массы верующих действительно чувствовали себя приобщенными к Богу во время литургии, лежит за пределами логического разума.

Так мог бы П.Е. Эльясберг написать что-нибудь вроде следующего. Результаты измерений – это просто какие-то числа. Но считается, что если эти числа ввести в компьютер и обработать с помощью статистического пакета, то они пресуществляются в случайные величины, подчиненные законам теории вероятностей. Разве это не бессмыслица?

И опять, с чисто логической точки зрения, возразить было бы нечего. Но к счастью, до столь высокого уровня отрицания Эльясберг не поднимается. Он всё-таки ищет объяснение в вероятностных терминах: через корреляции ошибок различных наблюдений, т.е. через нарушение их статистической независимости.

4. Парадигмы, единороги и василиски

Если изучать теологию по толстовской критике догматического богословия, то получается, что вторым основным догматическим представлением (после представления о Высшем Разуме, который иногда может людям что-нибудь открыть) является представление о греховности человека. Первородный грех, передающийся от поколения к поколению, – что же с этим возможно человеку сделать?! Ну, человеку не возможно ничего, а Бог может с этим помочь, вплоть до того, чтобы послать Искупителя.

С развитием человечества появляются новые виды деятельности. Как себе представляли Бога доисторические племена, жившие охотой и собирательством, нам толком не известно, но с появлением земледелия и скотоводства Бога стали представлять себе, как доброго пастыря (люди, стало быть, вроде стада овец), а у Толстого постоянно встречается образ хозяина и работника. Работник не понимает замысла хозяина, но должен выполнять порученную ему работу.

Но вот появляется новое занятие – наука. У Роберта Бойля даже была, кажется, научная лаборатория с наемными сотрудниками. Более двухсот лет назад Гёте написал первую часть «Фауста». К ней имеется пролог на небесах, в котором Бог представлен в виде заведующего научной лабораторией. Сначала архангелы на правах старших научных сотрудников поют хвалы Завлабу – как он прекрасно устроил весь мир. Потом появляется Мефистофель, оказывается, ровно на тех же правах старшего научного сотрудника, что и архангелы. Но ему поручено заниматься Землей и человечеством на ней, а это Завлаб устроил не вполне удачно. Вместо того, чтобы петь хвалу, Мефистофель начинает критиковать Завлаба, который, впрочем, не обижается – как настоящий ученый, для которого истина важнее, чем репутация. У Завлаба с Мефистофелем возникает научное разногласие при оценке потенциальных моральных возможностей Фауста, как одного из достойнейших представителей человечества. Тогда Завлаб дает чёрту разрешение поставить над Фаустом эксперимент. Таким образом, вместо доброго пастыря или хозяина появляется завлаб. Гёте ведь был, в том числе, и естествоиспытателем, так что он уже двести лет назад представлял себе мироздание в виде лаборатории.

Что касается первородного греха, то, с точки зрения научного сотрудника, грех в виде нарушения каких-то традиционных сексуальных запретов не представляет большой важности. Но вот грех глупости... В парижских салонах XVIII века остряки говорили, что каждый жалуется на недостаток денег, но никто не жалуется на недостаток ума. А в наше время вполне возможно найти ученого, который, в общем, доволен своей зарплатой, но, пожалуй, нет никого, кто не хотел бы быть умнее. Например, я вспоминаю, как во времена существования лаборатории Колмогорова случалось при обсуждении какого-то вопроса подумать то, что потом оказывалось глупостью. Но я ещё не успел высказать этой глупости, а Андрей Николаевич уже понял, какую именно глупость я подумал, и начинает объяснять, почему это глупо. Он был, как Бог в прологе к «Фаусту».

Примеры глупости изобильны. Например, Р.Бойль ввел понятие химического элемента только для того, чтобы доказать, что такого не может быть. А П.Л. Чебышев вычислял эмпирическую дисперсию по правой части формулы $\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2-(\overline{x})^2$, которая неустойчива к ошибкам округления. Лаплас же некрасиво просчитался с доверительным интервалом для отношения массы Юпитера к массе Солнца. Вариантом глупости может быть недостаточная информированность о том, что науке вообще известно по данному вопросу, либо использование непригодного (для определенной цели) экспериментального оборудования. Да собственно, этим вариантам несть числа и нет смысла составлять их список.

В своих попытках смягчить последствия греха глупости наука обращается к «коллективному разуму»: создаются научные сообщества, руководствующиеся соответствующими *парадигмами*. (Подобно тому как для смягчения последствий первородного греха создается объединение верующих – экклесия, т.е. церковь.) Выработалось мнение о том, что достаточно развитая наука тем и отличается от периода донаучного развития какой-то области знаний, что наука имеет парадигму. Например, Т.Кун описывает в предисловии к книге [2], как он удивился, проведя год в такой американской организации - "Центре современных исследований в области наук о поведении". В то время как в области астрономии, физики, химии или биологии существуют некоторые твердо установленные основы, в социологии или психологии ничего такого нет. Поэтому Кун, как он пишет, был поражен количеством и степенью открытых разногласий по поводу самой правомерности постановки тех или иных научных проблем, а также методов их решения. Кун политически корректно объясняет это тем, что в области наук о поведении еще не успела сложиться научная парадигма. Есть надежда, что в будущем она сложится, и тогда положение в этих науках будет таким же, как в естествознании.

