Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Кафедра математических основ управления

На правах рукописи

УДК 519.1

Исаев Михаил Исмаилович

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Специальность 01.01.09 «Дискретная математика и
математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
С.П. Тарасов

Москва 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие графа является одним из наиболее фундаментальных понятий среди всех математических структур. Графы служат универсальной моделью для описания систем, содержащих бинарные отношения. Поэтому теория графов привлекает внимание специалистов различных областей знания таких, как физика, электротехника, химия, кибернетика, экономика, социология, лингвистика и др. В области вычислительной техники теория графов занимает особое место. Она предоставляет большие возможности для построения эффективных алгоритмов и анализа их сложности. В то же время исследования в каждой из прикладных областей приводят к развитию самой теории графов.

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 году венгерский математик Кениг Д. Однако первая работа [39] по теории графов была написана еще в 1736 году Эйлером Л., в которой он не только решил популярную в то время «задачу о Кенигсбергских мостах», но и получил критерий существования в графе специального маршрута (эйлерова цикла, как теперь его называют).

Хотя Эйлер Л. и рассматривал задачи подсчета некоторых типов триангулированных многоугольников на плоскости, все же существенные шаги в теории перечисления графов были сделаны лишь в девятнадцатом столетии. В своих работах, опубликованных в 1857–1889 гг., Кэли А. получил формулы для количества деревьев трех типов: помеченных, корневых и обычных, а также связанных с ними химических структур. Ещё ранее Кирхгоф Г. в [61] нашел в неявной форме число остовных деревьев заданного графа, а значит, в частности, число помеченных деревьев.

В настоящее время перечисление графов представляет собой развитую теорию, занимающую существенное место в области комбинаторного анализа. В книге [76] собраны известные результаты о подсчете помеченных деревьев и свойствах случайных деревьев. В монографии [52] приведено большое количество разнообразных задач перечисления непомеченных графов с определенными свойствами. Для задач такого типа используется алгебраический подход, основанный на теории перечисления Пойа (см., например, [78]). Принцип включения и исключения, обращение Мёбиуса, а также многие другие известные методы, используемые в перечислительной комбинаторике, подробно изложены в [84].

Во второй половине двадцатого столетия бурный прогресс вычислительной техники и кибернетики обусловил интенсивное развитие всей дискретной математики, и, в частности, интерес к алгоритмическим аспектам перечисления графов (см. [24], [58], [89]). После 1970-х много внимания уделялось асимптотическим оценкам и взаимосвязи между задачами перечисления и теорией случайных графов. Для более подробной информации о применении этого вероятностного подхода см., например, [22], [71].

Аналитические методы, безусловно, относятся к числу наиболее мощных методов комбинаторного анализа. Они основываются на точном описании перечисляемых комбинаторных объектов с помощью производящих функций. Эти функции интерпретируются как аналитические объекты, то есть как отображения комплексной плоскости в себя. Их особенности определяют (асимптотически) коэффициенты производящих функций и позволяют получить оценки членов исходных последовательностей. В книге [44] тщательно изложены основные известные на настоящее время аналитические методы, а также рассмотрены как классические, так и современные приложения этого подхода.

Хотя теория перечисления графов интенсивно развивается уже более 50 лет, интерес к этой области перечислительной комбинаторики не пропал, о чем говорят многочисленные работы последних лет: [18], [20], [21], [23], [25], [34], [45], [50], [68].

В данной работе результаты из [67], [69], [70] об асимптотике числа эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин в полных графах обобщаются для существенно более широких классов графов со спектральными ограничениями. На примере этих классических задач продемонстрирована универсальность аналитического подхода для решения проблем перечисления графов.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе обсуждаются проблемы и методы решения рассматриваемых задач. В §1.1 формулируются основные понятия и результаты теории вычислительной сложности проблем перечисления. В §1.2 – §1.4 приводятся постановки задач о подсчете эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин. В этих параграфах подробно обсуждаются известные результаты, приложения и подходы для каждой из рассматриваемых проблем. В §1.5 излагается общая схема рассуждения: используя производящие функции, задачи сводятся к оценке многомерных интегралов гауссовского типа.

Вторая глава посвящена асимптотическому анализу интегралов гауссовского типа. В §2.1 приводятся необходимые понятия и предположения. Одним из предположений является асимптотическое диагональное доминирование соответствующей матрицы квадратичной формы. Свойства таких матриц обсуждаются в §2.2. Основной результат о асимптотике интегралов гауссовского типа доказывается в §2.4. Для формулировки этого результата используются несколько специальных функций над полиномами, которые вводятся в §2.3.

В третьей главе обсуждаются классы графов со спектральными ограничениями, для которых применим аналитический подход. В §3.1, 3.2 определяются класс графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами, и класс существенно недвудольных графов, обсуждаются их основные свойства и проводятся примеры. В §3.3 доказывается, что в некотором вероятностном смысле практически все графы принадлежат рассматриваемым классам. Некоторые полезные утверждения о комбинаторном смысле определителей матриц, связанных с графами, приводятся в §3.4.

Четвертая глава посвящена основным результатам данной работы. В каждом из §4.1-4.3 сначала формулируется асимптотическая формула для соответствующей задачи, затем приводится доказательство, основанное на результатах из Главы 2 и Главы 3.

В Приложении данной работы приведены доказательства некоторых вспомогательных лемм.

В диссертации получены следующие результаты, характеризущиеся научной новизной:

1. В работе доказаны новые свойства классов графов со спектральными ограничениями. В частности, доказано, что случайный граф принадлежит этим классам с вероятностью близкой к 1.

2. Получены асимптотические формулы для числа эйлеровых ориентаций и числа эйлеровых циклов в графах, обладающих сильными смешивающими свойствами.

3. Получена асимптотическая формула для числа помеченных подграфов с заданной последовательностью степенй вершин в существенно недвудольных графах.

4. Определена асимптотика интеграла гауссовского типа, при условии асимптотического диагонального доминирования соответствующей матрицы квадратичной формы.

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах в следующих организациях:

- Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН (Москва, 2010);
- кафедра теории функций и функционального анализа мехмата МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2011);
- кафедра математических основ управления МФТИ (ГУ) (Долгопрудный, 2010-2013);
- кафедра математической кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2012);

а также на следующих научных конференциях:

- 36th Australasian conference on combinatorial mathematics and combinatorial computing (36ACCMC) (Сидней, Австралия, 2012);
- Международная конференция «Алгебра и комбинаторика», посвященная 60-летию А.А. Махнева (Екатеринбург, 2013);
- Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013);
- XI Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», посвященный 80-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 2012);
- 53 – 55 научные конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе» (Москва, 2010 – 2012).

По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ, из них 3 (а именно: [8], [9], [56]) — в изданиях из списка, рекомендованного ВАК РФ.

Глава 1.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ: ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1.1. Проблемы алгоритмического решения задач перечисления

Наиболее изученными объектами теории сложности вычислений являются задачи распознавания. Такие задачи можно охарактеризовать вопросом «принадлежит ли указанное слово языку?» и множеством ответов {«да», «нет»}. Как правило, каждой задаче распознавания естественным образом соответствует задача перечисления, в постановке которой фигурирует вопрос «сколько?». Например:

- *Гамильтонов цикл.* Сколько существует в заданном графе различных простых циклов, содержащих все вершины?
- *Вершинное покрытие.* Сколько существует в заданном графе различных наборов из k вершин таких, что для любого ребра графа хотя бы один из концов входит в набор?
- *Клика.* Сколько существует в заданном графе различных полных (т.е. любые две вершины соединены ребром) подграфов из k вершин?

Вышеперечисленные задачи принадлежат классу $\sharp P$ проблем, решением которых является количество успешных, т.е., завершающихся в допускающих состояниях, путей вычислений для некоторой недетерминированной машины Тьюринга, работающей за полиномиальное время. Класс $\sharp P$ может быть также определен как класс задач перечисления, соответствующих задачам распознавания из NP. Задачи перечисления, соответствующие NP-полным задачам (например, существование гамильтонова цикла, вершинного покрытия или клики заданной мощности), обычно являются $\sharp P$-полными (см. работу [27]) и ввиду результатов Toda S. (см. Теорему 4.7 из [86]) считаются чрезвычайно трудными с точки зрения вычислительной сложности.

Одним из активно развивающихся подходов для практического решения вычислительно трудных задач является построение параметризированных алгоритмов. Роль параметра в таких алгоритмах — учесть информацию о структуре входных данных алгоритма и выделить основной источник неполиномиальной сложности. Формальное определение следующее: параметризированная задача с длиной входа n считается полиномиально разрешимой с фиксированным параметром, или FPT-разрешимой (Fixed-Parameter Tractable), если она может быть решена некоторым параметризированным алгоритмом за время

$$t(n,k) = O\left(n^{O(1)} \cdot f(k)\right)$$

для функции f, зависящей только от параметра k. Тем самым, для входных данных с ограничениями на параметр k задача становится полиномиально разрешимой.

Например, для задачи о вершинном покрытии в качестве параметра можно взять мощность искомого набора вершин. Используя факт, что для любой вершины либо она входит в набор, либо все смежные с ней вершины, любое покрытие мощности, не превосходящей k, находится за время $O(n\,2^k)$. В качестве примера преблемы, которая не является FPT-разрешимой, обычно рассматривается задача о клике. Для более подробной информации о теории параметризированной сложности см., например, [41], [45] и ссылки, приведенные там.

Другим важным подходом для решения вычислительно трудных задач на практике является разработка приближенных и вероятностных алгоритмов, для которых:

$$1 - \varepsilon \le F_{out}/F_{exact} \le 1 + \varepsilon \tag{1.1}$$

или

$$\Pr\Big(1 - \varepsilon \le F_{out}/F_{exact} \le 1 + \varepsilon\Big) \ge 1 - \delta, \tag{1.2}$$

где F_{exact} обозначает искомое значение, F_{out} — результат работы алгоритма и константы ε, δ из интервала $(0, 1)$.

- *FPTAS.* Полностью полиномиальной аппроксимационной схемой называется приближенный алгоритм, в котором уровень точности ε выступает в качестве параметра, причем алгоритм удовлетворяет (1.1) и время работы ограничено полиномом от длины входы и величины ε^{-1}.

Любая задача, для которой существует полностью полиномиальная аппроксимационная схема, является FPT-разрешимой (см. Секцию 3 в [41]).

- *FPRAS.* Полностью полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемой называется приближенный алгоритм, в котором уровень точности ε и константа δ выступают в качестве параметров, причем алгоритм удовлетворяет (1.2) и время работы ограничено полиномом от длины входы и величин ε^{-1}, $\log \delta^{-1}$.

Построение приближенных и вероятностных полиномиальных алгоритмов для задач перечисления, соответствующим NP-полным задачам, сопряжено с рядом трудностей (см. [36], [59]). Действительно, подобные алгоритмы позволяют сравнить искомое значение с 0 и тем самым решить соответствующую задачу распознавания.

