

Множество Мандельброта и его кубический аналог

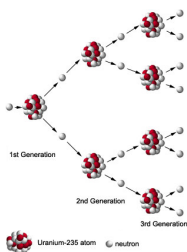
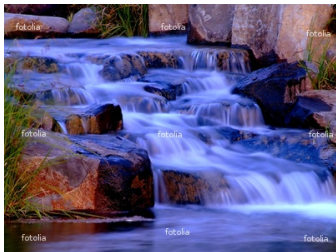
В.А. Тиморин*

*Факультет Математики

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики

Коллоквиум МИАН, 3 октября 2013 г.

Динамические системы



Модель роста популяции (P.F. Verhulst, R. May)



$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n),$$

где x_n = размер популяции в момент времени n (через n лет).

Другими словами, рассматриваются итерации функции

$$f(x) = rx(1 - x).$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$x$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(x)$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(x))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(x)))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(f(x))))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(f(f(x))))))$$

Теория итераций: вопросы

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность x , $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$, и т.д.

- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

Теория итераций: вопросы

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x))))$, и т.д.

- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

Теория итераций: вопросы

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность x , $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$, и т.д.

- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

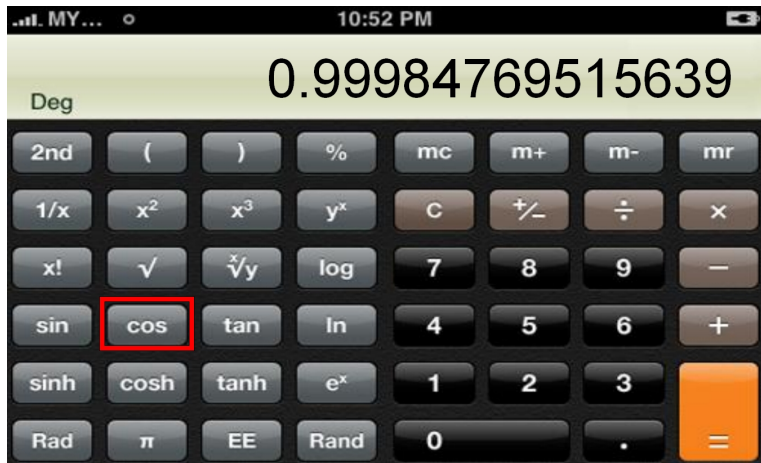
Теория итераций: практика



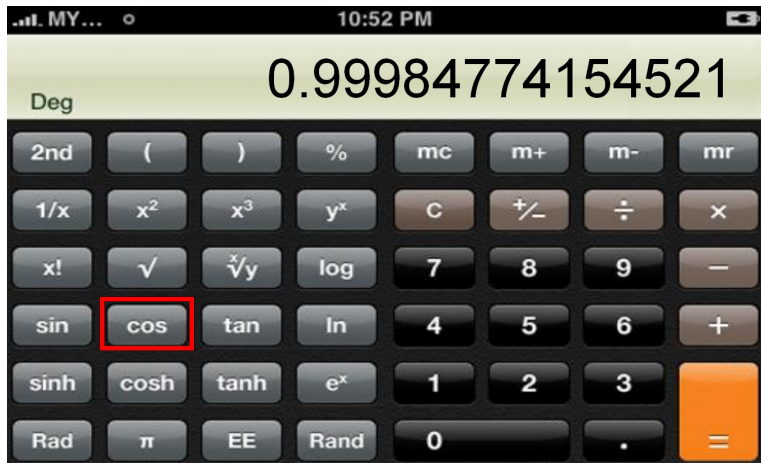
Теория итераций: практика



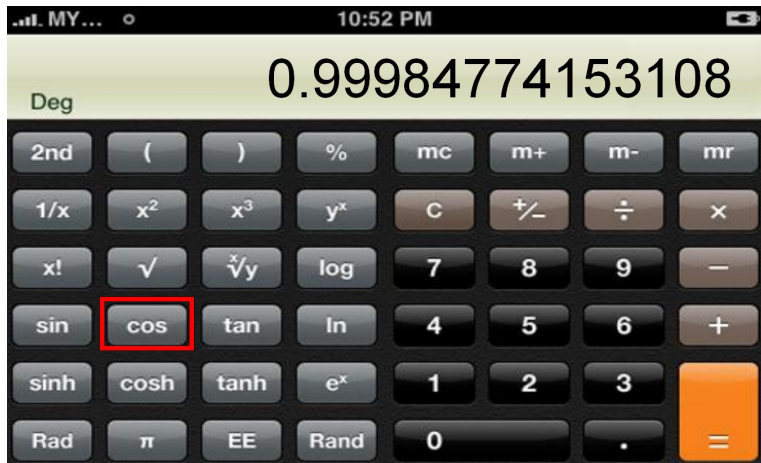
Теория итераций: практика



Теория итераций: практика



Теория итераций: практика



Многочлены

Мы рассматриваем **многочлены от одной комплексной переменной**

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_dz^d$$

как **топологические динамические системы** на $\mathbb{C}$.

Всякий квадратный многочлен аффинно сопряжен многочлену

$$p_c(z) = z^2 + c.$$

Сопряжение между f и g

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \end{array}$$

Если ϕ — гомеоморфизм, то это **топологическое сопряжение**.

Бассейн бесконечности и множество Жюлиа

Definition

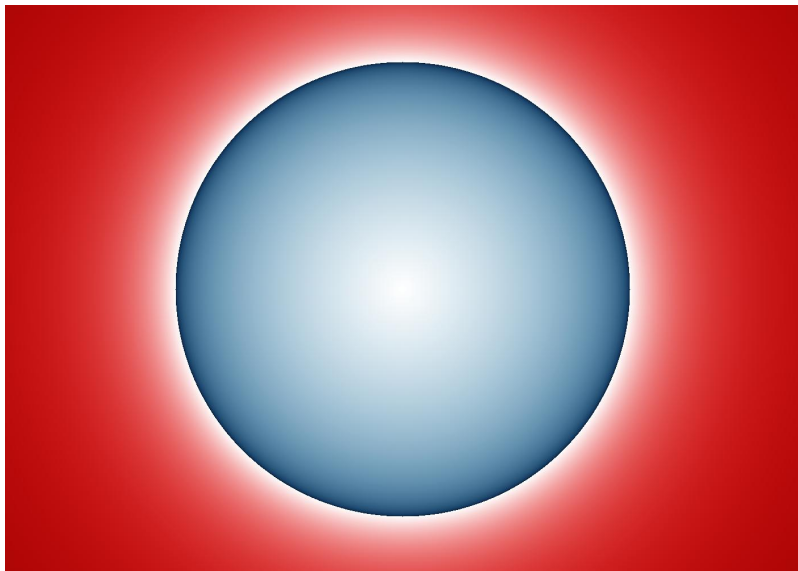
Бассейн (притяжения) бесконечности

$$\Omega_c = \{z \in \mathbb{C} \mid p_c^{\circ n}(z) \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)\}$$

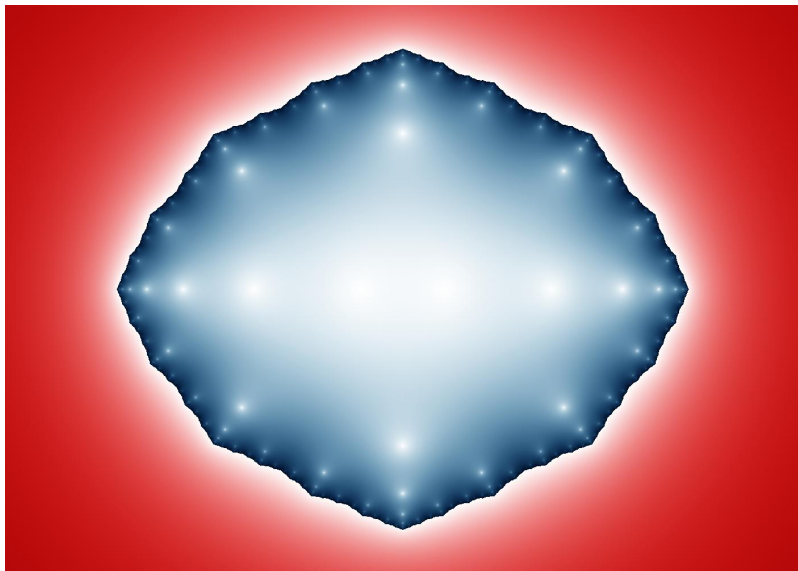
Definition

Множество Жюлиа $J_c = \partial\Omega_c$ — инвариантное множество, на котором динамика многочлена p_c хаотична (неустойчива).