Откуда же берутся парадигмы? Понятно, что без какого-нибудь откровения со стороны Высшего Разума никакая парадигма родиться не может. (Тот же Кун сравнивает возникновение новой парадигмы с религиозным откровением.) Но надо сказать, что наличие парадигмы в той или иной области и формирование достаточно развитой науки можно отождествить лишь при весьма широком толковании самого понятия науки.

Рассмотрим для примера историю Древнего Рима (источник в данном случае – Тит Ливий). В Риме существовали жрецы – авгуры, гаруспики, салии, фламины, децемвиры, квиндецемвиры, весталки – и как там они ещё назывались. Никто не может усомниться в том, что у этих жрецов была парадигма. Все они (как и весь римский народ) признавали существование бессмертных богов, которые охотно вмешиваются в людские дела. Для выяснения отношений с богами были детально разработаны необходимые ритуалы. Например, если выпал каменный дождь, да еще и молния поразила какой-нибудь храм, сенат мог по представлению жрецов назначить всенародные моления. А если какой-нибудь паршивый плебей, вместо того, чтобы молиться, чинил крышу на своей лачуге, то его, вероятно, ожидала незавидная участь. Жрецы были вполне способны принимать согласованные решения в каких-то серьёзных случаях. Например, в течение ряда лет в Риме не прекращалась эпидемия чумы. Что делать? В конце концов выяснили, что в Греции существует в каком-то храме статуя Великой матери богов. Надо эту статую у греков отнять и перевезти в Рим, причем встретить ее должна представительная делегация римских матрон. Конечно, всё так и сделали.

В частности, существовало у римских жрецов и предсказательное моделирование. Например, перед битвой важно было выяснить, насколько бойко клюют зерно священные куры. Если они клюют в три припрыжки, то это обещало верную победу. Ну а если вовсе отказываются от пищи, то не миновать поражения. Легионы не пойдут в бой, пока не узнают, что им обещают священные куры.

В общем, у римских жрецов налицо все мыслимые признаки парадигмы: есть общепризнанная теория и общепризнанные практические ритуалы. Откажем ли мы им в праве называться учеными?

Само понятие парадигмы потребовалось Куну затем, чтобы объяснить структуру научных революций. Не мешает, однако, заметить, что существование парадигмы не влечет за собой необходимости какого-то развития – революционного или эволюционного. Перенесемся из Древнего Рима в средневековый монастырский скрипторий. Парадигма тех монахов, которые сохраняли и переписывали книги, состояла в том, что в сочинениях древних авторов есть всё, что нужно знать человеку, но, разумеется, следует позаботиться о сохранении и распространении этого знания. В частности, монахи переписывали и так называемые «бестиарии», т.е. энциклопедии животного мира. Монахи хотели быть полезными людям, в частности, тем, кому приходилось путешествовать по диким местам. Был в этих бестиариях такой жестокий зверь «единорог», который имел обыкновение нападать на путешественников. Как быть, если придется с ним встретиться? Оказывается, единорога могла усмирить невинная девица (если, конечно, в самом деле невинна): она могла положить единорогу на холку руку и послать его куда подальше. Но был еще и василиск, взгляд которого обращал человека в камень. Посылать против него невинную девицу не имело никакого смысла, но надо было повернуться к нему спиной, а из подмышки показать ему петуха. Таким образом, практическая рекомендация состояла в том, что путешественнику следует возить с собой невинную девицу и петуха. И эти единороги и василиски вместе с обсуждениями необходимых качеств девицы и петуха кочевали из бестиария в бестиарий. Это и есть схоластическая форма развития науки: сведения кочуют из источника в источник без какого-либо обращения к реальности.

А не может ли быть чего-нибудь похожего в современных научных журналах?

Обратимся к мемуарной книге [6]. Её автор – Б.Л. Иоффе – является специалистом по физике элементарных частиц, хотя по воле обстоятельств он не пренебрегал и такой прозой, как расчет ядерных реакторов (например, реактора для производства трития, используемого в качестве запала термоядерной бомбы). Сама по себе книга посвящена воспоминаниям о ряде физиков сороковых-шестидесятых годов прошлого века – героического, по оценке автора, периода развития физики в Советском Союзе. Но в ней имеется последняя глава под названием «Кончится ли физика?». В этой главе обсуждается вот какая проблема.

Известно, что для физики микромира – наиболее фундаментальной области физики – особую важность имеет вопрос о том, как устроено пространство на весьма малых расстояниях: порядка планковской длины 10^{-33} см. Известно также, что для экспериментального исследования свойств пространства на малых расстояниях нужно иметь ускоренные частицы с очень большой энергией. Согласно [6], расстояниям порядка 10^{-20} см отвечает энергия 10^3 ТэВ, а планковской длине, которая в 10^{13} раз меньше – соответственно, энергия в такое же число раз больше, т.е. 10^{16} ТэВ. На Большом адронном коллайдере предполагается получить энергию порядка единиц ТэВ, т.е. в 10^{15} раз меньше, чем нужно для того, чтобы добраться до планковской длины. Таким образом, экспериментальная проверка возможных умозрительных теорий оказывается невозможной. Дадим теперь цитату из [6]:

Конечно, теоретические построения моделей частиц и взаимодействий на малых расстояниях будут продолжаться очень долго, будет появляться большое число таких работ – ведь нельзя будет сказать, что какая-то из них неправильна, поскольку противоречит опыту. Но, я думаю(хотя не очень в этом уверен), что с течением времени число их будет уменьшаться, ибо интерес к такого рода деятельности будет слабеть.