Кроме того, на практике можно комбинировать два вышеперечисленных подхода. Построение параметризированных приближенных (вероятностных или детерминированных) алгоритмов позволяет обойти многие трудности.

Например, в [18] доказано существование полностью полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемы для числа гамильтоновых циклов в плотных графах (плотность графа может быть рассмотрена в качестве параметра). Отметим также результаты из [17] о возможности построения в случае большой плотности приближенных алгоритмов для различных трудных задач оптимизации.

Удивительно, что некоторые $\sharp P$-полные проблемы соответствуют легким задачам распознавания из класса P. В [89] показано, что задача перечисления совершенных паросочетаний в двудольном графе является $\sharp P$-полной. Эта задача эквивалентна подсчету перманента $n \times n$ матрицы A, все элементы которой равны 0 или 1,

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma} \prod_{j} A_{j\sigma(j)},$$

где сумма по всем $n!$ перестановкам σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (аналогично детерминанту матрицы, только все слагаемые положительного знака).

Следующий результат был доказан в [58]:

Теорема (Jerrum M., Sinclair A., Vigoda E.). *Существует полностью полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема для перманента произвольной $n \times n$ матрицы A с неотрицательными элементами.*

Доказательство опирается на MCMC (Markov chain Monte Carlo) метод, предложенный Broder A.Z. в [24]. Данный подход обсуждается также в п. 1.2.2. Дополнительную информацию о развитии методов вычисления перманента, в частности, о проблемах построения FPRAS для случая матрицы A с произвольными элементами можно найти в обзоре [65].

В данной работе рассматриваются три задачи перечисления графов, которые аналогичны задаче о числе совершенных паросочетаний в следующем смысле: соответствующие задачи распознавания принадлежат классу P, однако сами задачи перечисления являются $\sharp P$-полными. Аналитический подход позволяет получить явные асимптотические формулы (см. Главу 4), дающие хорошее приближение для графов со спектральными ограничениями. Эти формулы могут быть рассмотрены как эффективные детерминированные параметризированные приближенные алгоритмы с уровнем точности $O(n^{-1/2+\epsilon})$.

1.2. Эйлеровы ориентации

1.2.1. Постановка задачи

Пусть G — неориентированный граф. Эйлеровой ориентацией графа называется такая ориентация его ребер, что для любой вершины количество входящих ребер и выходящих ребер одинаково. Обозначим $EO(G)$ число различных эйлеровых ориентаций графа G. Легко видеть, что $EO(G) > 0$ только для эйлеровых графов (графы, степени всех вершин которых четные). Эйлерова ориентация полного графа K_n называется регулярным турниром.

Значимость задачи перечисления эйлеровых ориентаций проявляется в различных областях. В статистической физике, ключевая статсумма «Z_{ICE}» в так называемой модели типа льда (ice-type model) совпадает (см. [90]) с числом эйлеровых ориентаций некоторого подходящего графа. В работах [57], [91] замечено, что подсчет числа эйлеровых ориентаций соответствует вычислению полинома Татта в точке $(0, -2)$. С полиномом Татта связаны также другие фундаментальные задачи, например: правильные покраски, ациклич-ные ориентации, остовные деревья и леса, модель Изинга и др. Кроме того, если рассматривать граф G в качестве топологии некоторой сети, то эйлерова ориентация является однонаправленной конфигурацией сети, которая сохраняет локальные потоки через узлы, то есть максимальным глобальным потоком без источников и стоков. Следовательно, подсчет $EO(G)$ эквивалентен перечислению таких максимальных потоков в сети.

Поиск эйлеровой ориентации неориентированного графа G осуществляется за полиномиальное время (с помощью последовательного ориентирования циклов из ещё не использованных ребер), в то время как в [73] доказано, что подсчет $EO(G)$ является $\sharp P$-полной задачей. Кроме того, используя сведение к задаче о совершенных паросочетаниях, в [73] построена полностью полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема для числа эйлеровых ориентаций. Более подробно этот подход обсуждается в п. 1.2.2.

Если предположить, что граф G с n вершинами является $2d$-регулярным (все степени вершин равны $2d$) графом без петель, то верны следующие оценки, см. [62], [79]:

$$2^d \left(\frac{(2d-1)!!}{d!} \right)^{n-1} \leq EO(G) \leq \left(\frac{(2d)!}{d! \cdot d!} \right)^{n/2}.$$

В [63] улучшена верхняя оценка для случая регулярного графа, а также проведены некоторые дополнительные исследования в этом направлении.

1.2.2. Приближенный вероятностный алгоритм

В 1986 году Broder A.Z. опубликовал основополагающую работу, в которой изложил эффективный метод аппроксимации некоторых $\{0,1\}$-перманентов. Подход Broder A.Z., основанный на случайной выборке из стационарного распределения подходящей цепи Маркова, послужил фундаментом для результата Jerrum M., Sinclair A., Vigoda E, упомянутого в §1.1. В этом подпараграфе коротко излагается основная идея аппроксимации числа совершенных паросочетаний двудольного графа (которое равно значению $\{0,1\}$-перманента соответствующей матрицы), а также обсуждается алгоритм из [73] оценки числа эйлеровых ориентаций.

Пусть B — простой (без кратных ребер и петель) двудольный граф с множеством $2n$ вершин $VB = U \cup V$ и множеством ребер EB. Пусть $\mathcal{M}_j(B)$ обозначает множество паросочетаний мощности j. Имеем, что:

$$|\mathcal{M}_0(B)| = 1, \quad |\mathcal{M}_1(B)| = |EB|,$$

а значение $|\mathcal{M}_n(B)|$ — искомое число совершенных паросочетаний B. Можно предположить (или проверить за полиномиальное время, см., например, [15]), что $\mathcal{M}_n(B)$ непустое, поэтому обе доли $|U| = |V| = n$. Однако, ничто не мешает $|\mathcal{M}_n(B)|$ быть экспоненциально большим по n, и поэтому не является очевидным то, каким образом случайная выборка мощности $n^{O(1)}$ из множества $\mathcal{M}_n(B)$ может дать достоверную оценку его размера.

Основная идея заключается в оценке отношения $|\mathcal{M}_k(B)|/|\mathcal{M}_{k-1}(B)|$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Broder A.Z. использовал следующую цепь Маркова на множестве $\mathcal{M}_k(B) \cup \mathcal{M}_{k-1}(B)$:

- Состояние x — это паросочетание из $\mathcal{M}_k(B)$ или $\mathcal{M}_{k-1}(B)$.
- Случайно выбирается (равномерно из EB) ребро $\{u, v\}$.
- Если $x \in \mathcal{M}_k(B)$ и $\{u, v\} \in x$, то удаляем $\{u, v\}$ из x.
- Если $x \in \mathcal{M}_{k-1}(B)$ и
  - u, v не спарены в x, то добавляем $\{u, v\}$ к x.
  - $\{u, w\} \in x$, а v не спарена, то заменяем $\{u, w\}$ на $\{u, v\}$.
  - $\{w, v\} \in x$, а u не спарена, то заменяем $\{w, v\}$ на $\{u, v\}$.
- Оставляем состояние x в любом другом случае.

Используя достаточно большое число шагов N, отношение $|\mathcal{M}_k(B)|/|\mathcal{M}_{k-1}(B)|$ можно оценить с помощью ν_1/ν_2, где ν_1 обозначает число шагов, когда состояние $x \in \mathcal{M}_k(B)$, а $\nu_2 = N - \nu_1$. Искомое значение $|\mathcal{M}_n(B)|$ оценивается «телескопическим» образом:

$$|\mathcal{M}_n(B)| = \frac{|\mathcal{M}_n(B)|}{|\mathcal{M}_{n-1}(B)|} \times \frac{|\mathcal{M}_{n-1}(B)|}{|\mathcal{M}_{n-2}(B)|} \times \cdots \times \frac{|\mathcal{M}_1(B)|}{|\mathcal{M}_0(B)|}.$$

Несмотря на полиномиальность алгоритмов такого типа, фактически, время работы всегда большое (даже если уровень точности ε не слишком ограничителен), поскольку необходимо гарантировать перемешиваемость соответствующих цепей Маркова. Это является их основным недостатком. Например, время работы полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемы Jerrum M., Sinclair A., Vigoda E из [58] оценивается $O(n^{10}\log^3 n)$. В работе [21] алгоритм аппроксимирующий число совершенных паросочетаний двудольного графа B удалось ускорить и получить следующую оценку времени работы:

$$t(B) = O\left(|VB|^7 \log^4 |VB|\right). \tag{1.3}$$

Следующий результат был доказан в [73]:

Теорема (Mihail M., Winkler P.). *Существует полностью полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема для $EO(G)$.*

Доказательство основано на сведении к подсчету числа совершенных паросочетаний. Пусть G — граф с множеством вершин $VG = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер EG. Можно предположить, что степень d_j вершины v_j четная для всех $j = 1, \ldots, n$ (в противном случае $EO(G) = 0$). Построим двудольный граф $B = B(G)$ следующим образом:

- Каждому $e \in EG$ ставим в соответствие три вершины e^+, e^-, e.
- Каждой $v_j \in VG$ ставим в соответствие $d_j/2$ вершин v_j^1, …, $v_j^{d_j/2}$.
- Множество вершин двудольного графа B:
  - Вершины типа e^+, e^- принадлежат доле U графа B.
  - Вершины типа e, v_j^k принадлежат доле V графа B.
- Множество ребер двудольного графа B:
  - Для любого $e \in EG$ пары $\{e^+, e\}$, $\{e^-, e\}$ являются ребрами в B.
  - Если v_j принадлежит ребру $e \in EG$, то пары $\{v_j^k, e^+\}$ и $\{v_j^k, e^-\}$ для $k = 1, \ldots, d_j/2$ являются ребрами в B.

В работе [73] показано, что число совершенных паросочетаний B в точности совпадает с $EO(G)\prod_{j=1}^{n}(d_j/2)!$. Тем самым построено искомое сведение.

Принимая во внимание (1.3), время работы приближенного вероятностного алгоритма Mihail M., Winkler P. оценивается $O\left(|EG|^7 \log^4 |EG|\right)$. Такое время работы препятствует использованию подобного подхода даже при не очень больших n (порядка 50 для плотных графов).