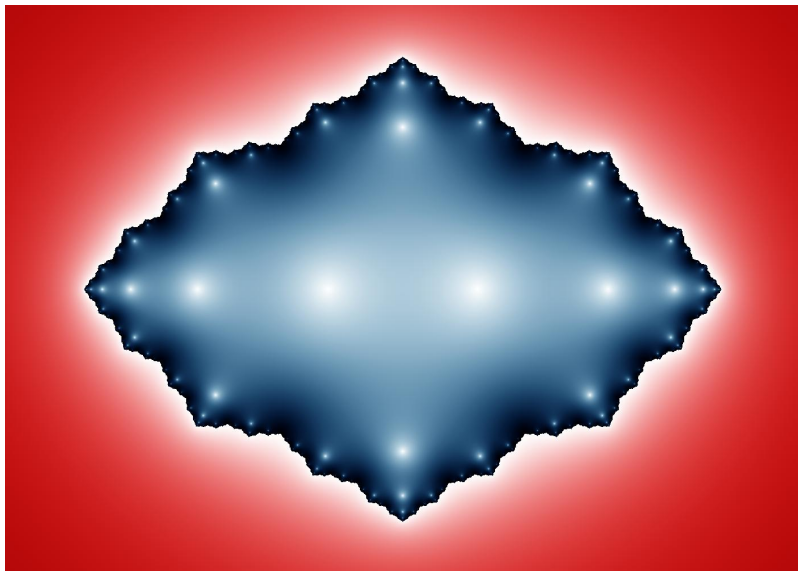
$$f(z) = z^2$$



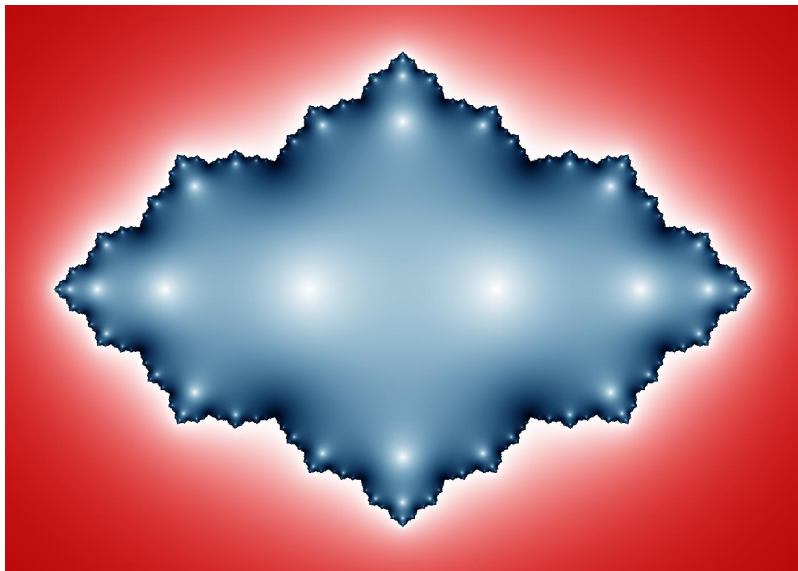
$$f(z) = z^2 - 0.2$$



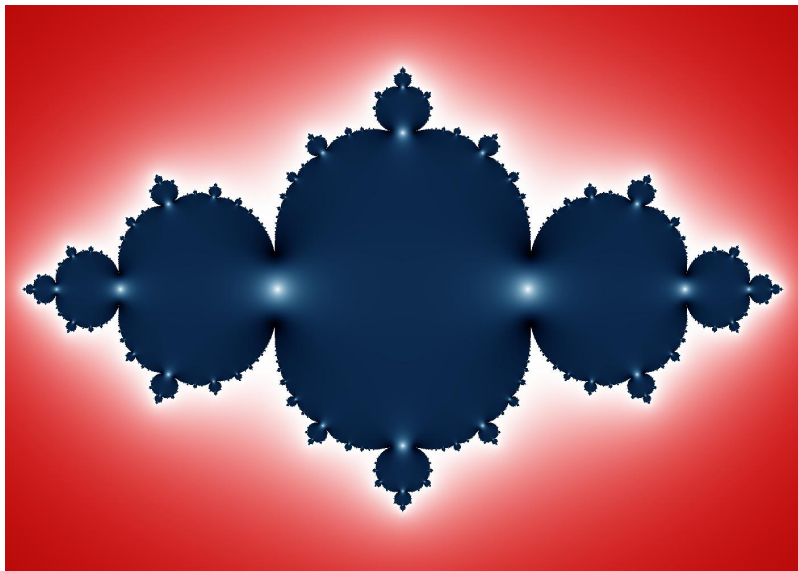
$$f(z) = z^2 - 0.4$$



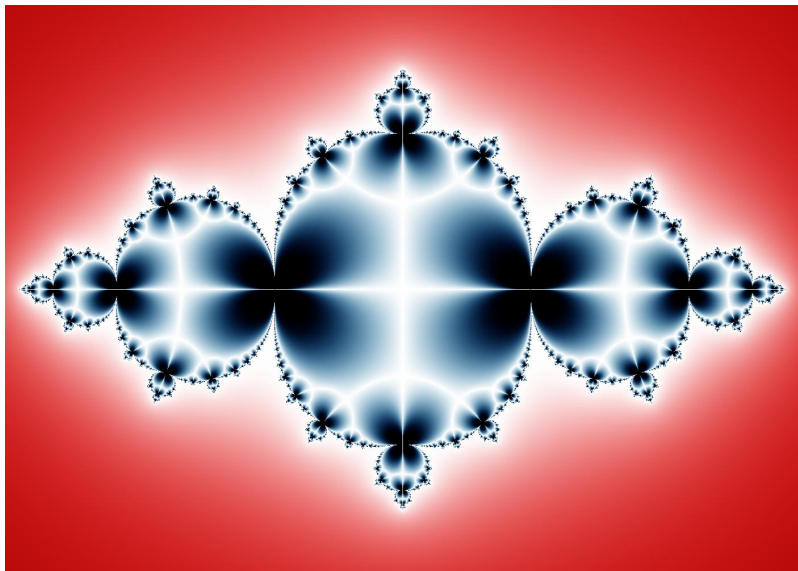
$$f(z) = z^2 - 0.5$$



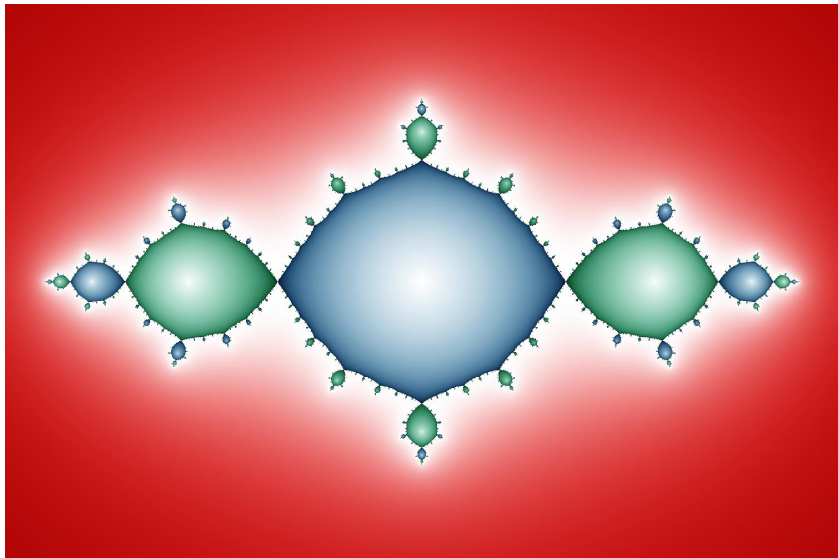
$$f(z) = z^2 - 0.73$$



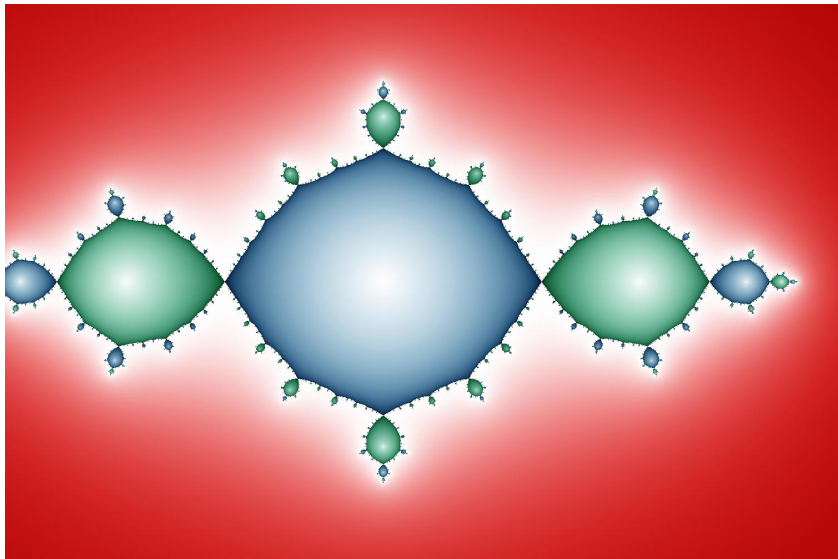
Параболическая бифуркация: $f(z) = z^2 - 0.75$