Иными словами, автор книги [6] пророчит специалистам по физике микромира судьбу тех монахов, которые писали о единорогах и василисках. А в отношении теории вероятностей всё это ассоциируется со следующими обстоятельствами.

Как известно, в рамки колмогоровской аксиоматики прекрасно укладываются объекты, связанные со счетным числом случайных величин. Но если нам нужен случайный процесс с непрерывным временем, то речь идет уже о множестве случайных величин, которое имеет мощность континуума. Возникают многочисленные затруднения, с которыми приходится бороться с помощью сепарабельности и измеримости траекторий процесса; возникают марковские и строго марковские процессы и т. д. На первый взгляд, это затруднения схоластического характера. Но всё это происходит не ради любви к чисто схоластическому исследованию различных возможностей, а потому, что иначе нельзя погрузить в колмогоровскую аксиоматику доказательства многих важных формул. (Например, выражение гармонической функции в некоторой области через математическое ожидание её значения на границе в той точке, куда выходит траектория броуновского движения.) А ведь удачные формулы наделены глубоким мистическим смыслом: без них нельзя.

Так если бы физические представления о пространственном и временном континууме были успешно пересмотрены в сторону дискретности, то, быть может, были бы сняты и указанные затруднения в теории случайных процессов?

5. Идеальные сущности стохастической финансовой математики

Из современных учебников математической статистики (и лекционных курсов) исчезают какие-либо примеры статистической обработки реальных данных. Мы доказываем, конечно, теорему о том, что оценки максимального правдоподобия являются асимптотически нормальными и асимптотически эффективными, но не пытаемся оценить что-нибудь в конкретной ситуации. Иначе говоря, преподавание переносится в мир единорогов и василисков. Почему же так происходит?

Ну, во-первых, преподавателям-математикам конкретных данных неоткуда взять. В свое время лаборатория Колмогорова («Межфакультетская лаборатория статистических методов») задумывалась как место, где ведутся – пусть не очень объемные – но образцовые статистические исследования. Поначалу попытки подобного рода, действительно, делались. Но на фоне организационных перестроек, которые пришлись к тому же на период общего обеднения Советского Союза, эта деятельность практически сошла на нет.

Во-вторых, при попытках приложений неизбежно выясняется неадекватность тех или иных вероятностных моделей, с которых начинается вероятностно-статистическое исследование конкретной ситуации. Надежды на совершенствование моделей так, чтобы они стали адекватными, обычно иллюзорны. Нужно с помощью неадекватных моделей сделать что-нибудь полезное, а такая задача явно лежит за пределами математики. Преподаватели не хотят лишиться математической достоверности при изложении своего предмета, а потому и не решаются связываться со столь зыбкой почвой.

Наконец, реальные ситуации обычно очень сложны. Например, опыты Кэвендиша по тяготению состояли в том, что он тянул за специальную веревку, которая разворачивала балку с большими свинцовыми грузами на концах таким образом, чтобы эти грузы приблизились к концам коромысла крутильных весов (где находились малые грузы). После этого коромысло должно было совершать гармонические крутильные колебания (как математический маятник, выведенный из положения равновесия, и затем отпущенный). Но в реальности происходило не совсем так. Кэвендиш затратил много усилий, чтобы выяснить причину этого, но так и не выяснил (он списал эффект на таинственные конвективные токи воздуха, возможно, происходившие в том ящике из красного дерева, где размещались крутильные весы).

В опытах Милликена микроскопическая капля масла помещалась в электрическое поле. Рентгеновское излучение выбивало из этой капли некоторое (неизвестное) количество электронов. По скорости установившегося движения этой капли в электрическом поле и вязкости воздуха определялась сила, действующая на каплю. Но какая же сила отвечает ровно одному электрону? Ответ: нужно взять *наибольший общий делитель* тех сил, которые отвечают нескольким опытам с одной каплей. Понятно, что для такой ситуации весьма убого выглядит модель независимых одинаково распределенных ошибок измерений.

Таким образом, обучать студентов обращению с реальными данными до недавнего времени было не на чем. Однако в начале 90-х годов наступила счастливая перемена: А.Н. Ширяев с сотрудниками импортировали в Россию стохастическую финансовую математику. Исходными данными в этой науке являются данные о динамике рыночных цен тех или иных активов. Сложилась традиция, согласно которой такие данные публикуются в интернете и любой желающий может их быстро и бесплатно получить. Кроме того, имеется ещё следующее удобство. Если бы речь шла о данных, скажем, из области физики, то всякий, желающий с ними работать, был бы морально обязан сначала долго изучать соответствующую физику. А для динамики финансовых данных – несмотря на более чем вековые усилия в этой области – не существует каких-либо теорий, которые были бы одновременно и продвинутыми в математическом отношении, и подтвержденными в смысле соответствия фактам. Ничего изучать на первых порах не нужно (кроме, конечно, стандартных курсов теории вероятностей и математической статистики). Можно сразу начинать работу с фактическими данными.