1.2.3. Случай полного графа. Представление в виде интеграла

Даже для полного графа K_n точное выражение для числа эйлеровых ориентаций (регулярных турниров) неизвестно при нечетном n (число эйлеровых ориентаций $EO(K_n)$ равно 0 для четных n). Следующая асимптотическая формула доказана в [67]:

Теорема (McKay B.D.). *При нечетном* $n \to \infty$

$$EO(K_n) = \left(\frac{2^{n+1}}{\pi n}\right)^{(n-1)/2} n^{1/2} e^{-1/2} \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) \tag{1.4}$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

В работе [66] получены точные значения для $EO(K_n)$ при $n \leq 21$. Эти значения и отношения EO_{approx}/EO приводятся в Таблице 1.1, где

$$EO_{approx} = \left(\frac{2^{n+1}}{\pi n}\right)^{(n-1)/2} n^{1/2} e^{-1/2}.$$

Таблица 1.1. Сравнение $EO(K_n)$ и асимптотической формулы.

n	Число эйлеровых ориентаций полного графа K_n	EO_{approx}/EO
3	2	0.8917
5	24	0.9381
7	2640	0.9589
9	32 30080	0.9691
11	4 82515 08480	0.9753
13	9 30770 06112 92160	0.9794
15	240 61983 49824 94283 79648	0.9823
17	85584 72055 41481 49511 79758 79680	0.9845
19	4271 02683 12628 45202 01657 80015 93666 76480	0.9862
21	3035 99177 67255 01434 06909 90026 40396 04333 20198 14400	0.9876

При доказательстве формулы (1.4) (см. Теорему 3.1 из [67]) число эйлеровых ориентаций полного графа представлялось в виде многомерного интеграла. Аналогичное представление работает и в общем случае эйлерового графа. Заметим, что функция

$$\prod_{\{v_j,v_k\}\in EG} ({x_j}^{-1}x_k + {x_k}^{-1}x_j),$$

где $\{v_j, v_k\}$ — неупорядоченная пара вершин, является производящей функцией числа ориентаций графа G по разностям числа входящих и выходящих ребер в каждой вершине. Значение $EO(G)$ равно свободному члену, который можно получить с помощью формулы Коши, используя единичную окружность в качестве контура для каждой переменной:

$$EO(G) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint \cdots \oint \frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} ({x_j}^{-1}x_k + {x_k}^{-1}x_j)}{x_1 x_2 \cdots x_n}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Заменяя $x_j = e^{i\theta_j}$ для каждого j, получаем, что

$$EO(G) = 2^{|EG|}\pi^{-n} S, \qquad S = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_{\{v_j,v_k\}\in EG} \cos\Delta_{jk}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \qquad (1.5)$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$, а также используется тот факт, что для графов, степени вершин которого четные, подынтегральное выражение остается неизменным при заменах $\xi_j \to \xi_j + \pi$.

Основываясь на представлении (1.5) числа эйлеровых ориентаций в виде многомерного интеграла, асимптотическая формула (1.4) обобщена в §4.1 на графы, обладающие сильными перемешивающими свойствами. Этот класс графов подробно обсуждается в §3.1.

1.3. Эйлеровы циклы

1.3.1. Постановка задачи. Случай полного графа

Пусть G является связным графом. Эйлеровым циклом в G называется замкнутый путь, который использует все ребра G ровно один раз. Легко видеть, что для неориентированных графов такой путь существует только в том случае, когда степени всех вершин четные.

Будем считать, что два эйлеровых цикла эквивалентны, если один является циклической перестановкой другого. Ясно, что размер такого класса эквивалентности равен числу ребер в G. Пусть $EC(G)$ обозначает число классов эквивалентности эйлеровых циклов в графе G. Задача перечисления эйлеровых циклов является классической задачей теории графов и обладает интересной историей, которая детально представлена в работе [69].

Поиск эйлерового цикла в неориентированном связном графе G осуществляется за полиномиальное время (с помощью последовательнго добавления циклов из ещё не использованных ребер), в то время как в [23] доказано, что подсчет $EC(G)$ является $\sharp P$-полной задачей. Более того, стоит отметить, что в отличие от эйлеровых ориентаций даже приближенные и вероятностные эффективные алгоритмы для подсчета числа эйлеровых циклов в общем случае до сих пор не были получены в литературе и известны только для специальных классов графов, обладающих невысокой плотностью, см. [25], [34], [85].

Для класса полных графов K_n точное выражение числа эйлеровых циклов при нечетном n также неизвестно (число эйлеровых циклов $EC(K_n)$ равно 0 для четных n). Следующая асимптотическая формула доказана в [69]:

Теорема (McKay B.D., Robinson R.W.). *При нечетном* $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
EC(K_n) = 2^{\frac{(n-1)^2}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n-2}{2}} \left(\left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)! \right)^n \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon}) \right) = \\
= 2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n^2}{2} + \frac{11}{12}} n^{\frac{(n-2)(n+1)}{2}} \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon}) \right)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Значения $EC(K_n)/\left(\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right)^n$ при $n \le 21$ и отношения EC_{approx}/EC приводятся в Таблице 1.2 (взятой из [69]), где

$$EC_{approx} = 2^{\frac{(n-1)^2}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n-2}{2}} \left(\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right)^n .$$

Таблица 1.2. Сравнение $EC(K_n)$ и асимптотической формулы.

n	Точное значение $EC(K_n)/\left(\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right)^n$	EC_{approx}/EC
3	2	0.8864
5	264	0.9777
7	1015440	0.9970
9	90449251200	1.0037
11	169107043478365440	1.0064
13	62674168211650792035993600	1.0074
15	4435711276305905572695127676467200	1.0077
17	58393052751308545653929138771580386824519680	1.0077
19	1402177279355129769559333291385688415331525419027169280 0	1.0075
21	60498832138791357698014788383803842810832836262245623803123983974400	1.0072

При доказательстве формулы (1.6) число эйлеровых циклов полного графа представлялось (см. Секцию 2 в [69]) в виде многомерного интеграла. Используя аналогичное представление в общем случае, приведенное в п. 1.3.2, асимптотическая формула (1.6) распространена в §4.2 на графы, обладающие сильными перемешивающими свойствами. Этот класс графов подробно обсуждается в §3.1.

1.3.2. Ориентированные графы. Представление в виде интеграла

Ориентированным корневым деревом с корнем v называется связный ориентированный граф T такой, что $v \in VT$ не имеет выходящих ребер, а любая другая вершина имеет ровно одно выходящее ребро. Другими словами, T — дерево, у которого все ребра ориентированы в сторону v.

Пусть D — ориентированный простой (без кратных ребер и петель) связный граф с множеством вершин VD. Ориентированное остовное корневое дерево D с корнем $v \in VD$ — это подграф D, который содержит все вершины из VD и является ориентированным корневым деревом с корнем v.

Следующий результат из [14], [82], известный также как BEST-теорема, позволяет определить число эйлеровых циклов в ориентированных графах:

Теорема (Bruijn N.G., van Aardenne-Ehrenfest T., Smith C.A.B., Tutte W.T.)**.** *Пусть D — ориентированный граф с множеством вершин $VD = \{v_1, \ldots, v_n\}$, причем существуют натуральные $d_1, \ldots, d_n$ такие, что для любой вершины v_j числа входящих ребер и исходящих ребер равны d_j. Пусть $t_v = t_v(D)$ обозначает число остовных корневых деревьев D с корнем $v \in VD$. Тогда t_v не зависит от $v \in VD$, и*

$$EC(D) = t_v \prod_{j=1}^{n} (d_j - 1)!. \tag{1.7}$$

Рассмотрим связный неориентированный простой граф G с с множеством вершин $VD = \{v_1, \ldots, v_n\}$, имеющими четные степени. Заметим, что для любого остовного дерева T графа G и любой вершины $v \in VG$ существует ровно одна ориентация ребер T такая, что получается ориентированное корневое дерево с корнем v. Обозначим $\mathcal{T}_v$ множество ориентированных корневых остовных деревьев с корнем v, которые могут быть получены таким путем. Для любого дерева $T \in \bigcup\limits_{v \in VG} \mathcal{T}_v$ обозначим EO^T число эйлеровых ориентаций графа G таких, что соответствующий ориентированный граф содержит T.

Пусть $\mathcal{EO}$ обозначет множество ориентированных графов, соответствующим эйлеровым ориентациям графа G. Используя (1.7), находим, что для любой $v \in VG$

$$EC(G) = \sum_{D \in \mathcal{EO}} EC(D) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_j}{2} - 1\right)! \sum_{D \in \mathcal{EO}} t_v(D).$$

Группируя слагаемые согласно ориентированным корневым остовным деревьям с корнем v, получаем, что для любой $v \in VG$

$$EC(G) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_j}{2} - 1\right)! \sum_{T \in \mathcal{T}_v} EO^T.$$

Значение EO^T равно свободному члену

$$f^T(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\{v_j,v_k\}\in EG} ({x_j}^{-1}x_k + {x_k}^{-1}x_j) \prod_{(v_j,v_k)\in ET} \frac{x_k^{-1}x_j}{({x_j}^{-1}x_k + {x_k}^{-1}x_j)},$$

где $\{v_j, v_k\}$ — неупорядоченная пара, а (v_j, v_k) — упорядоченная пара вершин, ET — множество ребер ориентированного дерева T. С помощью формулы Коши, используя единичную окружность в качестве контура для каждой переменной, находим:

$$EO^T = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint \cdots \oint \frac{f^T(x_1,\dots,x_n)}{x_1 x_2 \cdots x_n}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Заменяя $x_j = e^{i\theta_j}$ для каждого j, получаем, что для любой $v \in VG$

$$\begin{gathered} EC(G) = 2^{|EG|-n+1}\pi^{-n} S \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_j}{2} - 1\right)!, \\ S = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_{\{v_j,v_k\}\in EG} \cos\Delta_{jk} \sum_{T\in\mathcal{T}_v} \prod_{(v_j,v_k)\in ET} (1 + i\tan\Delta_{jk})\; d\xi_1 \dots d\xi_n, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$, а также используется тот факт, что для графов, степени вершин которого четные, подынтегральное выражение остается неизменным при заменах $\xi_j \to \xi_j + \pi$.

1.3.3. Вероятностные интерпретации

Перечисление эйлеровых циклов имеет несколько интересных вероятностных интерпретаций. Рассматривается некоторый связный неориентированный граф G с множеством вершин $VG = \{v_1, \dots, v_n\}$, имеющих четные степени $d_1, \dots, d_n$.

- *Случайное блуждание.* Начиная с какой-нибудь вершины v случайно блуждаем по ребрам графа G таким образом, чтобы никакое ребро не было использовано более одного раза. На каждом шаге выбор между возможными вариантами следующего ребра происходит равновероятно.

Это случайное блуждание в конечном итоге завершается (так как заканчиваются ребра) в начальной вершине v.

Вопрос. Какова вероятность $P_1(G,v)$ того, что в конечном итоге использованы все ребра?

Пусть d — степень вершины v. В работе [69] показано, что:

$$P_1(G,v) = EC(G)\, 2^{|EG|-d-1} d \binom{d}{d/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{(d_j/2)!}{d_j!},$$

и для любой $v \in VK_n$ при нечетном $n \to \infty$

$$P_1(K_n, v) \sim e^{3/4} n^{-1/2}.$$

- *Случайное спаривание.* Для каждой вершины графа G равновероятно случайным образом разобьем инцидентные ребра на пары. Такое разбиение на пары соответствует представлению множества ребер графа в виде объединения нескольких циклов.

  Вопрос. Какова вероятность $P_2(G)$ того, что данный процесс приводит к построению эйлерового цикла?