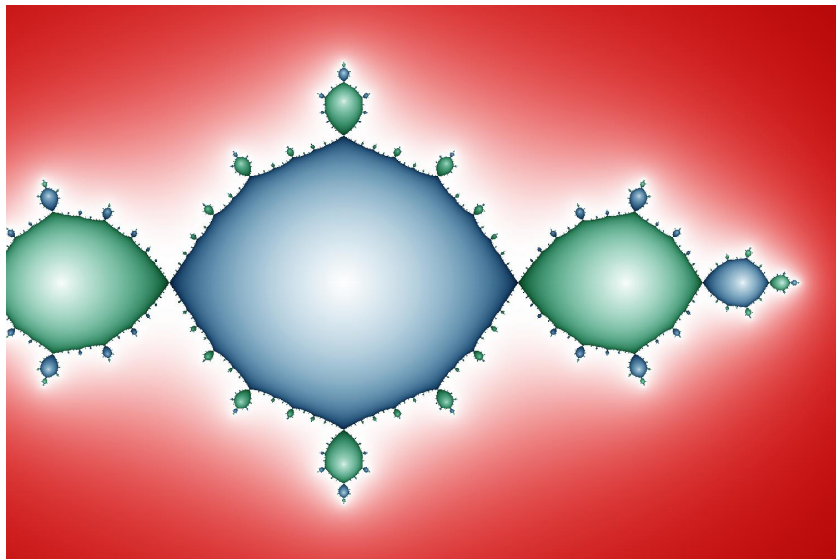
Базилика: $f(z) = z^2 - 1$



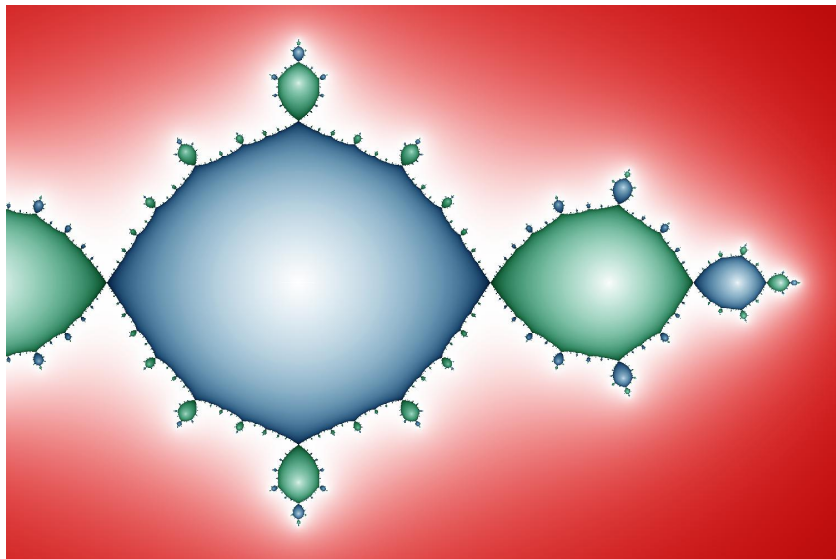
$$f(z) = z^2 - 1$$



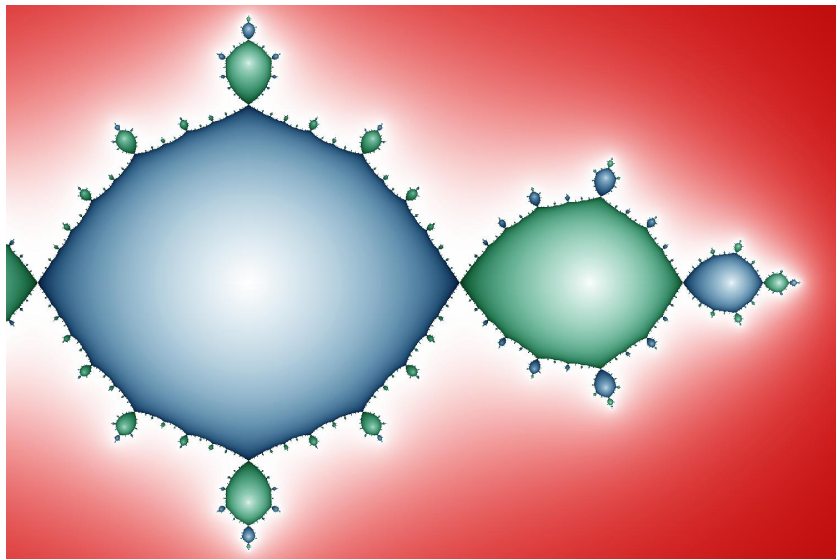
$$f(z) = z^2 - 1$$



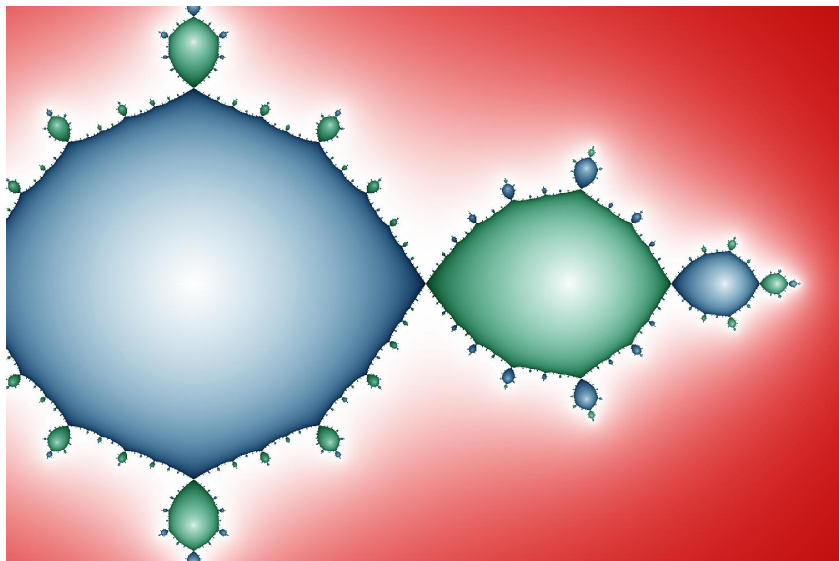
$$f(z) = z^2 - 1$$



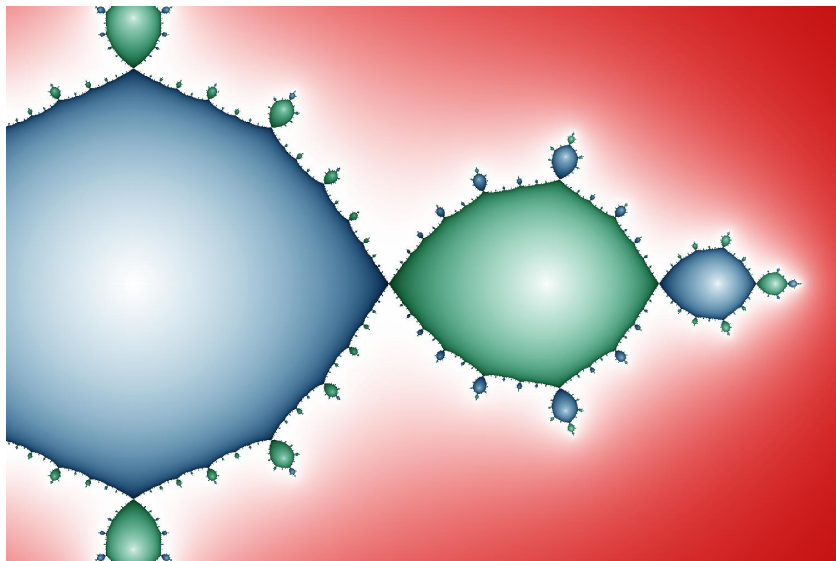
$$f(z) = z^2 - 1$$



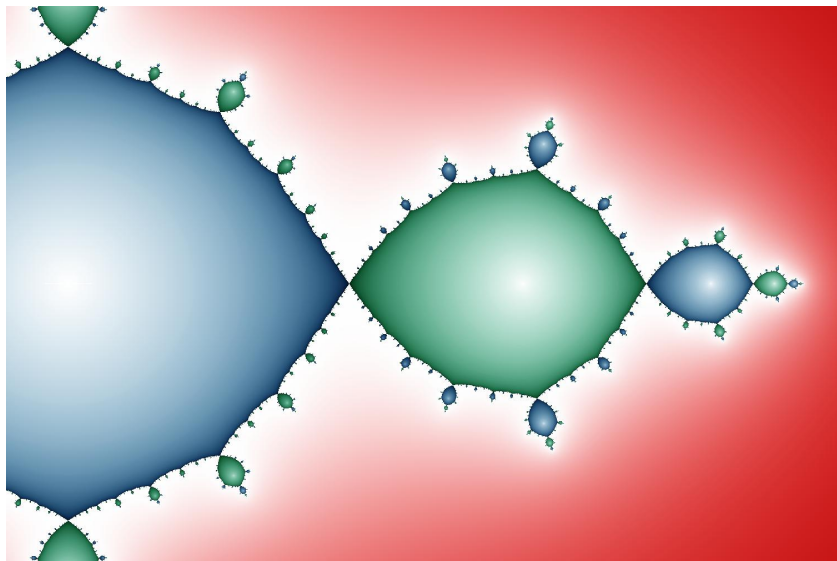
$$f(z) = z^2 - 1$$



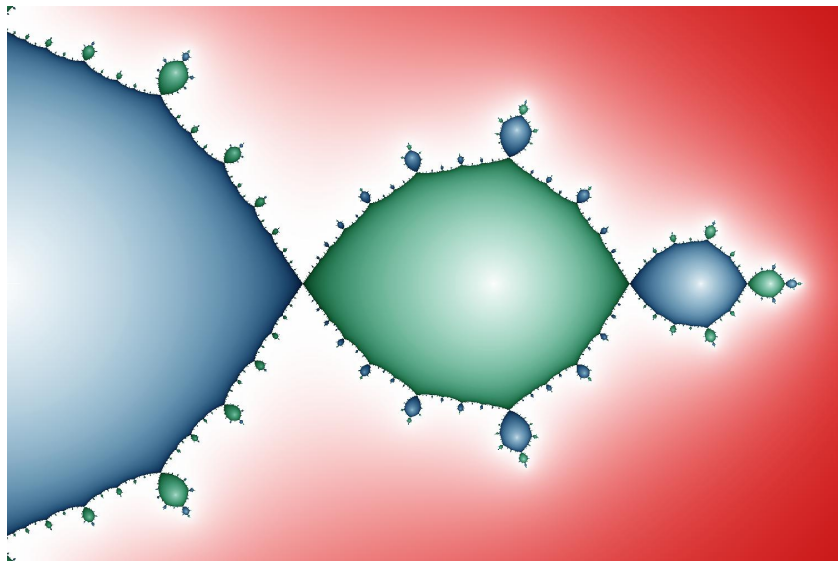
$$f(z) = z^2 - 1$$



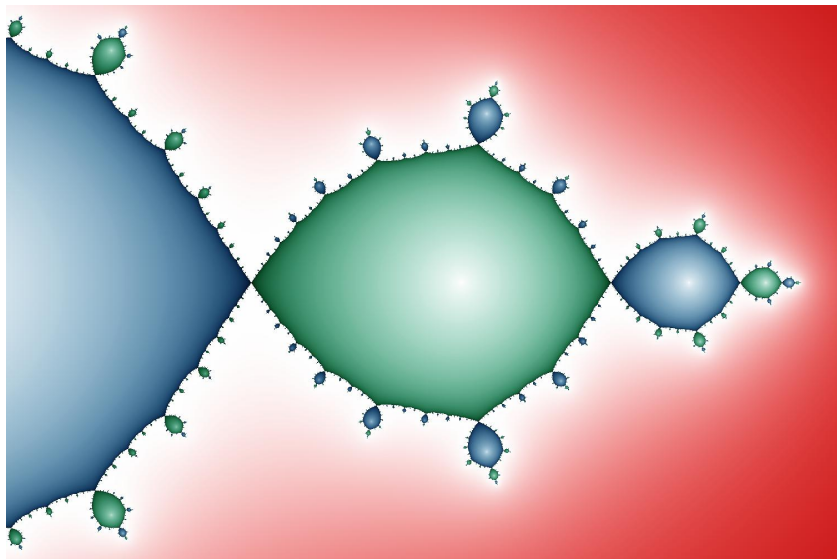
$$f(z) = z^2 - 1$$



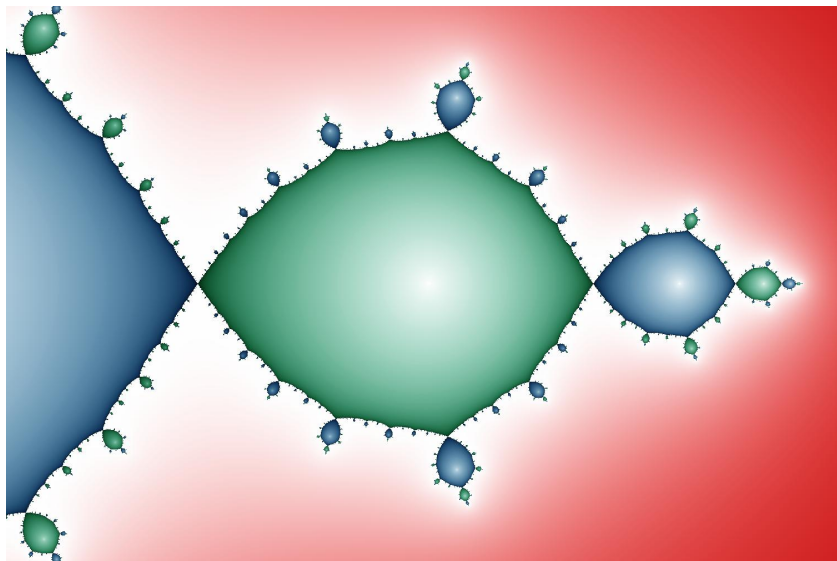
$$f(z) = z^2 - 1$$



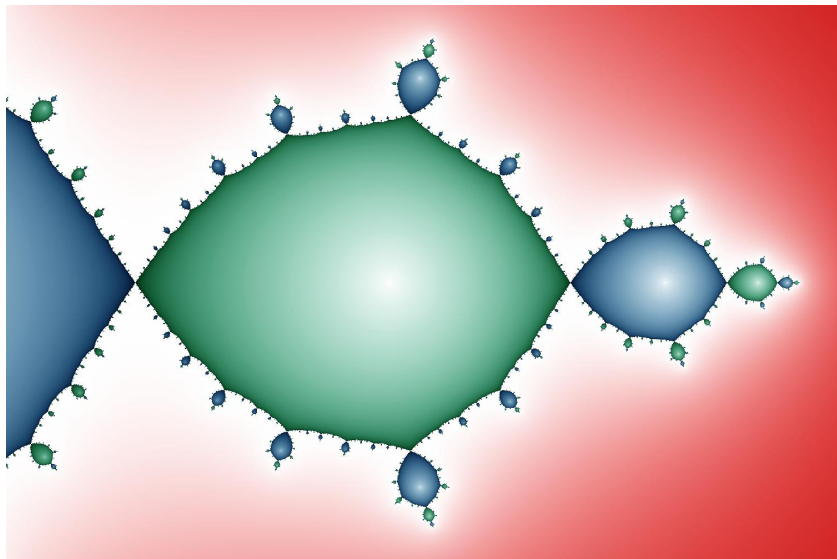
$$f(z) = z^2 - 1$$



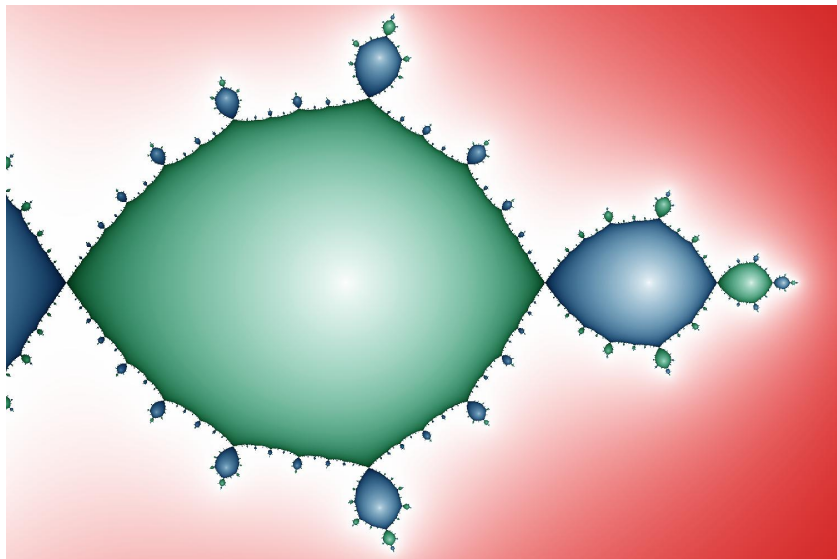
$$f(z) = z^2 - 1$$



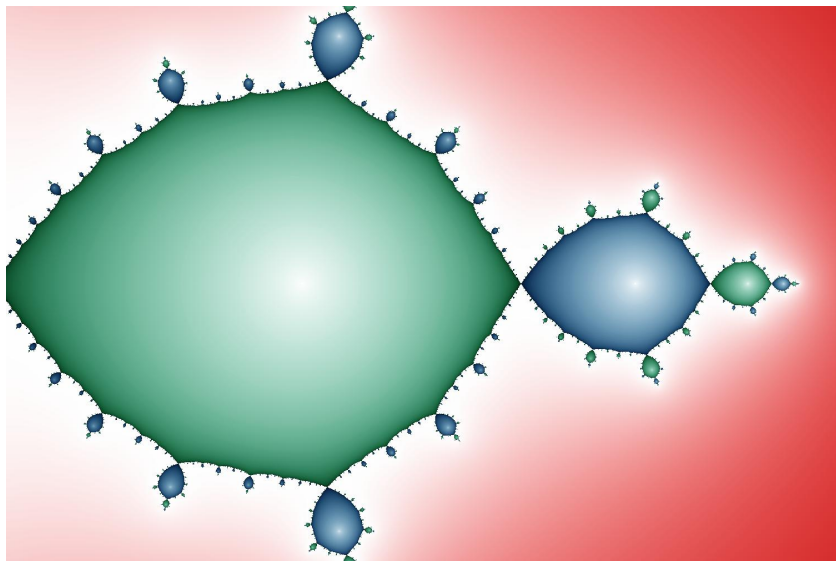