Итак, пусть дана (извлечена из интернета) траектория $\{S_t, t = 0, h, 2h, ... T - h, T\}$ цен некоторого финансового актива с шагом по времени *h*. Сама эта траектория как целое существует в единственном экземпляре и потому не может быть предметом вероятностного рассмотрения (которое требует некоего ансамбля). Но можно перейти к приращениям самих цен или (лучше) их логарифмов, *предполагая* стационарность во времени этих приращений. Это и предложил сделать в 1900 году Башелье. Но в России знакомились с работой Башелье, уже зная колмогоровскую теорию турбулентности, так что с удовольствием увидели в ней частный случай колмогоровской концепции процесса со стационарными приращениями. Однако изящество колмогоровской теории (например, известный «закон двух третей») не имеет отношения к подходу Башелье, потому что у Башелье приращения ΔS_t не только стационарны, но и независимы. Тогда получается тривиальная линейная структурная функция.

Уместно ещё сделать следующее замечание насчет всеобщности первородного греха. Башелье был кем-то вроде аспиранта А. Пуанкаре. Существует отзыв Пуанкаре о его работе. У Башелье есть утверждение о том, что процесс с независимыми приращениями есть непременно броуновское движение (со сносом). Но при доказательстве Башелье самым жалким образом путает прямую теорему с обратной, а само утверждение неверно (ведь существует же пуассоновский процесс). Однако значительная часть похвал в адрес работы Башелье, которые есть в отзыве Пуанкаре, посвящена именно этому неверному утверждению.

В настоящее время принято рассматривать либо логарифмические приращения цен $\Delta_h \ln S_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t$, либо так называемые *возвраты* $r_h(t) = \dfrac{S_{t+h} - S_t}{S_t}$ (численно эти величины обычно очень близки к логарифмическим приращениям). Графики этих величин (как функций от *t*, при фиксированном *h*) представляют собой «щетки» примерно постоянного во времени размаха, наводящие на мысль о дискретном белом шуме, т.е. о независимости приращений (возвратов), относящихся к различным моментам времени. При допущении стационарности приращений математическое ожидание $\mathbf{E}\Delta_h \ln S_t$ должно линейно зависеть от *h*, а при допущении независимости должна линейно зависеть от h и дисперсия $\mathbf{D}\Delta_h \ln S_t$. Однако оценки по реальным данным показывают, что $\mathbf{E}\Delta_h \ln S_t$ обычно очень близко к нулю. Поэтому вместо дисперсии $\mathbf{D}\Delta_h \ln S_t$ можно взять (в духе «структурной функции» по Колмогорову) соответствующее математическое ожидание квадрата, т.е постулировать равенства

$$\mathbf{E}\Delta_h \ln S_t = ah, \qquad \mathbf{E}\{\Delta_h \ln S_t\}^2 = \sigma^2 h.$$

(Заметим ещё в скобках, что у Чебышева нет понятия дисперсии: он использует второй момент.)

Величина σ в последнем равенстве называется *волатильностью.*

(В учебниках финансовой математики не отмечается, что волатильность σ имеет довольно экзотическую размерность $[\sigma] = [t]^{-1/2}$. Но, выбрав h, можно говорить о безразмерной величине $\sigma\sqrt{h}$. Например, при h=1 сутки это будет «суточная волатильность», оцениваемая по ценам закрытия торгов. Её типичное значение для цен акций 0.02. При h=1год это будет «годовая волатильность», которая в $\sqrt{250} \approx 16$ раз больше, чем суточная, поскольку в году примерно 250 рабочих дней.)

Таким образом, душой финансовых данных являются, как и в теории ошибок, независимые одинаково распределенные случайные величины, однако в применении к логарифмическим приращениям цен.

Конечно, переходя к приращениям (логарифмов) цен, мы обнуляем их медленные изменения, которые и определяют, главным образом, выгодность долгосрочных инвестиций в те или иные активы. Стохастический подход мало полезен для долгосрочного инвестора. Его польза лежит в совсем другой области – бюрократической, а именно, в области государственного регулирования банковской деятельности.

Определение волатильности через математическое ожидание квадратов (а не через дисперсию) логарифмических приращений практически не меняет получаемых оценок волатильности. Но оно имеет существенные последствия. По этому поводу приходит на память следующий пример из истории христианства. На Иисуса Христа, как известно, существовали две точки зрения: ортодоксальная - что он единосущен Отцу и арианская (еретическая) - что он лишь подобносущен. В греческом написании эти слова "единосущен" и "подобносущен" отличаются лишь одной буквой "иота". Это незначительное различие в написании имело огромные последствия: один вариант означал ортодоксию, а другой - ересь. Так вот, в математике тоже так бывает, что незначительное различие в формулах имеет большие последствия.

Дело в том, что постоянство (во времени) математического ожидания чего-нибудь в духовном мире контролируется по реальным данным с помощью графика кумулятивных сумм наблюдаемых величин. При большом числе слагаемых должна получаться примерно линейная зависимость от числа слагаемых. Таким образом, применительно к финансовым данным нужно образовывать кумулятивные суммы *квадратов* логарифмических приращений в надежде получить примерно линейные функции. Вопрос в том, как это назвать. Для квадратного корня из средних величин этих квадратов имеется термин "волатильность", а сами средние величины квадратов никак не называются. Поэтому (по аналогии с физическим броуновским движением) предлагается использовать термин "температура". Тогда графическое изображение суммы квадратов (как функции от числа слагаемых) естественно называть *кумулятивной температурой.*

Для справки на нижеследующем рис. 2 изображена динамика обменных курсов доллара и евро к рублю за период от начала 1999 года по 18 августа 2013 года.