В работе [69] показано, что:

$$P_2(G) = EC(G)\, 2^{|EG|-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{(d_j/2)!}{d_j!},$$

и при нечетном $n \to \infty$

$$P_2(K_n) \sim 2^{-1/2} e^{3/4} \pi^{1/2} n^{-1}.$$

Асимптотическая формула для $EC(G)$, приведенная в §4.2, позволяет оценить вероятности $P_1(G,v)$ и $P_2(G)$ в случае, когда граф G обладает сильными перемешивающими свойствами.

1.4. Подграфы с заданной последовательностью степеней вершин

1.4.1. Постановка задачи. Представление в виде интеграла

Рассмотрим неориентированный простой граф G с множеством вершин $VG = \{v_1, \ldots, v_n\}$, имеющих степени $d_1, \ldots, d_n$. Пусть $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{N}^n$. Пусть $SG(\vec{s})$ обозначает число различных помеченных остовных подграфов графа G, степени вершин $v_1, \ldots, v_n$ в которых равны $s_1, \ldots s_n$, соответственно. Такие подграфы также известны в литературе как f-факторы (см., например, исчерпывающий обзор [77]), где функция $f : VG \to \mathbb{N}$ определяется соотношением $f(v_j) = s_j$. Если $f(v) \equiv k$ для любого $v \in VG$, то соответствующие остовные подграфы называются k-факторами.

Поиск f-фактора осуществляется за полиномиальное время, как показано в работе [15]. Соответствующая задача перечисления подграфов с заданной последовательностью степеней вершин обычно рассматривается только в частных случаях. Например, перечисление 1-факторов совпадает с $\sharp P$-полной задачей о подсчете совершенных паросочетаний. Кроме того, если степени $d_1, \ldots, d_n$ четные и граф G двудольный, то подсчет $SG(\vec{s})$, где $s_j = d_j/2$ для $j = 1, \ldots, n$, эквивалентен перечислению эйлеровых ориентаций. Важно отметить также, что существует взаимооднозначное соответствие между f-факторами графа G и 1-факторами некоторого графа $G' = G'(G)$, которое было замечено в работе [88].

Значение $SG(\vec{s})$ можно представить в виде интеграла. Действительно, функция

$$\prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} (1 + x_j x_k)$$

является производящей функцией числа остовных подграфов графа G по степеням вершин. В частности, значение $SG(\vec{s})$ совпадает с коэффициентом при $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$. С помощью формулы Коши, используя в качестве контуров для каждой переменной окружности радиусов $r_1, \dots r_n > 0$, находим:

$$SG(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint \cdots \oint \frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} (1 + x_j x_k)}{x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Заменяя $x_j = r_j e^{i\theta_j}$ для каждого j, получаем, что

$$SG(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{n} r_j^{s_j}} \int\limits_{\pi}^{\pi} \cdots \int\limits_{\pi}^{\pi} \frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} \left(1 + r_j r_k e^{i(\xi_j+\xi_k)}\right)}{e^{i(s_1\xi_1+s_2\xi_2+\ldots+s_n\xi_n)}}\, d\xi_1 \dots d\xi_n. \qquad (1.9)$$

В §4.3, используя интегральное представление (1.9), получена асимптотическая формула для $SG(\vec{s})$ в случае существенно недвудольных графов G. Этот класс графов подробно обсуждается в §3.2.

1.4.2. Случай полного графа

Задача перечисления подграфов с заданной последовательностью степеней вершин наиболее изучена для полного графа K_n. В этом случае $SK_n(\vec{s})$ совпадает с числом различных графов со степенями вершин $s_1, \dots, s_n$. Можно предположить, что

$$s_1 + \ldots + s_n \equiv 0 \pmod 2,$$

так как в противном случае таких графов не существует. Без ограничения общности считаем, что

$$n - 1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n.$$

Согласно критерию Эрдеша–Галлаи (см. [37]) число $SK_n(\vec{s})$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{k} s_j \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, s_j\} \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, n.$$

В работе [70] был использован аналитический подход, основанный на представление в виде многомерного интеграла (1.9) и его дальнейшей аппроксимации. В частности, в [70] получен следующий результат:

Теорема (McKay B.D., Wormald N.C.). *Пусть* $\bar{s} = \frac{s_1+\ldots+s_n}{n}$*. Предположим, что* $\vec{s} \in \mathbb{N}^n$ *таково, что* $SK_n(\vec{s}) > 0$, $\min\{\bar{s}, n-\bar{s}-1\} > an/\ln n$ *для некоторого* $a > \frac{2}{3}$ *и* $|s_j - \bar{s}| \le bn^{1/2+\varepsilon}$ *при* $j = 1, \ldots, n$ *для некоторых фиксированных* $b, \varepsilon > 0$*. Тогда при* $n \to \infty$

$$\begin{aligned} SK_n(\vec{s}) = \sqrt{2}\left(2\pi n\lambda^{\bar{s}+1}(1-\lambda)^{n-\bar{s}}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigg(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}R - R(n-R)\gamma_2 - \\ -R^2\gamma_2^2 + n(R^2 - \frac{2}{3}R^3)\gamma_4 + \frac{2}{3}R^2(1-2\lambda)n\gamma_3 + O(n^{-\zeta})\Bigg) \end{aligned} \tag{1.10}$$

для любого $\zeta < \min\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3a}\}$*, где*

$$\lambda = \frac{\bar{s}}{n-1}, \quad R = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)}, \quad \gamma_k = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{s_j - \bar{s}}{n-1}\right)^k.$$

Используя похожие идеи, в работе [19] получена асимптотическая формула для $SK_n(\vec{s})$, допускающая существенно бóльшую вариацию степеней $s_1, \ldots, s_n$ чем в (1.10). Однако, эта формула из [19] использует неявные параметры специального вероятностного распределения, которые необходимо оценивать дополнительно. Аналог (1.10) для двудольных плотных графов приведен в [50].

Совершенно другой подход применяется в [71] для оценки $SK_n(\vec{s})$ в случае, когда степени $s_1, \ldots, s_n$ небольшие. Идея этого вероятностного метода заключается в случайной деформации графа таким образом, чтобы генерируемый граф был практически равномерно распределен среди мультиграфов с последовательностью степеней вершин $s_1, \ldots, s_n$. В итоге задача сводится к оценке вероятности того, что граф является простым. В [71] поучен следующий результат:

Теорема (McKay B.D., Wormald N.C.). *Пусть* $s_1 + \ldots + s_n \equiv 0$ $(mod\, 2)$ *и* $1 \le s_{\max} = \max\limits_j s_j = o(E^{1/3})$, *тогда*

$$SK_n(\vec{s}) = \frac{(2E)! \exp\left(-\frac{\bar{s}^2\nu_2^2-1}{4} - \frac{\bar{s}^3(6\nu_2^2\nu_3 - 3\nu_2^4 - 2\nu_3^2)}{12n} + O\left(\frac{s_{\max}^3}{E}\right)\right)}{E!\, 2^E s_1! \cdots s_n!} \tag{1.11}$$

равномерно при $E \to \infty$, *где* $E = \frac{s_1+\ldots+s_n}{2}$, $\bar{s} = \frac{s_1+\ldots+s_n}{n}$, $\nu_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{s_j^k}{\bar{s}^k n}$.

Формулы (1.10) и (1.11) согласуются с точными значениями $RG(n,d)$ числа различных d-регулярных турниров на n вершинах, которые приведены в [66] для $1 \le d \le 4$, $n \le 50$ и для $1 \le d \le n-2$, $n \le 21$.

1.4.3. Случай произвольного графа. Наивная гипотеза

В этом подпараграфе рассматривается случай произвольного неориентированного простого графа G. Напомним, что функция $f : VG \to \mathbb{N}$ определяется соотношением $f(v_j) = s_j$. Пусть $\hat{f}(v_j) = d_j - f(v_j)$. Для любого подмножества вершин $S \subset VG$ пусть $G[S]$ обозначает подграф графа G, индуцированный на вершинах из S, и

$$f(S) = \sum_{v \in S} f(v), \qquad \hat{f}(S) = \sum_{v \in S} \hat{f}(v).$$

Для $X, Y \subset VG$, $X \cap Y = \emptyset$ обозначим $\nabla_G(X,Y)$ число ребер G соединяющих X и Y. Согласно теореме Татта о f-факторе (см. [77], [88]) число $SG(\vec{s})$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда

- $s_1 + \ldots + s_n \equiv 0 \pmod 2$ и
- для любых $X, Y \subset VG$, $X \cap Y = \emptyset$, число таких $Z \subset VG \setminus (X \cup Y)$, что
  - $G[Z]$ — компонента связности $G[VG \setminus (X \cup Y)]$,
  - $f(Z) + \nabla_G(X,Y)$ — нечетное,

  не превосходит $f(X) + \hat{f}(Y) - \nabla_G(X,Y)$.

Используя подходящее определение понятия f-барьера (см. [15]), утверждение теоремы Татта можно переформулировать следующим образом:

Теорема (теорема Татта о f-факторе)**.** *Граф G не содержит f-фактора тогда и только тогда, когда существует f-барьер.*

Приведем «наивную» оценку $\widehat{SG}(\vec{s},\lambda)$. Предположим, что $SG(\vec{s}) > 0$. Рассмотрим случайный подграф R_G, для которого каждое ребро G присутствует независимо с некоторой вероятностью $0 < \lambda < 1$. Каждый подграф с E ребрами возникает с вероятностью $\lambda^E(1-\lambda)^{|EG|-E}$. Вероятность события E_j, что степень вершины v_j в графе R_G совпадает с s_j, равна $\lambda^{s_j}(1-\lambda)^{d_j-s_j}\binom{d_j}{s_j}$. Если предположить (ошибочно), что все события $E_1,\ldots,E_n$ независимы, то получится «наивная» оценка:

$$\widehat{SG}(\vec{s},\lambda) = \lambda^E(1-\lambda)^{|EG|-E}\prod_{j=1}^{n}\binom{d_j}{s_j}.$$

Интересно, что с помощью «наивной» оценки обе формулы (1.10) и (1.11) сводятся к одинаковому выражению (см. [70], [71]):

Теорема (McKay B.D., Wormald N.C.)**.** *Пусть $\vec{s}\in\mathbb{N}^n$, $\bar{s} = \frac{s_1+\ldots+s_n}{n}$, $\lambda = \frac{\bar{s}}{n-1}$, $\gamma_2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{s_j-\bar{s}}{n-1}\right)^2$ Предположим, что $SK_n(\vec{s}) > 0$ и выполняется хотя бы одно из следующего:*

- $\max\limits_j s_j = o(n^{1/3}\bar{s}^{1/3})$, $\max\limits_j |s_j-\bar{s}| = o(\min\{n^{1/8}\bar{s}^{5/8}, n^{1/6}\bar{s}^{1/2}\})$ *и* $\bar{s}n\to\infty$.
- $\max\limits_j |s_j-\bar{s}| = O(n^{1/2+\varepsilon})$ *и* $\min\{\bar{s}, n-\bar{s}-1\} > an/\ln n$ *для достаточно маленького $\varepsilon > 0$. и некоторого $a > \frac{2}{3}$*

Тогда при $n\to\infty$

$$SK_n(\vec{s}) \sim \sqrt{2}\exp\left(\frac{1}{4} - \frac{\gamma_2^2}{4\lambda^2(1-\lambda)^2}\right)\widehat{SK_n}(\vec{s},\lambda). \tag{1.12}$$

В работе [68] оценка (1.12) обобщается на случай графа G близкого к полному. Аналогичная (1.12) формула получена в п. 4.3.4 для более широкого класса существенно недвудольных графов. Этот класс графов подробно обсуждается в §3.2.