$$f(z) = z^2 - 1$$



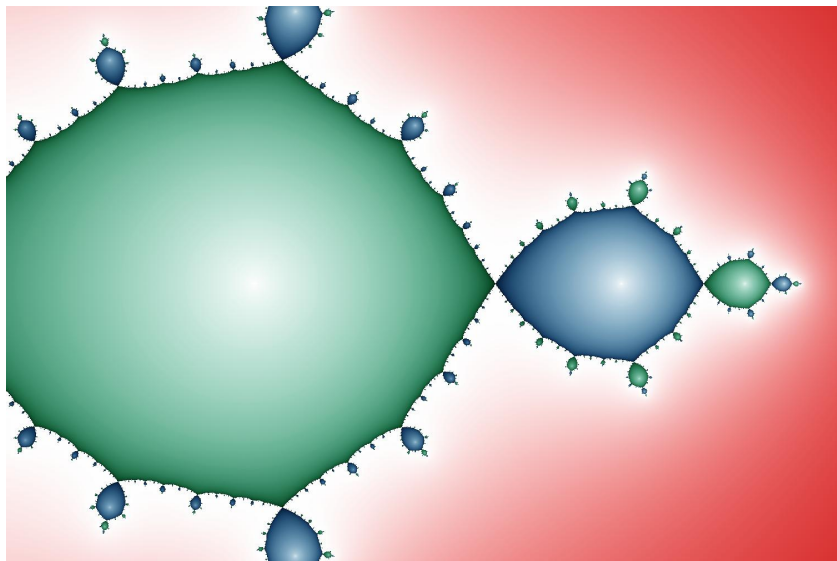
$$f(z) = z^2 - 1$$



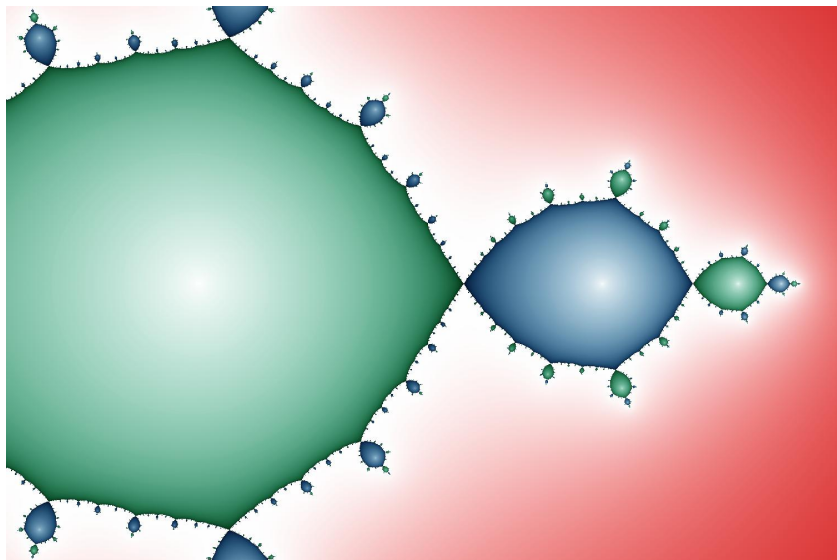
$$f(z) = z^2 - 1$$



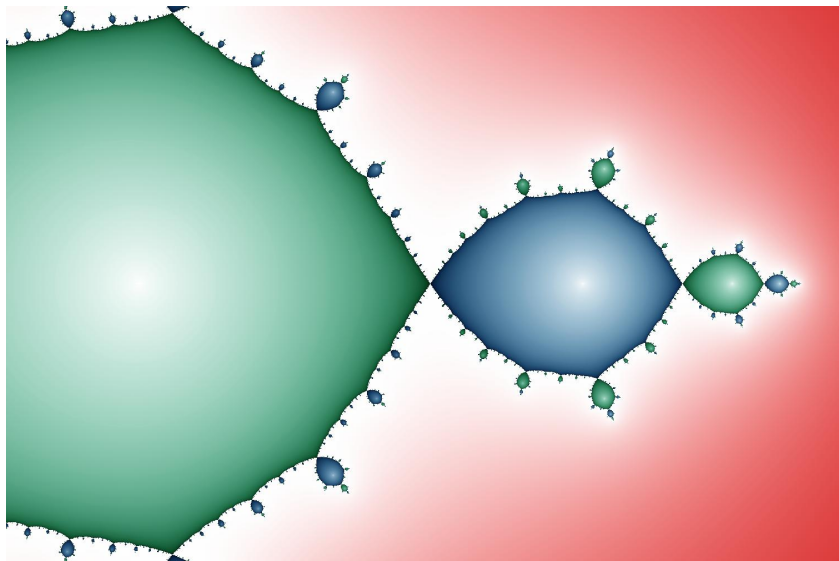
$$f(z) = z^2 - 1$$



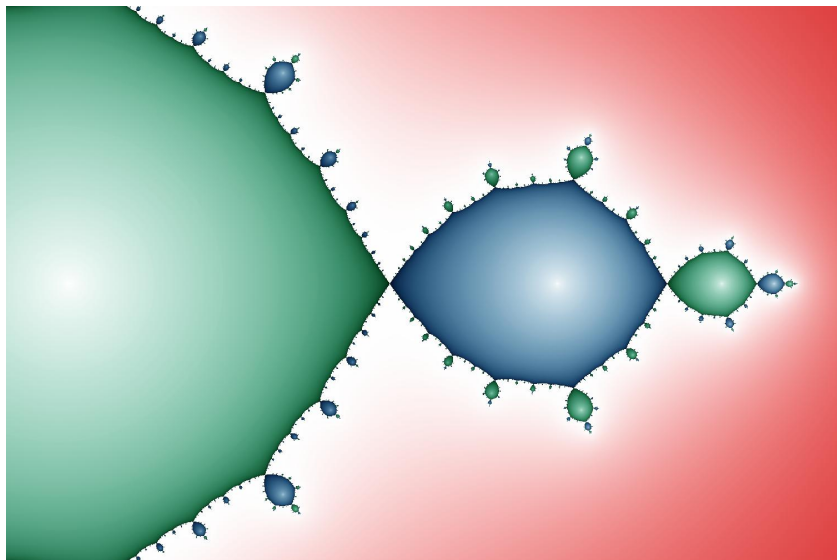
$$f(z) = z^2 - 1$$



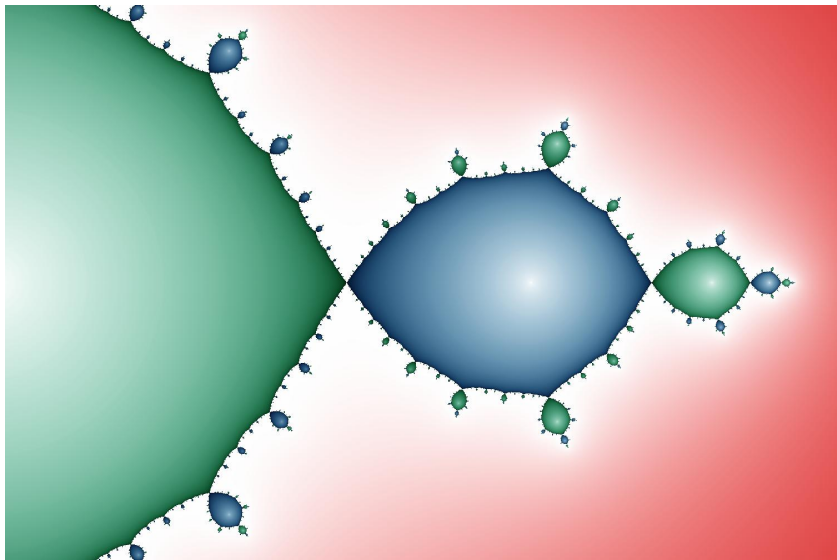
$$f(z) = z^2 - 1$$



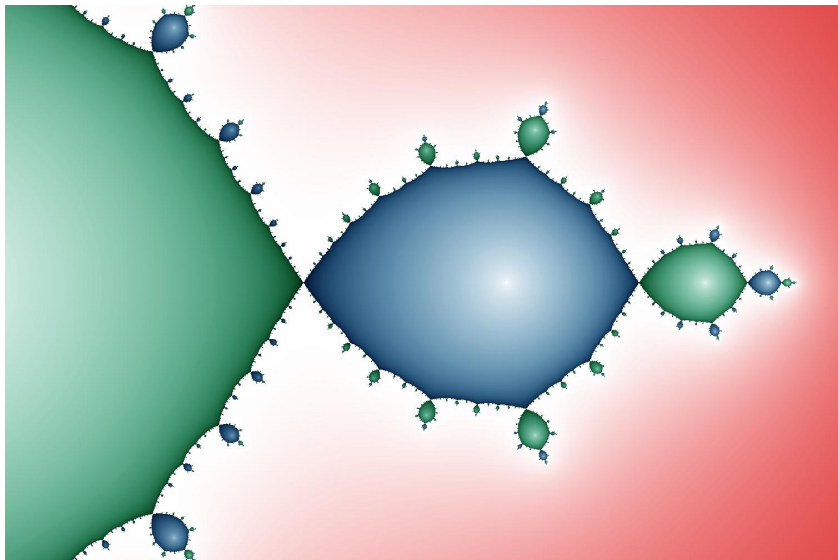
$$f(z) = z^2 - 1$$



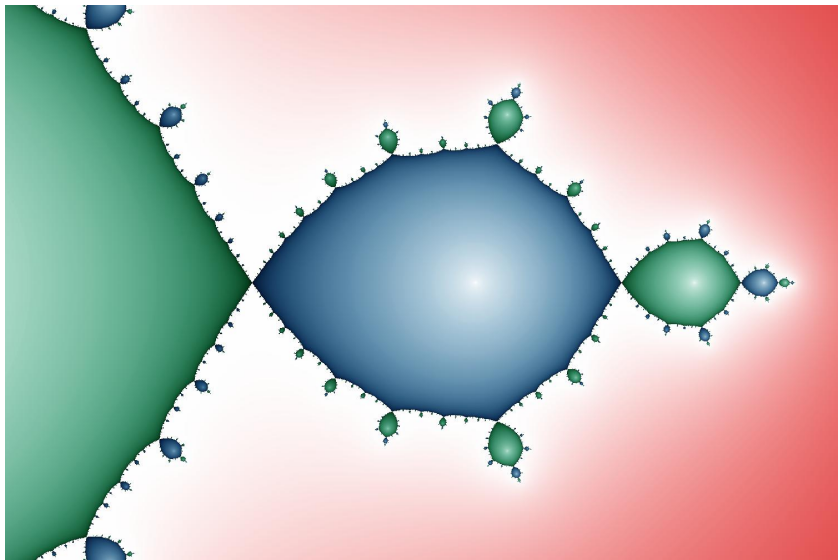
$$f(z) = z^2 - 1$$



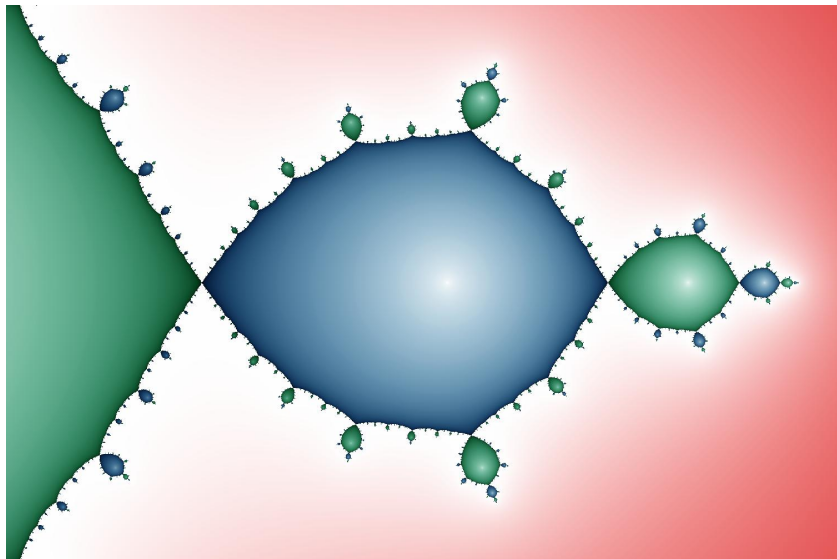
$$f(z) = z^2 - 1$$



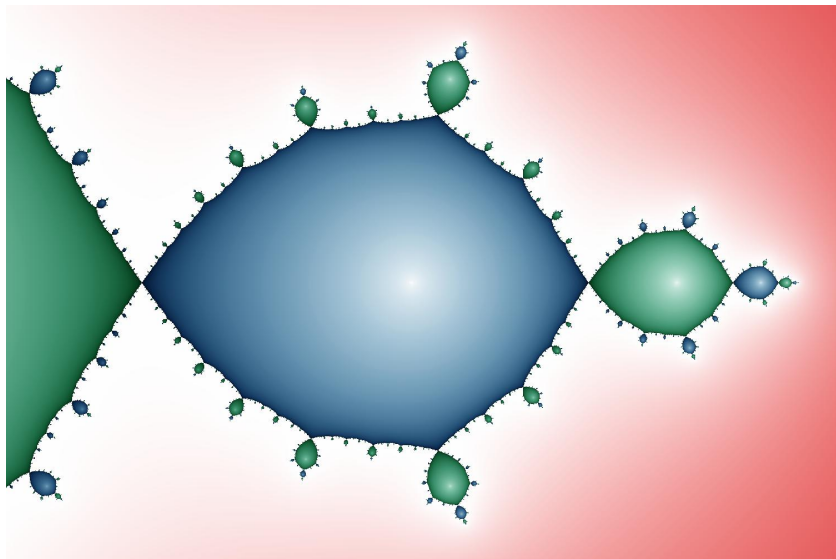
$$f(z) = z^2 - 1$$



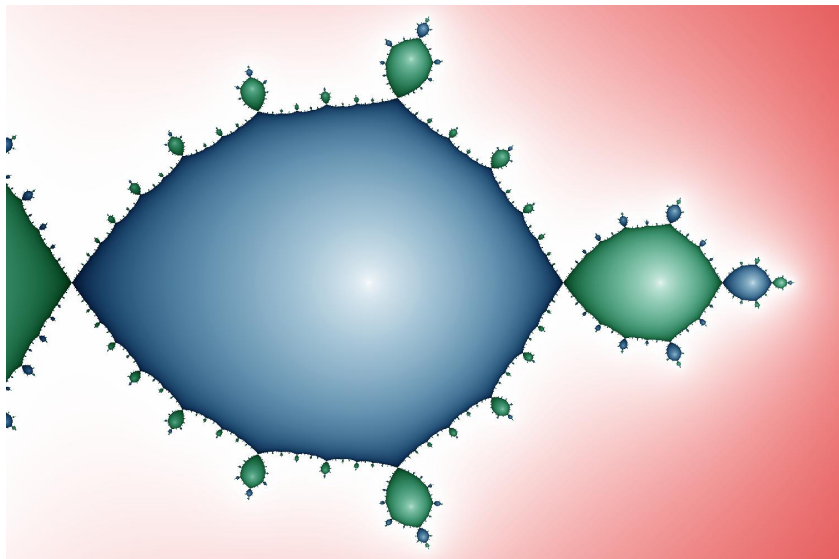
$$f(z) = z^2 - 1$$



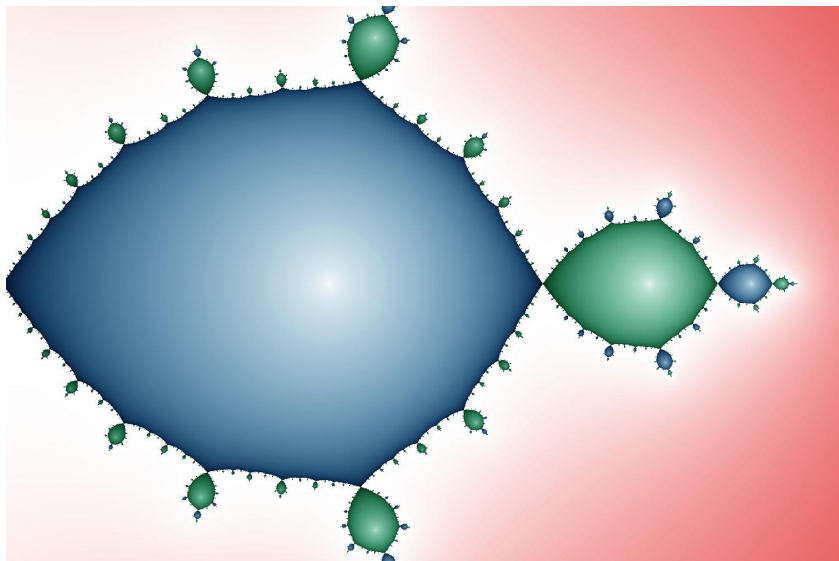
$$f(z) = z^2 - 1$$



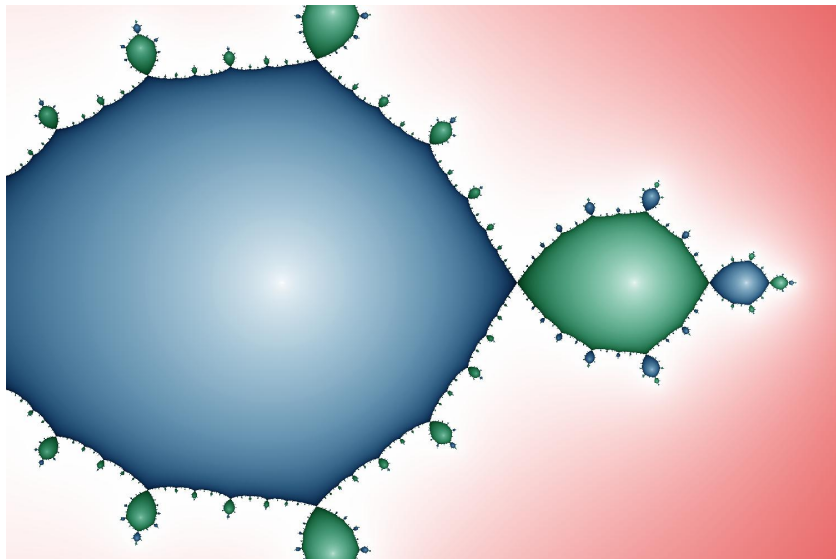