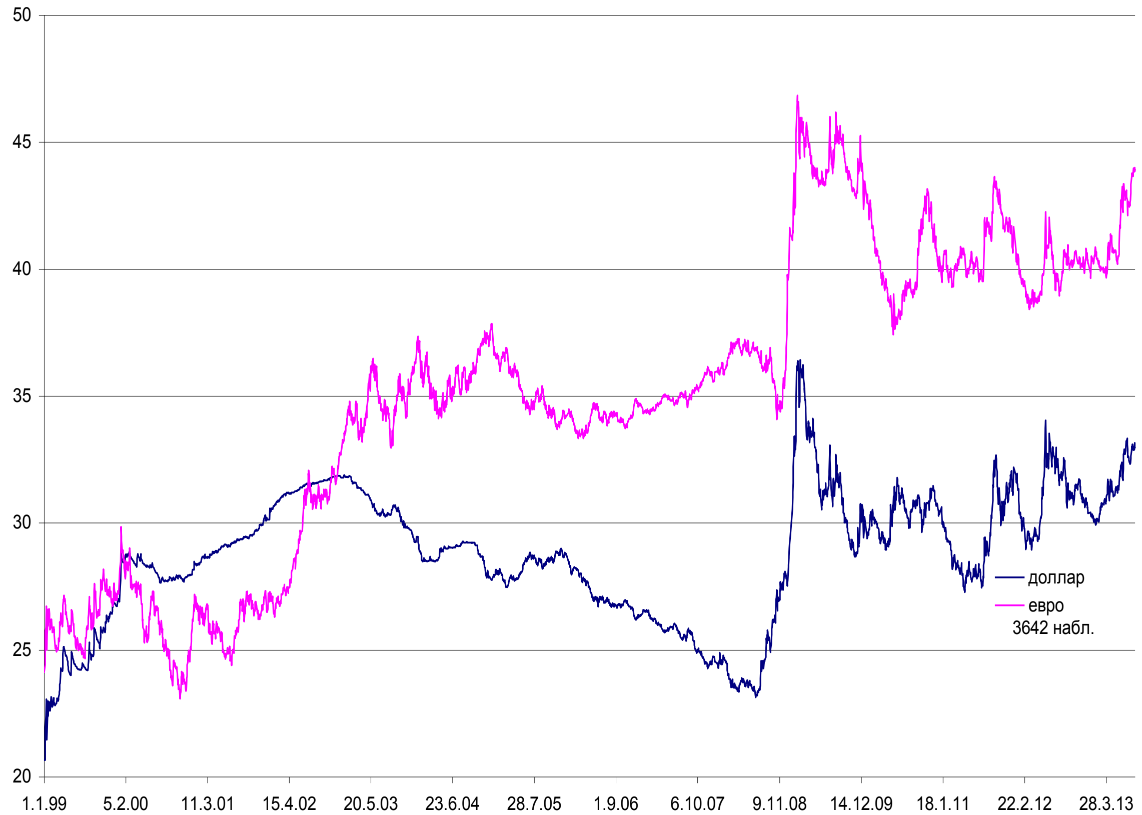

Рис. 2. Динамика обменных курсов

На следующем рис. 3 изображены соответствующие кумулятивные температуры (соответствующие шагу по времени один рабочий день - такому шагу, с каким объявляются официальные курсы в России).