1.5. Общая схема доказательства основных результатов

Рассмотрим представления в виде многомерного интеграла (1.5), (1.8) и (1.9) для задач перечисления эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин, соответственно. Рассматриваемые многомерные интегралы имеют вид $\int\limits_U F(\vec{\xi})d\vec{\xi}$, где U — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, а подынтегральное выражение $F(\vec{\xi})$ состоит из большого числа множителей типа

$$f_{jk}(\vec{\xi}) = f_{jk}(\xi_j - \xi_k) \text{ (или } f_{jk}(\xi_j + \xi_k) \text{ для задачи о подграфах),}$$

причем $\{v_j, v_k\} \in EG$. Доказательства асимптотических формул для рассматриваемых задач перечисления во многом аналогичны. Для каждой задачи строится некоторая небольшая область $\mathrm{Box} \subset U$ такая, что вектора $\vec{\xi} \in \mathrm{Box}$ находятся в окрестности максимумов $f_{jk}(\vec{\xi})$. Оценка интегралов происходит в два этапа:

1. *Работа внутри «коробки»*. При $\vec{\xi} \in \mathrm{Box}$, используя разложение в ряд Тэйлора для функций $f_{jk}(\vec{\xi})$, оцениваемый интеграл сводится к интегралу гауссовского типа:

   $$\int\limits_{\mathrm{Box}} F(\vec{\xi})d\vec{\xi} = \int\limits_{\mathrm{Box}} \exp\left(-\vec{\xi}^T A\vec{\xi} + T(\vec{\xi}) + O(n^{-\nu})\right) d\vec{\xi},$$

   где $A = A(G)$ — некоторая матрица, ассоциированная с графом, $T(\vec{\xi})$ является полиномом и константа $\nu > 0$. При определенных ограничениях на спектр A и размер «коробки» такие интегралы удается аппроксимировать. Глава 2 посвящена асимптотическим оценкам интегралов гауссовского типа.

2. *«Упаковка»*. Если $\vec{\xi} \in U \setminus \mathrm{Box}$, то найдется достаточно большое число множителей $f_{jk}(\vec{\xi})$, значение которых существенно меньше, чем в «коробке». В результате, удается показать, что

$$\int\limits_{\mathrm{U}\setminus\mathrm{Box}} |F(\vec{\xi})| d\vec{\xi} = o(1) \int\limits_{\mathrm{Box}} F(\vec{\xi}) d\vec{\xi}.$$

В работах [67], [69], [70] использовался вышеприведенный аналитический подход для асимптотической оценки числа эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданными степенями вершин в случае полного графа K_n. Коротко изложим основные дополнительные трудности, возникшие на пути обобщения асимптотических формул (1.4), (1.6) и (1.10):

1) В случае полного графа K_n работа внутри «коробки» значительно упрощается, так как можно использовать явную замену координат, приводящую конкретную матрицу $A(K_n)$ к диагональному виду. Для общего случая матрица A зависит от графа, и поэтому подобной удобной явной замены не существует.

2) Для «упаковки» важно наличие большого количества множителей $f_{jk}(\vec{\xi})$, значение которых существенно меньше, чем в «коробке». В полном графе это достигается за счет того, что любой паре $\{\xi_j, \xi_k\}$ соответствует ребро графа G и, следовательно, множитель $f_{jk}(\vec{\xi})$. Для общего случая вместо ребер рассмотрены попарно не пересекающиеся по ребрам пути ограниченной длины. Эту идею хорошо демонстрирует следующий пример:

- Если $|\xi_j - \xi_k| > c$ и существует путь в графе G длины не более H, соединяющий вершины v_j то v_k, то, учитывая неравенство

$$c < |\xi_j - \xi_k| \le |\xi_j - \xi_{i_1}| + |\xi_{i_1} - \xi_{i_2}| + \ldots + |\xi_{i_t} - \xi_k|,$$

можно выбрать такое ребро $\{v_{j'}, v_{k'}\}$ из этого пути, что $|\xi_{j'} - \xi_{k'}| > c/H$.

- Если $|\xi_j + \xi_k| > c$ и существует путь в G нечетной длины не более H, соединяющий вершины v_j то v_k, то, учитывая неравенство

$$c < |\xi_j + \xi_k| \le |\xi_j + \xi_{i_1}| + |-(\xi_{i_1} + \xi_{i_2})| + \ldots + |\xi_{i_t} + \xi_k|,$$

можно выбрать такое ребро $\{v_{j'}, v_{k'}\}$ из этого пути, что $|\xi_{j'} + \xi_{k'}| > c/H$.

Удивительный факт, что в конечном итоге те спектральные ограничения на граф G, которые связаны с работой внутри «коробки», совпадают с предположениями, необходимыми для «упаковки». Для более детальной информации см. доказательства основных результатов, приведенные в Главе 4.

Глава 2.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГАУССОВСКОГО ТИПА

2.1. Интегралы гауссовского типа. Обозначения и предположения

Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)^T \in \mathbb{R}^n$, Ω_n — область в $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — полином и A — положительно определенная вещественная симметрическая $n \times n$ матрица. В данной части работы изучается асимптотическое при больших n поведение интегралов следующего вида:

$$\int\limits_{\Omega_n} \exp\left(-\vec{\theta}^T A\vec{\theta} + T(\vec{\theta})\right) d\vec{\theta}. \qquad (2.1)$$

Значительная часть квантовой физики состоит из методов вычисления интегралов по гауссовой мере $d\mu(\vec{\theta}) = e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} d\vec{\theta}$, см., например, [81]. Гауссовы интегралы, появляющиеся в различных приложениях, часто имеют нетривиальный комбинаторный смысл, в связи с этим см. [10]. Для дополнительной информации, касающейся теории вероятностей и гауссовых мер, рекомендуется книга [12].

Отличительная особенность интегралов (2.1), рассматриваемых в данной работе, заключается в том, что значение полинома $T(\vec{\theta})$ может доминировать $\vec{\theta}^T A\vec{\theta}$ на бесконечности, поэтому выбор области интегрирования является принципиальным моментом. Ключевая идея состоит в поиске такой области Ω_n, что:

- область достаточно большая, чтобы охватывать основную часть интеграла по гауссовой мере:

$$\int\limits_{\Omega_n} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} \sim \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}},$$

- область достаточно маленькая, чтобы наличие многочлена T в (2.1) не сильно (с точностью до мультипликативной константы) влияло на асимптотику интеграла.

Отметим, что интеграл (2.1) всегда можно свести с помощью покоординатного масштабирования $\vec{\theta}$ к случаю, когда диагональные элементы матрицы A равны 1. В дальнейшем в этой главе, мы будем считать для простоты, что $A = I + X$, где I — единичная $n \times n$ матрица, а X — некоторая симметрическая матрица с нулевыми диагональными элементами.

Для действительного $p \geq 1$ и вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ положим:

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ имеем:

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

Векторной p-норме соответствует матричная норма

$$\|A\|_p = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p}.$$

В частности,

$$\|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^{n} |A_{jk}|, \quad \|A\|_\infty = \max_j \sum_{k=1}^{n} |A_{jk}|. \tag{2.2}$$

Если A — матрица самосопряженного оператора (симметрическая матрица), то норма $\|A\|_2$ совпадает с наибольшим модулем собственного значения A (см., например, [1], [11]), и поэтому для $p \geq 1$ выполняется неравенство:

$$\|A\|_p \geq \|A\|_2 . \tag{2.3}$$

Зафиксируем константы $a, b > 0$. Рассмотрим класс $\mathcal{M}_{a,b}$, состоящий из матриц (всевозможных размеров) вида $A = I + X$, которые удовлетворяют:

$$\begin{gathered} A \text{ — положительно определенная симметрическая матрица,} \\ |X_{jk}| \leq \frac{a}{\operatorname{size} A}, \quad X_{jj} = 0, \quad \|A^{-1}\|_2 \leq b, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\operatorname{size} A$ — размер матрицы A, а I — единичная матрица размера $\operatorname{size} A$.

В §2.4 получены асимптотические оценки интегралов (2.1) для случая матриц A, принадлежащих классу $\mathcal{M}_{a,b}$. В качестве области Ω_n используется многомерный куб $U_n(rn^{\varepsilon})$, где $r, \varepsilon > 0$ — фиксированные константы,

$$U_n(\rho) = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\vec{\theta}\|_\infty \leq \rho\}.$$

Согласно (2.4), диагональные элементы матриц из класса $\mathcal{M}_{a,b}$ асимптотически доминируют над остальными элементами. Свойства таких матриц обсуждаются в §2.2 и существенно используются в Главах 3, 4.

Чтобы сформулировать предположения, которым должен удовлетворять полином T для оценки интеграла (2.1), необходимы некоторые специальные функции над полиномами, определяемые в §2.3.

2.2. Матрицы с асимптотическим диагональным доминированием

2.2.1. Свойства обратной матрицы

Пусть A — симметрическая обратимая $n \times n$ матрица. Известно, что величины любых двух матричных норм связаны между собой, см.например [11]. В частности,

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty \leq C\|A^{-1}\|_2, \quad C > 0. \tag{2.5}$$

В общем случае, константа C в (2.5) зависит от $\operatorname{size} A = n$. Тем не менее, в случае матрицы с асимптотическим диагональным доминированием можно выбрать константу C независимо от размера матрицы.

Лемма 1. *Пусть $a > 0$, I — единичная $n \times n$ матрица. Тогда для любого n и для произвольной симметрической $n \times n$ матрицы X такой, что матрица $A = I + X$ является невырожденной и $|X_{ij}| \le a/n$, выполняется:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \le C\|A^{-1}\|_2, \tag{2.6}$$

где C зависит только от a (не зависит от n).

Доказательство Леммы 1. Так как матрица A является симметрической, то она обладает полным набором ортонормированных собственных векторов (см., например, [1]). Упорядочим собственные числа A по модулю:

$$|\nu_1| \le |\nu_2| \le \ldots \le |\nu_n|.$$

Учитывая (2.3), получаем, что

$$|\nu_1| \le |\nu_n| = \|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le \|I\|_\infty + \|X\|_\infty \le 1 + a. \tag{2.7}$$

Рассмотрим произвольный $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|\vec{x}\|_\infty = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 = \|\vec{x}\|_\infty = 1$. Обозначим $\mathcal{J} = \left\{ j \ : \ x_j > \dfrac{1}{2a} \right\}$.