$$f(z) = z^2 - 1$$



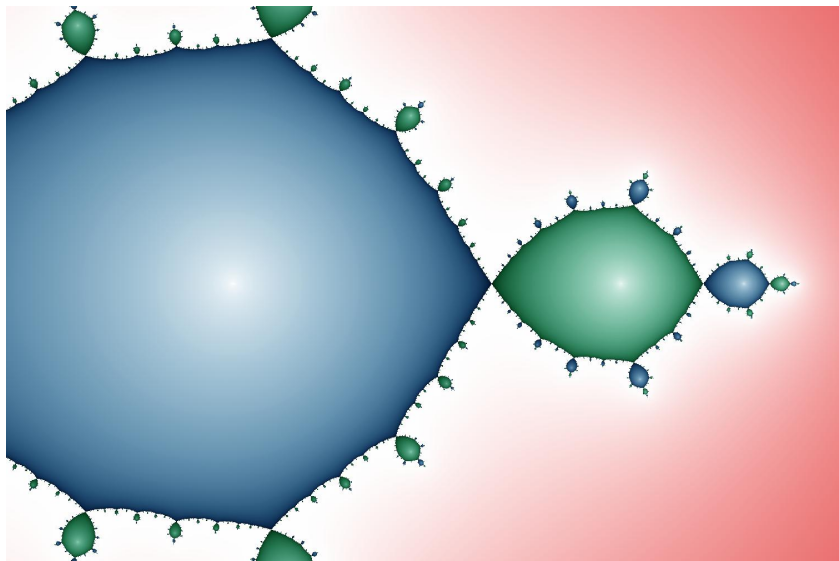
$$f(z) = z^2 - 1$$



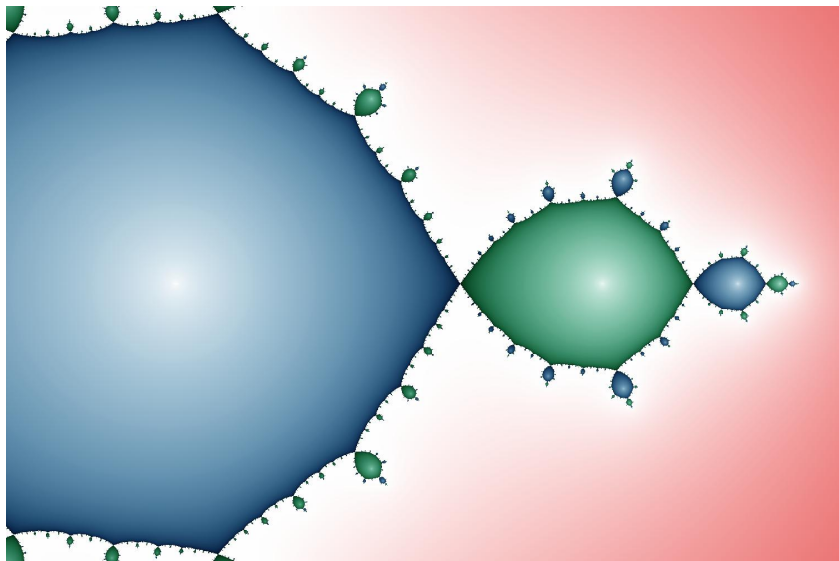
$$f(z) = z^2 - 1$$



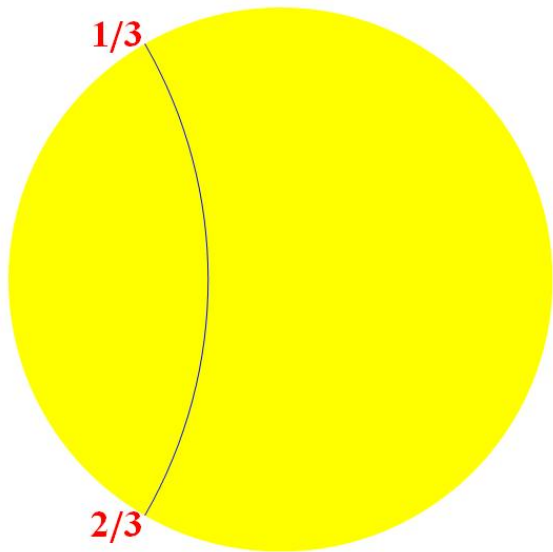
$$f(z) = z^2 - 1$$



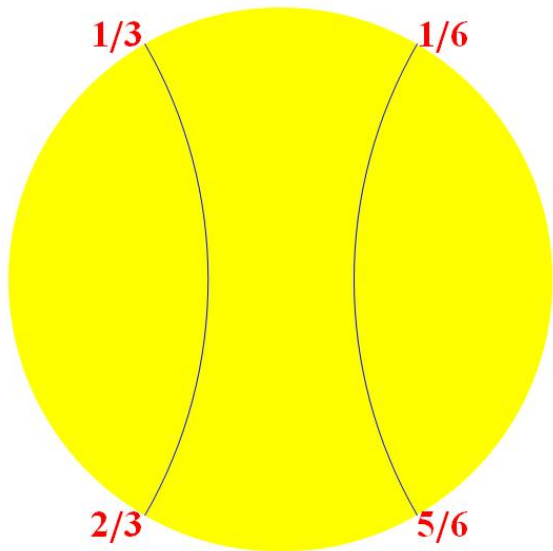
$$f(z) = z^2 - 1$$



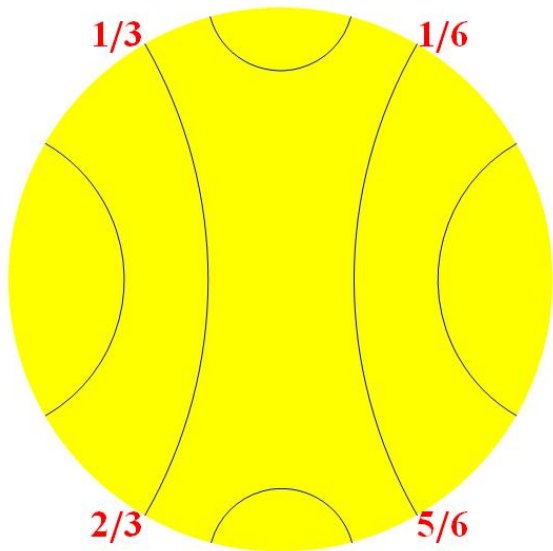
Ламинация для $z^2 - 1$



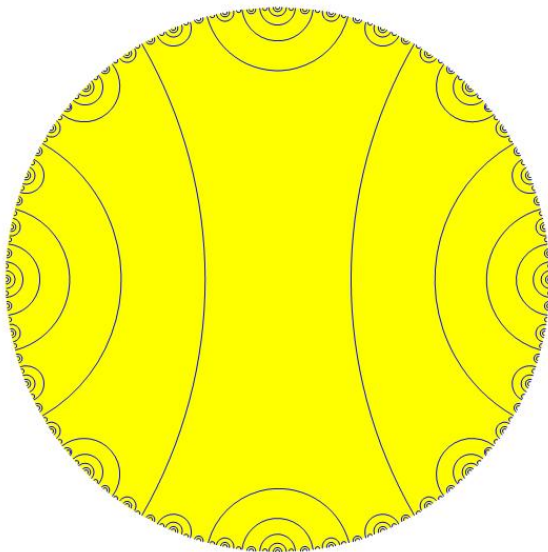
Ламинация для $z^2 - 1$



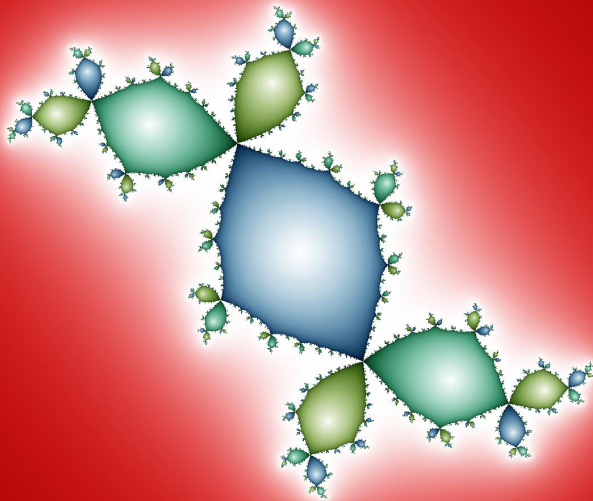
Ламинация для $z^2 - 1$



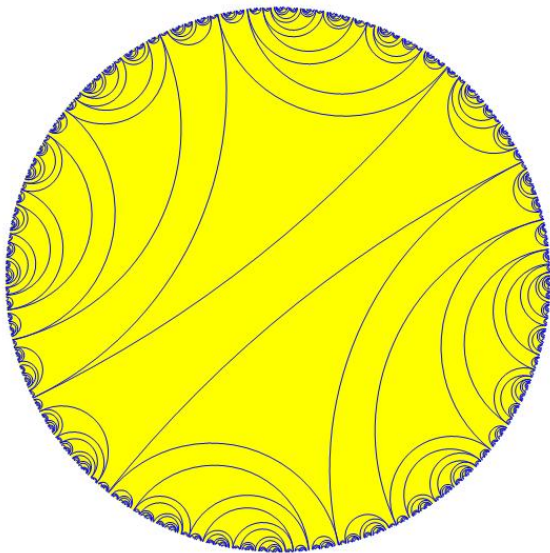
Ламинация для $z^2 - 1$



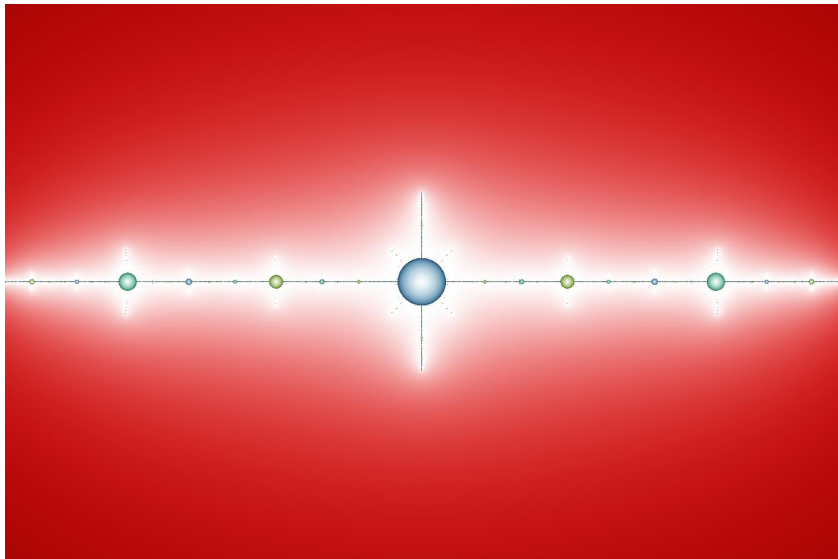
Кролик: $f(z) = z^2 - 0.12.. + 0.74..i$



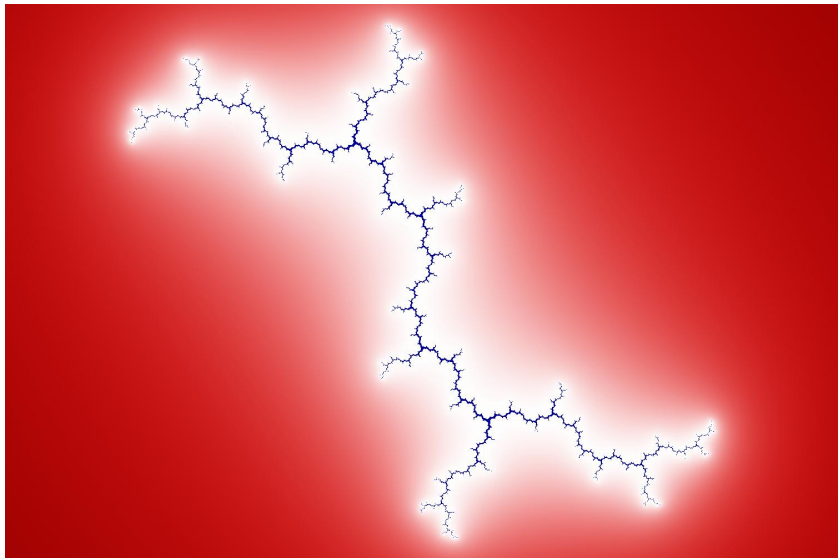
Ламинация для кролика



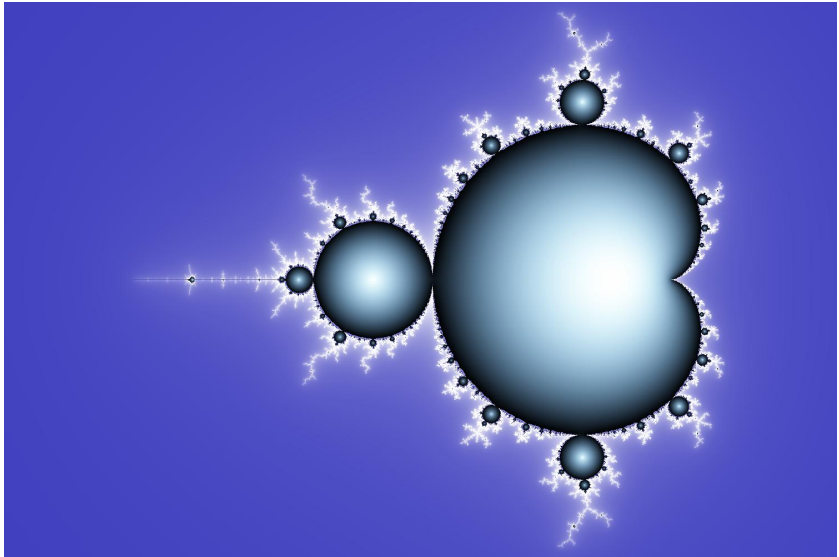