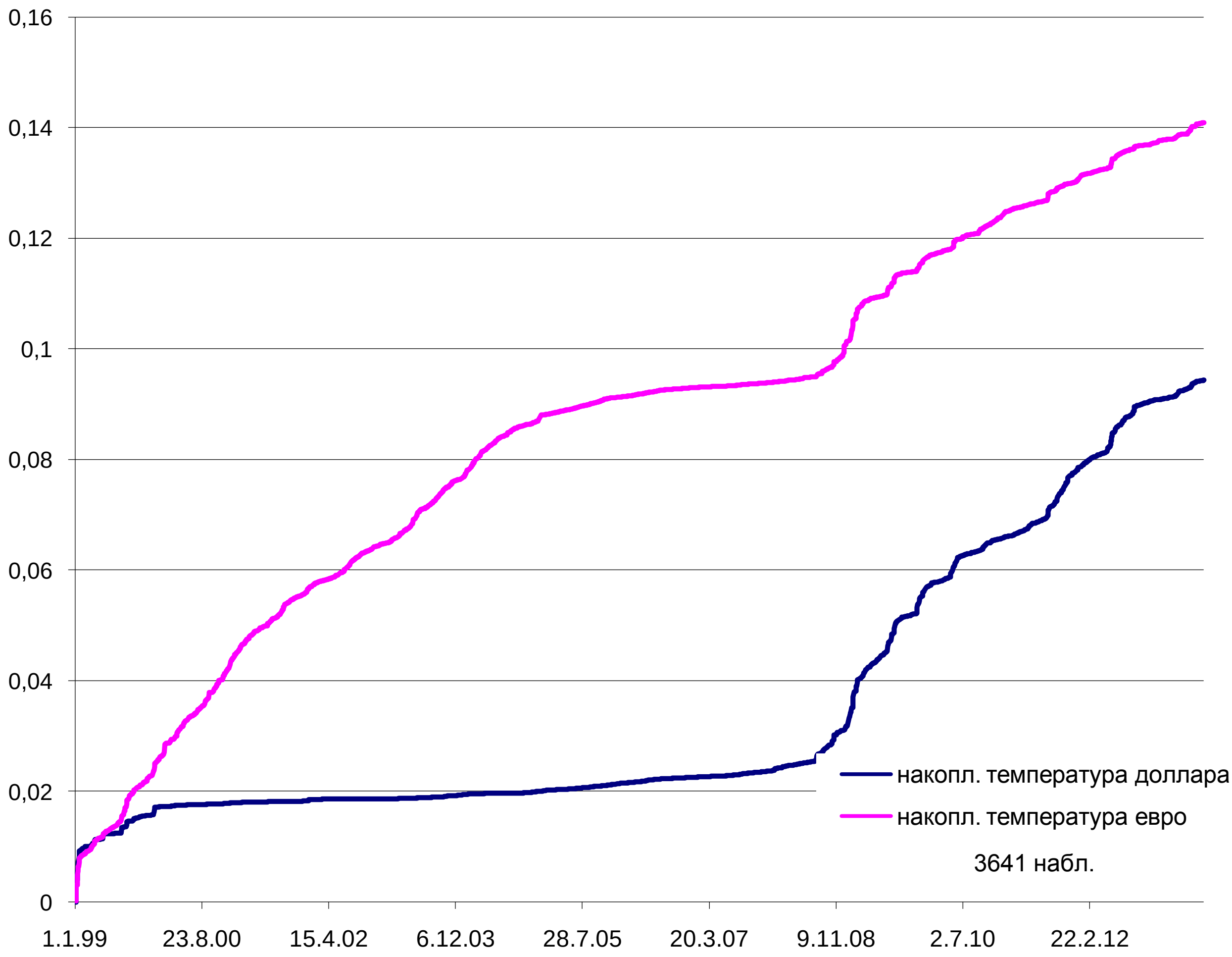

Рис.3. Накопленные температуры обменных курсов.

Какие комментарии можно сделать к рисункам 2 и 3? Из рис. 2 видно, что наиболее быстрое падение рубля по отношению к доллару и евро приходится на 1999 и 2009 годы, т.е. связано с финансовыми кризисами. Этот вывод тривиален, но, конечно, исключает возможность долговременного прогноза динамики курсов. Интереснее обратиться к рис. 3. Для оценки средней волатильности за некоторый интервал времени нужно взять приращение накопленной температуры на этом интервале, разделить его на число наблюдений (т.е. официальных объявлений курса) на том же интервале и из полученного числа извлечь квадратный корень. Если это сделать для курса доллара за 1999 год, то в качестве оценки (суточной) волатильности получим примерно 0.006=0.6%. Это число является достаточно типичным для валютных обменных курсов. Иными словами, в 1999 году волатильность курса рубль/доллар была в среднем на уровне международных стандартов. Однако между 15 и 25 января 2000 года произошло совсем интересное: наклон кривой накопленной температуры уменьшился в 12 раз (волатильность, следовательно, уменьшилась в $\sqrt{12} \approx 3.5$ раза). Это ассоциируется с тем политическим событием, что В.В. Путин стал в это время исполняющим обязанности Президента РФ. Тем более, что волатильность такой и оставалась до 2008 года - в течение двух президентских сроков Путина.

При этом волатильность курса рубль/евро была гораздо большей, существенно, впрочем, падая в 2005-2007 годах. Однако в конце 2008 года обе волатильности примерно сравнялись (и сравнялись с той волатильностью, которая была у доллара и евро в 1999 году, т.е. с международным стандартом).

Из приведенного примера понятно, что настаивать на постоянстве волатильности во времени нет никакой возможности. Вряд ли может спасти представление о стохастической волатильности, т.е. о том, что колебания волатильности возможно описать какой-либо вероятностной моделью. С чего бы динамике политической жизни (наружно выражающейся в смене президентов), которая очевидным образом влияет на волатильность, обладать какой бы то ни было статистической устойчивостью?!

6. Великая мать богов и Базельский комитет

Чрезвычайно опасной для благосостояния граждан является ситуация всеобщего банковского кризиса, когда все всем должны, а платить нечем, и банки прекращают выплаты даже по вкладам частных лиц (это в России мы видели в 1998 году). Такое может возникнуть, в частности, из-за чрезмерной банковской активности, когда все средства банков расходуются на рискованные операции (кредитование, спекуляции на рынке ценных бумаг и т.д.). Было бы правильно, если бы банки часть своих средств переводили в резерв в той или иной форме (например, помещали на такие счета, откуда их нельзя взять для кредитования или спекуляций, но можно для погашения задолженности перед другими банками). Спрашивается - какую же долю средств банки должны поместить в резерв?

На радость специалистам по теории вероятностей существует Базельский комитет по банковскому надзору, который определяет величину резерва в вероятностных терминах (что создает для наших студентов рабочие места в банках). Никто, конечно, не знает, насколько именно снижается риск возникновения банковского кризиса при тех или иных правилах, определяющих величину резерва. С чисто научной точки зрения, здесь положение такое же, как при перевозке в Древний Рим Великой матери богов ради спасения от чумы. Раз жрецы одобрили, значит есть надежда. А у нас вместо жрецов Базельский комитет, который, конечно, не может знать, какие именно резервы необходимы, но какие-то рекомендации даёт. Мать богов – это реалия древнеримской жизни, ну а рекомендации Базельского комитета – реалия нашей.