Случай 1. $|\mathcal{J}| < \dfrac{n}{4a}$. Оценив первую координату $(I+X)\,\vec{x}$, получаем, что:

$$\|A\vec{x}\|_\infty \ge x_1 - \frac{a}{n}\left(\sum_{j\in\mathcal{J}} |x_j| + \sum_{j\notin\mathcal{J}} |x_j| \right) \ge 1 - \frac{a}{n}\left(\frac{n}{4a}\cdot 1 + n\cdot\frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{4}. \tag{2.8}$$

Случай 2. $|\mathcal{J}| \ge \dfrac{n}{4a}$. Заметим, что:

$$\sqrt{n\,\|A\vec{x}\|_\infty^2} \ge \|A\vec{x}\|_2 \ge |\nu_1|\cdot\|\vec{x}\|_2 \ge |\nu_1|\cdot\sqrt{|\mathcal{J}|\cdot\frac{1}{4a^2}}.$$

Поэтому

$$\|A\vec{x}\|_\infty \ge \frac{|\nu_1|}{4a^{3/2}}. \tag{2.9}$$

Комбинируя (2.8) и (2.9), получаем, что выполняется по крайней мере одно из следующих двух неравенств:

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \leq 4 \;\text{ или }\; \left\|A^{-1}\right\|_\infty \leq \frac{4a^{3/2}}{|\nu_1|}. \tag{2.10}$$

Комбинируя (2.7), (2.10) и равенство $\|A^{-1}\|_2 = 1/\nu_1$, получаем (2.6). ■

Замечание. Предположение, что все числа на диагонали A равны 1, является несущественным в Лемме 1. Неравенство, аналогичное (2.6), справедливо и в более общем случае, когда при росте размера матрицы элементы на диагонали обладают одинаковым асимптотическим порядком, а элементы вне диагонали — меньшим.

Зафиксируем константы $a, b > 0$. Далее в этом параграфе мы всегда используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от a и b.

Комбинируя (2.2) и (2.6), получаем, что матрицы класса $\mathcal{M}_{a,b}$ обладают следующим важными свойствами:

Предложение 1. *Пусть $n \times n$ матрица A удовлетворяет (2.4), тогда:*

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = O(1), \tag{2.11}$$

$$|X'_{jk}| = O(n^{-1}) \quad \textit{для} \quad 1 \leq j, k \leq n, \tag{2.12}$$

где $X' = A^{-1} - I = A^{-1}(I - A) = -A^{-1}X$.

2.2.2. Определитель возмущенной матрицы

В этом подпараграфе исследуется связь определителя матрицы $A \in \mathcal{M}_{a,b}$ и определителя матрицы A' близкой к A.

Предложение 2. *Пусть $n \times n$ матрица A удовлетворяет (2.4). Тогда для любой матрицы A' такой, что $A - A'$ (или $A' - A$) является симметрической неотрицательно определенной матрицей, причем норма $\|A - A'\|_2 \leq$*

$(2b)^{-1}$ *и след* $\operatorname{tr}(A - A') = O(1)$, *выполняется:*

$$\det A = O(1) \det A' \quad \text{и} \quad \det A' = O(1) \det A. \tag{2.13}$$

Для доказательства Предложения 2 нам потребуется следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть* $\|\cdot\|$ *обозначает произвольную матричную норму. Пусть* Z *является* $n \times n$ *матрицей с комплексными коэффициентами, причем* $\|Z\| < 1$. *Тогда для натурального* $m \geq 2$

$$\det(I + Z) = \exp\left(\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \operatorname{tr} Z^r + E_m(X)\right),$$

где tr *следа матрицы и*

$$|E_m(Z)| \leq \frac{n}{m} \frac{\|Z\|^m}{1 - \|Z\|}.$$

При доказательстве Леммы 2 рассматривается ряд матрицы $\ln(I + Z)$, след которой оценивается в дальнейшем. Лемма 2 сформулирована и подробна доказана в [69].

Доказательство Предложения 2. Будем использовать ортонормированный базис из собственных векторов A, в котором матрица A — диагональная. В этом базисе легко определить диагональную матрицу $A^{-1/2}$, удовлетворяющую соотношению $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$. Пусть $Z = A^{-1/2}(A - A')A^{-1/2}$. Заметим, что

$$\det A' = \det A \, \det(I - Z). \tag{2.14}$$

Поскольку матрицы $A - A'$ и A — неотрицательно определенные, Z также является неотрицательно определенной. Следовательно:

$$\det(I - Z) \leq \det I = 1, \tag{2.15}$$

$$|\operatorname{tr} Z^r| \leq \operatorname{tr} Z \, \|Z\|_2^{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{2.16}$$

Используя $\|A - A'\|_2 \leq (2b)^{-1}$ и (2.4), получаем, что:

$$\begin{aligned} \|Z\|_2 \leq \|A^{-1/2}\|_2 \|A - A'\|_2 \|A^{-1/2}\|_2 \leq 1/2, \\ \operatorname{tr} Z \leq \|A^{-1}\|_2 \operatorname{tr}(A - A') = O(1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Комбинируя (2.16), (2.17) и Лемму 2 (для матрицы $-Z$), находим, что:

$$\frac{1}{\det(I-Z)} \le \exp\left(\mathrm{tr}Z\sum_{r=1}^{m-1}\frac{1}{2^{r-1}r}\right) = O(1). \qquad (2.18)$$

Используя (2.14), (2.15) и (2.18), мы получаем (2.13).

Случай, когда $A' - A$ — неотрицательно определенная матрица, разбирается аналогично, используя матрицу $Z_1 = A^{-1/2}(A'-A)A^{-1/2}$ и соотношение $\det A' = \det A\, \det(I+Z_1)$. ■

2.2.3. Главные миноры

В этом подпараграфе исследуется связь определителя матрицы $A \in \mathcal{M}_{a,b}$ и главного минора порядка $\mathrm{size}\, A - 1$.

Предложение 3. *Пусть $n\times n$ матрица A удовлетворяет (2.4). Обозначим M^{rr} матрицу, получающуюся из A посредством удаления r-й строки и r-го столбца. Тогда при $n \ge n_0$*

$$\det A = O(1)\det M^{rr} \quad \text{и} \quad \det M^{rr} = O(1)\det A, \qquad (2.19)$$

причем константа $n_0 > 0$ зависит только от a и b.

Доказательство Предложения 3. Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$. Определим $n \times n$ матрицу Y следующим образом:

$$Y_{jk} = \begin{cases} A_{1j}A_{1k}/A_{11}, & \text{если } j,k \ne 1, \\ 0, & \text{в остальных случах.} \end{cases}$$

После одного шага метода исключения Гаусса для $A+Y$ получаем, что:

$$\det A\det(1+A^{-1}Y) = \det(A+Y) = A_{11}\det M^{11} = \det M^{11}. \qquad (2.20)$$

Используя (2.2) - (2.4), находим, что:

$$\|Y\|_2 \le \|Y\|_1 = O(n^{-1}),$$
$$||A^{-1}Y||_2 \le \|A^{-1}\|_2||Y||_2 = O(n^{-1}).$$

Следовательно, при $n \geq n_0$

$$\left(1 - \|A^{-1}Y\|_2\right)^n \leq \det\left(I + A^{-1}Y\right) \leq \left(1 + \|A^{-1}Y\|_2\right)^n, \qquad (2.21)$$

где константа $n_0 > 0$ зависит только от a и b.

Комбинируя (2.20), (2.21), получаем (2.19). ∎

2.3. Некоторые функции над полиномами

2.3.1. Высота и четная высота

Пусть $\vec{d} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Обозначим $\operatorname{supp} \vec{d} = \{j : d_j \neq 0\}$. Заметим, что

$$|\operatorname{supp} \vec{d}| \leq \|\vec{d}\|_1, \qquad (2.22)$$

где $|S|$ обозначает число элементов множества S.

Рассмотрим полином

$$P(\vec{x}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \leq \deg P} a_{\vec{d}}\, x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}, \quad a_{\vec{d}} \in \mathbb{C},$$

где $\deg P$ обозначает степень P. Определим функцию h_1 (высота полинома) следующим образом:

$$h_1(P) = \max_{\|\vec{d}\|_1 \leq \deg P} n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|} |a_{\vec{d}}|. \qquad (2.23)$$

Кроме того, нам понадобится функция h_2 (четная высота полинома):

$$h_2(P) = \max_{\|2\vec{d}\|_1 \leq \deg P} n^{|\operatorname{supp} 2\vec{d}|} |a_{2\vec{d}}|, \qquad (2.24)$$

где $2\vec{d} = (2d_1, 2d_2, \ldots, 2d_n)$.

Заметим, что

$$\sum_{\|\vec{d}\|_1 \leq \deg P} \frac{1}{n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|}} \leq C_1 \qquad (2.25)$$

и для любого $j = 1, 2, \ldots \ldots, n$

$$\sum_{\substack{\|\vec{d}\|_1 \le \deg P \\ j \in \operatorname{supp} \vec{d}}} \frac{1}{n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|}} \le \frac{C_1}{n}, \tag{2.26}$$

для некоторой константы $C_1 > 0$, зависящей только от $\deg P$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Для любых полиномов P, Q выполняются неравенства:*

$$h_1(PQ) \le C_2 h_1(P) h_1(Q), \tag{2.27}$$

$$h_2(PQ) \le C_2 \left(h_2(P) h_2(Q) + \frac{1}{n} h_1(P) h_1(Q) \right), \tag{2.28}$$

причем константа $C_2 > 0$ зависит только от $\deg P$ и $\deg Q$.

Доказательство Леммы 3. Пусть

$$PQ(\vec{x}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le \deg PQ} a_{\vec{d}}^{(PQ)} \, x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$$

$$P(\vec{x}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le \deg P} a_{\vec{d}}^{(P)} \, x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le \deg Q} a_{\vec{d}}^{(Q)} \, x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$$

Заметим, что

$$|a_{\vec{d}}^{(PQ)}| \le \sum_{\vec{d^1}, \vec{d^2}} |a_{\vec{d^1}}^{(P)}| |a_{\vec{d^2}}^{(Q)}|, \tag{2.29}$$

где $\|\vec{d}\|_1 \le \deg PQ$ и сумма по таким $\vec{d^1}, \vec{d^2}$, что:

$$\|\vec{d^1}\|_1 \le \deg P, \quad \|\vec{d^2}\|_1 \le \deg Q,$$
$$\operatorname{supp} \vec{d} = \operatorname{supp} \vec{d^1} \cup \operatorname{supp} \vec{d^2}.$$

Используя факт, что число таких $\vec{d^1}, \vec{d^2}$ ограничено некоторой константой, зависящей только от $\deg P$ и $\deg Q$, определение (2.23), оценку (2.29) и неравенство

$$n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|} \le n^{|\operatorname{supp} \vec{d^1}|} n^{|\operatorname{supp} \vec{d^2}|},$$

мы получаем (2.27).