Самолет: $f(z) = z^2 - 1.75..$



Дендрит: $f(z) = z^2 + i$



Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



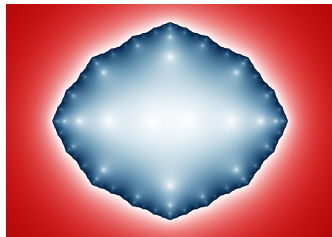
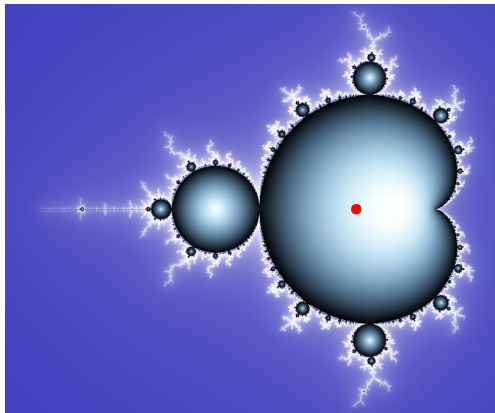
Множество Мандельброта

Множество Мандельброта — это множество комплексных чисел c , таких, что последовательность

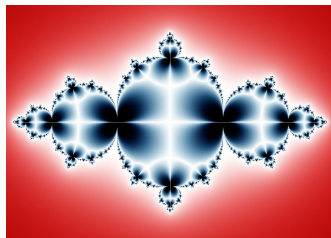
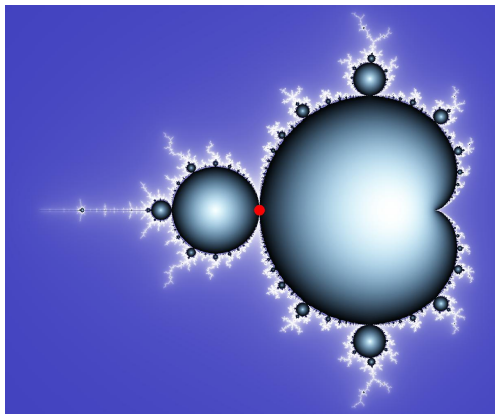
$$0, \quad c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

ограниченна. Если $c \notin M$, то множество точек, не убегаящих на бесконечность под действием итераций многочлена $z^2 + c$, гомеоморфно канторову множеству. Если $c \in M$, то это множество связно.

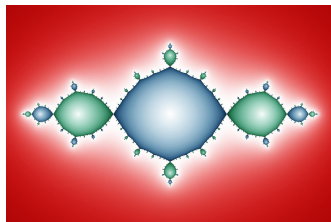