Несколько упрощенный сценарий Базельского комитета для определения *рыночных резервов* (т.е. банковских резервов на случай падения рыночных цен активов) следующий. Будем определять *относительные резервы*, т.е. какую долю должен составлять резерв от суммарного капитала банка, вложенного в рыночные спекуляции.

В конце дня t определяется, какой (относительный) резерв нужно держать в течение следующего дня t+1. Для этого, исходя из состава портфеля ценных бумаг, который сложился к концу дня t, определяется величина VaR_t такая, что относительная потеря стоимости этого портфеля к концу дня t+1за счет рыночных колебаний цен может превысить VaR_t лишь с малой вероятностью α. (Для α ранее принималось значение 0.05, а в настоящее время 0.01.) Этот расчет каждый банк делает, как умеет, но правильность расчета стимулируется некоторым бюрократически элегантным образом. Банк должен показать историю своих расчетов за год, кончающийся в день t, а именно - указать, сколько было таких случаев, когда фактические потери на следующий день превысили значение VaR, рассчитанное в предыдущий день (случаи выхода за VaR). Всего в году примерно 250 рабочих дней, так что при $\alpha = 0.01$ математическое ожидание числа выходов составляет 2.5. Если выходов существенно больше, то способ расчета, принятый банком, нехорош, и банк будет некоторым образом оштрафован при расчете резерва.

Формула для расчета резерва следующая.

$$\mathrm{Re}\,serv = \max\{VaR_t, (M+m)\frac{1}{60}\sum_{j=1}^{60} VaR_{t-j}\}$$

В этой формуле, по определению, M=3, а m заключено между 0 и 1, а именно, равно 0, если число выходов не превосходит 4; равно 0.5, если выходов было от 5 до 9, и равно 1, если было более 9 выходов. Через VaR_{t-j} обозначено значение VaR, отвечающее портфелю ценных бумаг такого состава, какой сложился в день t, но по данным, отвечающим дню t-j. Как правило, максимум достигается на втором члене этого выражения (из-за большого значения M), а штраф, выражаемый значением m, не очень велик.

Пример. Пусть портфель банка состоит из одного актива с суточной волатильностью $\sigma = 0.02$, сносом a =0, α=0.01 и логарифмические приращения распределены нормально. В этом случае лишь с вероятностью 0.01 логарифмическое приращение цены актива за одни сутки может оказаться левее (-2.326)*0.02= =-0.04652 , а относительные потери в этом случае составят $VaR = 1 - \exp(-0.04652)$ =0.0455. При m=0 резерв должен составлять втрое большую долю, т.е.около 13.6% (от капитала, вовлеченного в рыночные спекуляции), а при m=1 около 18.2%. Базельские рекомендации заметно ограничивают возможности распоряжения банковским капиталом: резервы получаются достаточно большими. Тем более, что левый хвост распределения логарифмических приращений заведомо тяжелее, чем полагалось бы по нормальному закону.

Однако что именно означают слова "левый хвост распределения", равно как и другие (использованные выше) теоретико-вероятностные термины? Волатильность финансовых активов не может быть постоянной во времени (см. для примера рис. 3); следовательно, логарифмические приращения цен любого актива не могут считаться стационарными. О какой же вероятности падения цен идет речь при определении VaR? Получается, что эта вероятность реально существует не в большей степени, чем древнеримские боги. Таким образом, перед специалистом по теории вероятностей (например, нашим выпускником), которого наймет банк для выполнения требований Базельского комитета, стоит поистине нелегкая задача: удовлетворить требованиям, выраженным в терминах того, чего не бывает. К счастью, Базельский комитет бюрократически мудр: он свёл все вероятностные свойства лишь к числу выходов фактических потерь за VaR в течение года. Например, четыре дозволенных выхода могут произойти в течение четырех дней подряд, и это не приводит к штрафу при расчете резерва, хотя и несовместимо с представлением о случайности.

7. Как попроще удовлетворить жажду богов?

Величина риска VaR должна рассчитываться для портфеля ценных бумаг. Изменения цен разных бумаг за один и тот же промежуток времени (при расчете VaR - за одни сутки), несомненно, статистически зависимы. Но количественные оценки этой зависимости (например, коэффициенты корреляции) явно меняются во времени. Связываться с многомерным анализом логарифмических приращений цен различных активов нет никакого расчета. Кроме того, нет доступных сведений о составе реальных портфелей тех или иных банков, а с портфелями произвольного состава иметь дело малоинтересно. Поэтому выдвигается следующая гипотеза. Пусть к концу дня t у банка сложился портфель определенного состава. Мы можем определить рыночную цену этого портфеля в любой предыдущий момент времени. Так давайте рассматривать его как единую ценную бумагу и рассчитывать VaR так же, как в одномерном случае. Гипотеза состоит в том, что такая редукция, при которой учитываются цены не отдельных бумаг, а некоторой их смеси, не слишком сильно ухудшает возможности расчета *VaR*. Эта гипотеза отчасти проверена, но недостаточно.