Отметим также, что

$$|a^{(PQ)}_{2\vec{d}}| \le \sum_{2\vec{d}^1, 2\vec{d}^2} |a^{(P)}_{2\vec{d}^1}||a^{(Q)}_{2\vec{d}^2}| + \sum_{\vec{d}^3, \vec{d}^4} |a^{(P)}_{\vec{d}^3}||a^{(Q)}_{\vec{d}^4}|, \tag{2.30}$$

где $\|\vec{d}\|_1 \le \deg PQ$ и сумма по таким $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3, \vec{d}^4$, что:

$$\begin{aligned} \|2\vec{d}^1\|_1 \le \deg P, \quad \|2\vec{d}^2\|_1 \le \deg Q, \\ \operatorname{supp} \vec{d} = \operatorname{supp} 2\vec{d}^1 \cup \operatorname{supp} 2\vec{d}^2, \\ \|\vec{d}^3\|_1 \le \deg P, \quad \|\vec{d}^4\|_2 \le \deg Q, \\ \operatorname{supp} \vec{d} = \operatorname{supp} \vec{d}^3 \cup \operatorname{supp} \vec{d}^4, \\ \operatorname{supp} \vec{d}^3 \cap \operatorname{supp} \vec{d}^4 \ne \emptyset. \end{aligned}$$

Используя факт, что число таких $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3, \vec{d}^4$ ограничено некоторой константой, зависящей только от $\deg P$ и $\deg Q$, определение (2.24), оценку (2.30) и неравенства

$$\begin{aligned} n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|} &\le n^{|\operatorname{supp} 2\vec{d}^1|} n^{|\operatorname{supp} 2\vec{d}^2|}, \\ n^{|\operatorname{supp} \vec{d}|} &\le \frac{1}{n} n^{|\operatorname{supp} \vec{d}^3|} n^{|\operatorname{supp} \vec{d}^4|}, \end{aligned}$$

мы получаем (2.28). ■

2.3.2. Функция χ_A

Пусть $\kappa_0 = 1$ и

$$\kappa_j = \frac{(2j-1)!!}{2^j} = \frac{(2j)!}{4^j j!} \quad \text{для } j \in \mathbb{N}\ . \tag{2.31}$$

Предположим, что матрица A удовлетворяет условиям (2.4). Определим функцию $\chi_A(P)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_A(P) &= \chi^0(P) + \chi^1_A(P) = \\ &= \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le \deg P} a_{\vec{d}} \left(\chi^0(x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}) + \chi^1_A(x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\chi^0(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}) = \kappa_{d_1/2}\kappa_{d_2/2}\dots\kappa_{d_n/2}, \quad \text{если все } d_j \text{ — четные,} \tag{2.32a}$$

$$\chi^0(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}) = 0, \quad \text{в остальных случаях;} \tag{2.32b}$$

$$\chi_A^1(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}) = \sum_{k<l}(A^{-1})_{kl}\,\chi^0(x_kx_lx_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}), \tag{2.32c}$$

где $(A^{-1})_{kl}$ обозначет (k,l)-й элемент матрицы A^{-1}. Отметим также, что

$$\begin{aligned}\chi^0(x_kx_lx_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}) = d_l\,\chi^0(x_kx_l^{-1}x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}) =\\ = d_k\,\chi^0(x_k^{-1}x_lx_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Принимая во внимание (2.12) и (2.25), мы находим, что:

$$\begin{aligned}&|\chi_A(P)| \le |\chi^0(P)| + |\chi_A^1(P)|,\\ &|\chi^0(P)| \le C_3h_2(P) \quad \text{и} \quad |\chi_A^1(P)| \le C_3\frac{h_1(P)}{n}\end{aligned} \tag{2.34}$$

для некоторой $C_3 > 0$, зависящей только от a, b и $\deg P$.

2.4. Асимптотические оценки

2.4.1. Формулировка результатов

Напомним, что

$$U_n(\rho) = \{(\theta_1,\dots,\theta_n)^T \in \mathbb{R}^n \;:\; ||\vec{\theta}||_\infty \le \rho\}.$$

Следующая теорема является основным результатом данной главы:

Теорема 1. *Пусть константы $a, b, c, r, \varepsilon > 0$, $s \in \mathbb{N}$ зафиксированы, причем $5s\varepsilon < 1/2$. Пусть $n \times n$ матрица A удовлетворяет (2.4). Тогда для любых полиномов $P, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, что $\deg P \le s$, $\deg Q \le s$, $h_1(P) \le c$,*

$h_1(Q) \le \sqrt{cn}$ *и* $h_2(Q) = 0$, *выполняется:*

$$\int\limits_{U_n(rn^\varepsilon)} e^{-\vec\theta^T A\vec\theta + P(\vec\theta) + Q(\vec\theta)} d\vec\theta = (1 + \delta(r, A, P, Q))\, e^{\chi_A(P + Q^2/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec\theta^T A\vec\theta} d\vec\theta, \qquad (2.35)$$
$$|\delta(r, A, P, Q)| \le Cn^{-1/2 + 5s\varepsilon},$$

причем константа $C > 0$ *зависит только от* a, b, c, r, s, ε.

В дальнейшем в этом параграфе везде предполагается, что предположения Теоремы 1 выполнены. Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от a, b, c, r, s, ε.

Принимая во внимание (2.27) и (2.28), находим, что:

$$h_1(Q^2/2) \le \frac{C_2}{2} h_1^2(Q) = O(n), \qquad h_2(Q^2/2) \le \frac{C_2}{2n} h_1^2(Q) = O(1). \qquad (2.36)$$

Используя неравенства (2.34), мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 1. *При выполненных предположениях Теоремы 1,*

$$\chi_A(P + Q^2/2) = O(1).$$

Пусть R_P, R_Q обозначают вещественную часть полиномов P, Q, соответственно. Используя Утверждение 1, получаем полезные оценки:

Следствие 1. *Пусть предположения Теоремы 1 выполнены, тогда:*

$$\int\limits_{U_n(rn^\varepsilon)} \left| e^{-\vec\theta^T A\vec\theta + P(\vec\theta) + Q(\vec\theta)} \right| d\vec\theta = \int\limits_{U_n(rn^\varepsilon)} e^{-\vec\theta^T A\vec\theta + R_P(\vec\theta) + R_Q(\vec\theta)} d\vec\theta =$$
$$= O(1) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec\theta^T A\vec\theta} d\vec\theta,$$

и для любых $r_2 > r_1 > 0$

$$\int\limits_{U_n(r_2 n^\varepsilon) \setminus U_n(r_1 n^\varepsilon)} \left| e^{-\vec\theta^T A\vec\theta + P(\vec\theta) + Q(\vec\theta)} \right| d\vec\theta \le C' n^{-1/2 + 5s\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec\theta^T A\vec\theta} d\vec\theta,$$

где константа $C' > 0$ *зависит только от* a, b, c, r_1, r_2, s, ε.

Замечание. Отметим также, что (см. оценки (2.43)) при выполненных предположениях Теоремы 1, верны следующие формулы:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(\vec{\theta})e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}d\vec{\theta} &= \Big(\chi_A(P) + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}d\vec{\theta},\\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q^2(\vec{\theta})e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}d\vec{\theta} &= \Big(\chi_A(Q^2) + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}d\vec{\theta}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Используя (2.37), можно переписать утверждение Теоремы 1 в терминах матожиданий $\mathbb{E}(P(\vec{\xi}))$ и $\mathbb{E}(Q^2(\vec{\xi}))$, где $\vec{\xi}$ — нормально распределенный случайный вектор с плотностью распределения, пропорциональной $\exp(-\vec{\xi}^T A\vec{\xi})$. В таком виде формула (2.35) хорошо согласуется с результатами из [19], [20], где оцениваются аналогичные интегралы (для некоторых конкретных P и Q).

2.4.2. Вспомогательные утверждения. Основная лемма

Для удобства обозначим:

$$< g >_\Omega = \int\limits_\Omega g(\vec{\theta})e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}d\vec{\theta}, \qquad < g > = < g >_{\mathbb{R}^n},$$

$$< g >_r = < g >_{U_n(rn^\varepsilon)} .$$

Для $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ положим:

$$\vec{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \ldots, \theta_n^{(j)})^T = (\theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, 0, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_n)^T.$$

Пусть

$$P^{(j)}(\vec{\theta}) = P(\vec{\theta}) - P(\vec{\theta}^{(j)}), \quad Q^{(j)}(\vec{\theta}) = Q(\vec{\theta}) - Q(\vec{\theta}^{(j)}).$$

Чтобы оценить интеграл, рассматриваемый в Теореме 1, мы будем постепенно избавляться от полиномов P и Q в подынтегральном выражении, используя следующую лемму:

Лемма 4. *Пусть предположения Теоремы 1 выполнены. Тогда для любого вектора* $\vec{d} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ *такого, что* $\|\vec{d}\|_1 \leq 2s$, *выполняются оценки:*

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} >_r =< \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} > +O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >= \\ = \left(1 + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\right)\chi_A(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}) < 1 > \end{aligned} \tag{2.38}$$

и

- *если* d_j *— четное:*

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = \kappa_{d_j/2} < \theta_1^{d_1^{(j)}}\theta_2^{d_2^{(j)}}\dots\theta_n^{d_n^{(j)}} e^{P+Q} >_r + \\ +O(n^{-1/2+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + \\ +O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{2.39}$$

- *если* d_j *— нечетное:*

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = O(n^{-1/2+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + \\ +O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >= \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} =&<\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\left(P^{(j)} + Q^{(j)}\right)e^{P+Q} >_r + \\ &+d_j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(A^{-1})_{kj} < \theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\left(P^{(k)} + Q^{(k)}\right)e^{P+Q} >_r + \\ &+ O(n^{-1+5s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r +O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где κ_l, χ_A *определены в (2.31) и (2.32), соответственно,* $(A^{-1})_{kj}$ *обозначает* (k, j)*-й элемент матрицы* A^{-1}, R_P, R_Q *обозначают вещественную часть полиномов* P, Q, *соответственно, и* $c_1 = c_1(a, b, c, r, s, \varepsilon) > 0$.

Доказательство Леммы 4 см. в Приложении.

