

Спектральный синтез для систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа.

Пусть $\{x_n\}$ полная и минимальная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а $\{y_n\}$ – ее биортогональная система. Для элемента x из H рассмотрим его обобщенный (формальный) ряд Фурье $\sum_n (x, y_n) x_n$ относительно этой биортогональной пары. Восстановление произвольного вектора по его ряду Фурье (например, с помощью линейного метода суммирования) – одна из классических задач анализа.

Есть как минимум две причины, препятствующие существованию линейного метода суммирования для этого ряда.

1. Биортогональная система y_n может оказаться неполной (в этом случае существует нетривиальный вектор с тривиальным рядом Фурье).

2. Существует разбиение множества индексов $N = N_1 \cup N_2$ такое, что смешанная система $\{x_n\}_{n \in N_1} \cup \{y_n\}_{n \in N_2}$ неполна.

Если этих двух препятствий нет, то мы говорим, что система x_n наследственна полна (или удовлетворяет условию синтезируемости).

В абстрактном гильбертовом пространстве эти свойства подробно изучались в 60–70-х годах в работах А.С. Маркуса и Н.К. Никольского. Изучение этих свойств в конкретных функциональных пространствах (для специальных семейств гармоник) началось в 80-х годах. Так, Р. Юнг показал для любой полной и минимальной системы экспонент на отрезке (или воспроизводящих ядер в пространстве Пэли–Винера) биортогональная система тоже полна.

Свойства 1–2 для пространств де Бранжа (и воспроизводящих ядер) изучались в предыдущих работах докладчиков. В частности в 2011 г. было показано, что существуют системы воспроизводящих ядер с неполной биортогональной системой (и даже бесконечной коразмерности). В классической ситуации систем экспонент на отрезке докладчиками (совместно с А. Боричевым) было доказано, что существуют системы без синтеза, но ортогональное дополнение к смешанной системе всегда не более, чем одномерно (Advances in Mathematics, 2013).

Доклад посвящен недавно полученному полному решению проблемы спектрального синтеза для пространств де Бранжа. А именно, в пространстве де Бранжа любая полная и минимальная система воспроизводящих ядер с полной биортогональной системой наследственно полна только для двух классов пространств де Бранжа:

1. Пространства де Бранжа с конечной мерой Кларка.

2. Пространства, которые совпадают с пространством фоковского типа.

Для случая 2 удалось получить полное описание таких пространств в терминах меры Кларка. Также, удалось описать размер дефекта смешанной системы (в частности, в общем случае он бывает бесконечномерным). В заключение мы обсудим приложения этих результатов в теории операторов.