Понятно, что в силу указанных причин вполне респектабельной для учебных целей является задача вычисления *VaR* для отдельных активов, например, для акций тех или иных компаний. Не следует забывать о том, что существует следующий тривиальный способ расчета *VaR*. Нас интересует изменение логарифма цены актива за время от t до t+1. Составим ряд из 100 таких изменений за предыдущие дни, которые в момент t уже известны по прошлому поведению цен. Возьмем в качестве VaR_t наибольшую из 100 потерь капитала - это будет то, что возможно в одном случае из 100. Для такого способа расчета величины риска никаких знаний по теории вероятностей не требуется.

Специалист по теории вероятностей должен предложить какой-то метод расчета *VaR*, который был бы лучше тривиального. В каком смысле лучше? Ну, очевидно, в том смысле, чтобы была поменьше средняя доля капитала, который выводится в резерв согласно базельским правилам.

Что же есть для этого у специалиста по теории вероятностей? Волатильность активов не остается постоянной. В периоды времени с низкой волатильностью *VaR* можно делать меньше, а в периоды с высокой волатильностью - больше. Вот, собственно, единственная возможность. Речь идет о том, чтобы списать всю статистическую неоднородность логарифмических приращений лишь на переменный масштабный множитель. Следовало бы выяснить, как относится Высший Разум к такой идее. Для этого мы должны – как и древнеримский пулларий (хозяин священных кур) – сделать эксперимент, чтобы посмотреть, пошлет нам чудо или нет Высший Разум.

Для начала надо научиться оперативно оценивать волатильность. Заметим, что равенство $\mathbf{E}\{\Delta_h \ln S_t\}^2 = \sigma^2 h$ рассматривается как действующее при любом шаге по времени h. Поэтому число наблюдений для оценки волатильности можно увеличить, беря достаточно малое h. (Динамику цен активов с малым шагом по времени тоже можно найти в интернете.) Тут, конечно, на практике нельзя переусердствовать, и в [7] мы остановились на шаге h=10 минут. Согласно сценарию, мы вычисляем *VaR* на день t+1 в конце дня t. Поэтому для оценки волатильности можно использовать 40 десятиминутных приращений цен, отвечающих дню t, а данные о ценах в предыдущие дни мы решили не привлекать. Обозначим через s_t соответствующую оценку (суточной) волатильности. (Т.е. корень из суммы квадратов десятиминутных приращений.) Было бы замечательным чудом, если бы нормированные этой оценкой логарифмические приращения за сутки, т.е. величины

$$\{\ln S_{t+1} - \ln S_t\} / s_t$$

удовлетворяли какому-нибудь универсальному (не зависящему ни от каких параметров) закону распределения. Лучше всего - стандартному нормальному закону N(0,1) в честь Башелье. Это бы и означало, что всю статистическую неоднородность можно списать на масштабный множитель.

В опытах с 11 американскими компаниями (цены акций за два года) так примерно и получилось, но увы! не в области вероятностей порядка 0.01 (а примерно начиная с вероятностей 0.05 и больше). Левый хвост распределения даже после нормировки оценкой волатильности остается тяжелым (и он разный для разных компаний). Чудо было ниспослано лишь частично: в области не слишком малых вероятностей.

Если всё-таки вычислять *VaR* с помощью закона N(0,1) (т.е. следуя правилу: для логарифмических приращений VaR_t=2,326s_t), то получается значительное превышение ожидаемого числа выходов за *VaR*. Однако Базельский комитет наложил не очень большой штраф за превышение числа выходов (в виде значения m, которое может меняться от 0 до 1). Поэтому средний процент резервного капитала в случае использования нормального закона оказывается существенно меньше, чем при тривиальном способе расчета *VaR*. Если нормальный закон заменить законом, учитывающим тяжелые хвосты (своим для каждой из 11 компаний), то опять получается хуже, чем в случае нормального закона (хуже в том же смысле среднего резерва). Так в данном случае сработало то откровение в виде нормального закона, которое было ниспослано Башелье: этот закон научно неверен, но в рамках сложившейся бюрократической констелляции весьма выгоден.

Конечно, как и всякий жрец, спросивший богов о чем-нибудь, мы полагаем, что полученный ответ касается не только данного жреца (т.е. нашей работы [7]), но и всех, кто имеет отношение к данной проблеме. В частности – Базельского комитета.

Что касается Базельского комитета, то можно сделать два вывода.

1. Замена ранее принятого уровня α=0.05 на 0.01 выводит за рамки того откровения (о нормальном законе), которое было ниспослано Башелье. Эта замена заставляет заниматься областью столь малых вероятностей, что в ней трудно рассчитывать на достижение приличной статистической однородности (во времени) для динамики цен даже акций отдельной компании. Лучше бы восстановить уровень 0.05.

2. Установленный за превышение числа выходов штраф (в виде значения m) слишком мал для того, чтобы стимулировать правильный расчет величины риска (правильный в том смысле, что число выходов за *VaR* близко к ожидаемому). Значение m можно бы и увеличить.

Литература

1. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., изд-во МГУ, 1963.
2. Кун Т. Структура научных революций. М., АСТ, 2009.
3. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
4. Курно О. Основы теории шансов и вероятностей. М., Наука, 1970.
5. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как её обрабатывать? М., Наука, 1983.
6. Иоффе Б.Л. Без ретуши. Портреты физиков на фоне эпохи. М.,ФАЗИС, 2004.
7. Долгополов А.Л., Тутубалин В.Н., Чапчаев А.А. Оценка возможностей одного простого метода расчета величины риска. Интернет-публикация на странице кафедры теории вероятностей. 2013.