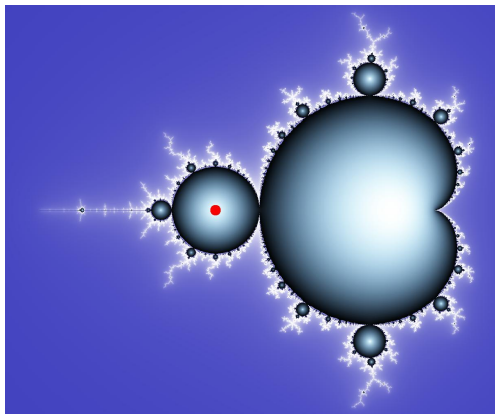
Плоскость параметров: $z^2 + c$



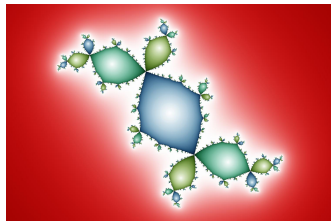
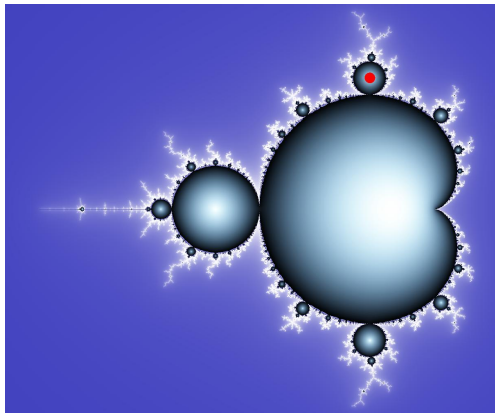
Плоскость параметров: $z^2 + c$



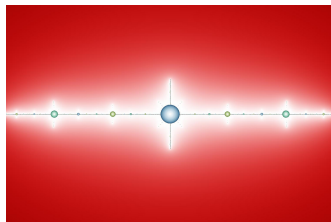
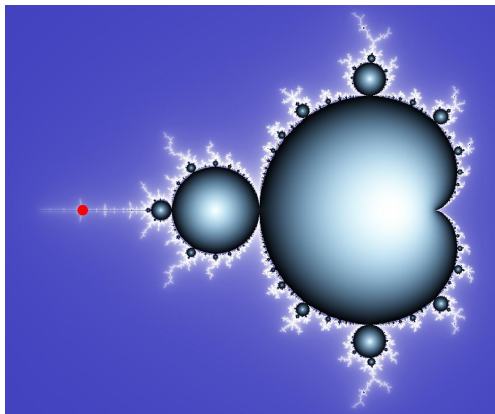
Плоскость параметров: $z^2 + c$



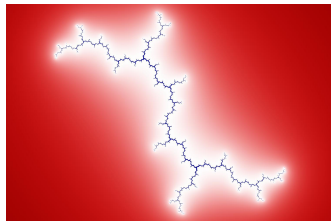
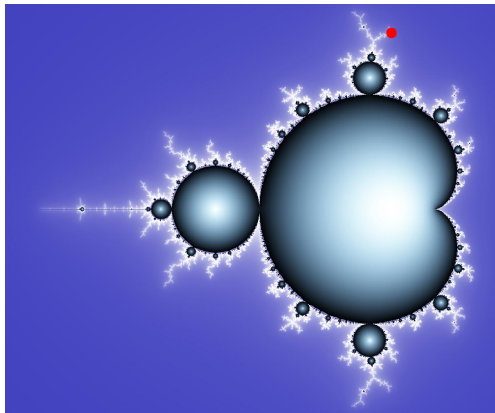
Плоскость параметров: $z^2 + c$



Плоскость параметров: $z^2 + c$



Плоскость параметров: $z^2 + c$



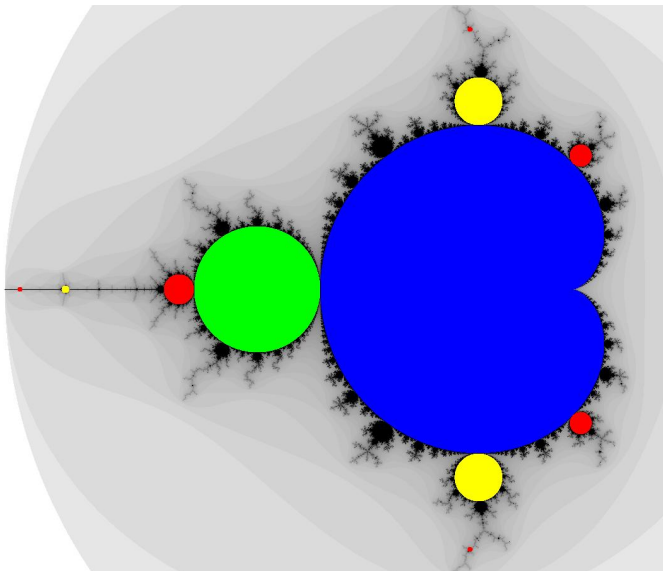
Гиперболические многочлены

Многочлен f — **гиперболический**, если он растягивает на множестве Жюлиа, то есть

$$|f^{\circ n'}(z)| \geq Cq^n, \quad C > 0, \quad q > 1$$

для всех $z \in J$. Динамика гиперболических многочленов **устойчива**.

Гиперболические компоненты



Главная кардиоида

Главная гиперболическая компонента PHD_2 — это множество таких c , что $p_c(z) = z^2 + c$ является гиперболическим многочленом, у которого множество Жюлиа гомеоморфно окружности. Эквивалентным образом,

$$\text{PHD}_2 = \{c \in \mathcal{M}_2 \mid \exists \alpha \text{ s.t. } p_c(\alpha) = \alpha, |p'_c(\alpha)| < 1\}$$

Множество PHD_2 ограничено **главной кардиоидой**.

Характеризация множества $\overline{\text{PHD}}_2$

Theorem

$c \in \overline{\text{PHD}}_2$ тогда и только тогда, когда p_c имеет
неотталкивающую неподвижную точку.

Theorem

$c \notin \overline{\text{PHD}}_2$ тогда и только тогда, когда p_c имеет *разделяющую
отталкивающую неподвижную точку.*