В качестве следствия (2.38), используя (2.12), (2.25) и (2.32), мы получаем, что для любого полинома T, степень которого $\deg T \leq 2s$,

$$\begin{aligned} < T >= \Big(\chi_A(T) + O\left(h_1(T)n^{-2+(3s+1)\varepsilon}\right) + \\ + O\left(h_2(T)n^{-1+(3s+1)\varepsilon}\right)\Big) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Учитывая $h_2(P) \le h_1(P) \le c$ и формулы (2.36), (2.42), мы находим, что:

$$\begin{aligned} &< P > = \Big(\chi_A(P) + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\Big) < 1 >, \\ &< Q^2 > = \Big(\chi_A(Q^2) + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\Big) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Используя несколько раз (2.39) и принимая во внимание (2.12), (2.22) и (2.40), мы находим также, что для $\|\vec{d}\|_1 \le 2s$:

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = \chi^0(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}) < e^{P+Q} >_r + \\ &+ O(n^{-1/2+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Комбинируя (2.26) и (2.44), мы получаем, что для $\|\vec{d}\|_1 \le s$

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}(P^{(j)} + Q^{(j)}) e^{P+Q} >_r = \\ &= \chi^0\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}(P^{(j)} + Q^{(j)})\right) < e^{P+Q} >_r + \\ &+ O\left(\frac{h_1(P+Q)}{n} n^{-1/2+4s\varepsilon}\right) < e^{R_P+R_Q} >_r + \\ &+ O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Пусть

$$P(\vec{\theta}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le s} a_{\vec{d}}^{(P)}\, \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}$$

$$Q(\vec{\theta}) = \sum_{\|\vec{d}\|_1 \le s} a_{\vec{d}}^{(Q)}\, \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}$$

Для любого подмножества $S \subset \{\vec{d} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n : \|\vec{d}\|_1 \le s\}$, обозначим:

$$P_S(\vec{\theta}) = \sum_{\vec{d}\in S} a_{\vec{d}}^{(P)}\, \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}, \qquad Q_S(\vec{\theta}) = \sum_{\vec{d}\in S} a_{\vec{d}}^{(Q)}\, \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}.$$

Пусть R_{P_S}, R_{Q_S} обозначают вещественные части полиномов P_S и Q_S, соответственно. Заметим, что для любых $S_1, S_2 \subset \{\vec{d} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n : \|\vec{d}\|_1 \le s\}$

все предположения Теоремы 1 остаются выполненными,
если полиномы P_{S_1}, Q_{S_2} (или $R_{P_{S_1}}$, $R_{Q_{S_2}}$) (2.46)
взять в качестве P, Q.

2.4.3. Редукция полиномов

В этом подпараграфе доказываются следующие формулы:

$$\begin{aligned}< e^{P_S+Q} >_r = e^{\chi_A(P_S-P_{S'})} < e^{P_{S'}+Q} >_r +\\ +O\left(\frac{n^{-1/2+4s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\right) < e^{R_{P_{S'}}+R_Q} >_r +\\ +O\left(\exp(-c_2 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >,\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}< e^{Q_S} >_r = e^{\frac{1}{2}\chi_A\left({Q_S}^2-{Q_{S'}}^2\right)} < e^{Q_{S'}} >_r +\\ +O\left(\frac{n^{-1/2+5s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r +\\ +O\left(\exp(-c_2 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >,\end{aligned} \tag{2.48}$$

где константа $c_2 > 0$ зависит только от a, b, c, r, s, ε.

Начнем с формулы для выражения $< e^{P_S+Q} >_r$ через $< e^{P_{S'}+Q} >_r$, где $S \subset \{\vec{d} \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n : \|\vec{d}\|_1 \le s\}$ и $S' = S \setminus \{\vec{d}\}$ для некоторого $\vec{d} \neq \vec{0} \in S$. Комбинируя (2.12), (2.23), (2.32), (2.34), (2.44), (2.46), факт $|\operatorname{supp}\vec{d}| \ge 1$, мы получаем, что:

$$\begin{aligned}< e^{P_S+Q} >_r = < e^{P_{S'}+Q} >_r + a^{(P)}_{\vec{d}} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P_{S'}+Q} >_r +\\ +O\left(\frac{h_1(P)^2 n^{2\varepsilon\|\vec{d}\|_1}}{n^{2|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\right) < e^{R_{P_{S'}}+R_Q} >_r =\\ = \left(1+\chi_A\left(a^{(P)}_{\vec{d}}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\right)\right) < e^{P_{S'}+Q} >_r +\\ +\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}} O(n^{-1/2+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r +\\ +\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}} O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >\end{aligned} \tag{2.49}$$

и

$$\chi_A\left(a^{(P)}_{\vec{d}}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\right). \tag{2.50}$$

Формула (2.47) следует из (2.49) и (2.50).

Теперь приступим к доказательству формулы для выражения $< e^{Q_S} >_r$ через $< e^{Q_{S'}} >_r$, где $S \subset \{\vec{d} \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n : \|\vec{d}\|_1 \le s\}$ и $S' = S \setminus \{\vec{d}\}$

для некоторого $\vec{d} \in S$, $a_{\vec{d}}^{(Q)} \neq 0$. Так как $\vec{d} \neq \vec{0}$ (потому что $h_2(Q) = 0$) и $h_1(Q) \leq \sqrt{cn}$, используя (2.23), имеем, что:

$$\begin{aligned} < e^{Q_S} >_r = < e^{Q'_S} >_r + a_{\vec{d}}^{(Q)} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{Q_{S'}} >_r + \\ + \frac{(a_{\vec{d}}^{(Q)})^2}{2} < \theta_1^{2d_1}\theta_2^{2d_2}\dots\theta_n^{2d_n} e^{Q_{S'}} >_r + \\ + \frac{1}{n^{|\mathrm{supp}\,\vec{d}|}} O\left(n^{-1/2+3\varepsilon\|\vec{d}\|_1}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Используя (2.23), $h_1(Q) \leq \sqrt{cn}$ и (2.44), находим, что:

$$\begin{aligned} (a_{\vec{d}}^{(Q)})^2 < \theta_1^{2d_1}\theta_2^{2d_2}\dots\theta_n^{2d_n} e^{Q_{S'}} >_r = \chi^0\left(\left(a_{\vec{d}}^{(Q)}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\right)^2\right) + \\ + \frac{1}{n^{|\mathrm{supp}\,\vec{d}|}} O\left(n^{-1/2+4s\varepsilon}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r + \\ + O\left(\frac{1}{n^{2|\mathrm{supp}\,\vec{d}|}} \exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.52}$$

Заметим, что d_j должно быть нечетным для некоторого j (так как $h_2(Q) = 0$). Комбинируя (2.12), (2.41), (2.45) и (2.46), получаем, что:

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{Q_{S'}} >_r = K_{S,\vec{d},j} < e^{Q_{S'}} >_r + \\ + O\left(n^{-1+5s\varepsilon}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r + O\left(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где

$$\begin{aligned} K_{S,\vec{d},j} = \chi^0\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} Q_{S'}^{(j)}\right) + \\ + d_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (A^{-1})_{kj} \chi^0\left(\theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} Q_{S'}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Докажем следующее утверждение:

Утверждение 2.

$$K_{S,\vec{d},j} = \chi_A\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} Q_{S'}\right) + O(n^{-3/2}). \tag{2.55}$$

Доказательство Утверждения 2. В случае, когда d_j — нечетное, используя (2.26) и (2.32), имеем, что:

$$\chi^0\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} Q_{S'}\right) = \chi^0\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} Q_{S'}^{(j)}\right) = O(h_1(Q_{S'})n^{-1}). \tag{2.56}$$

Используя также условие $h_2(Q) = 0$, заметим, что для любого $\vec{d'} \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$, $\|\vec{d'}\|_1 \le s$,

$$\chi^0\left(\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n}Q_{S'}\right) = O(h_1(Q_{S'})n^{-1}). \tag{2.57}$$

Используя (2.12), (2.22) и (2.56), мы находим, что:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\neq l\\ j\notin\{k,l\}}}(A^{-1})_{kl}\chi^0\left(\theta_k\theta_l^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right) =\\ = \sum_{\substack{k\neq l\\ j\notin\{k,l\}}}(A^{-1})_{kl}\chi^0\left(\theta_k\theta_l^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}^{(j)}\right) = O\left(h_1(Q_{S'})n^{-2}\right).\end{aligned} \tag{2.58}$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.33), заметим также, что:

$$\begin{aligned}\chi_A^1\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\neq l\\ j\notin\{k,l\}}}(A^{-1})_{kl}\chi^0\left(\theta_k\theta_l^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right) +\\ + d_j\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^n(A^{-1})_{kj}\chi^0\left(\theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right).\end{aligned} \tag{2.59}$$

Используя (2.12), (2.22), (2.56) и (2.57), получаем, что:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^n(A^{-1})_{kj}\chi^0\left(\theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right) =\\ = \sum_{\substack{k=1\\ k\notin\operatorname{supp}\vec{d}}}^n(A^{-1})_{kj}\chi^0\left(\theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}^{(j)}\right) + O(h_1(Q_{S'})n^{-2}) =\\ = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^n(A^{-1})_{kj}\chi^0\left(\theta_k\theta_j^{-1}\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}Q_{S'}^{(j)}\right) + O(n^{-3/2}).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Комбинируя (2.32), (2.54), (2.56), (2.58), (2.59), (2.60), мы получаем (2.55). ■

Используя (2.52), (2.53), (2.55) в (2.51) и (2.57), получаем, что:

$$
\begin{aligned}
< e^{Q_S} >_r = < e^{Q_{S'}} >_r + \frac{(a^{(Q)}_{\vec{d}})^2}{2}\chi^0\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}\right)^2 < e^{Q_{S'}} >_r +\\
+a^{(Q)}_{\vec{d}}\chi_A\left(\theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n}Q_{S'}\right) < e^{Q_{S'}} >_r +\\
+\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}O\left(n^{-1/2+5s\varepsilon}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r +\\
+O\left(\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > =\\
= \left(1+\frac{1}{2}\chi_A(Q_S^2-Q_{S'}^2)\right) < e^{Q_{S'}} >_r +\\
+\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}O\left(n^{-1/2+5s\varepsilon}\right) < e^{R_{Q_{S'}}} >_r +\\
+O\left(\frac{1}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})\right) < 1 >
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

и

$$
\chi_A(Q_S^2-Q_{S'}^2) = O\left(\frac{n^{2s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}|}}\right). \tag{2.62}
$$

Формула (2.48) следует из (2.61) и (2.62).

2.4.4. Доказательство асимптотических оценок

Занумеруем $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \dots, \vec{d}^K$ все вектора множества $\left\{\vec{d}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n : \|\vec{d}\|_1\le s\right\}$. Заметим, что

$$
K = \left|\left\{\vec{d}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n : \|\vec{d}\|_1\le s\right\}\right| \le (n+1)^s. \tag{2.63}
$$

Рассмотрим множества $S_k = \left\{\vec{d}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n : \|\vec{d}\|_1\le s\right\}\setminus\{\vec{d}^1,\dots,\vec{d}^k\}$. Пусть

$$
P_k = P_{S_k} \quad \text{and} \quad Q_k = Q_{S_k}. \tag{2.64}
$$

Имеем, что $P_0 = P$, $Q_0 = Q$, $P_K = Q_K = 0$.

Мы докажем сначала Теорему 1 для случая когда все коэффициенты полиномов P, Q вещественны, т.е $P = R_P$ и $Q = R_Q$.

Используя формулу (2.47), получаем, что:

$$\begin{aligned} &< e^{R_{P_{k-1}}+R_Q} >_r = \\ &= \exp\left(\chi_A\left(R_{P_k}-R_{P_{k-1}}\right)+O\left(\frac{n^{-1/2+4s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right)\right) < e^{R_{P_k}+R_Q} >_r \\ &\qquad + O\left(\exp(-c_2 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.65}$$

Используя Утверждение 1, (2.25) и (2.46), заметим, что для любого $l \leq K$

$$\begin{aligned} &\prod_{n=1}^{l} \exp\left(\chi_A\left(R_{P_k}-R_{P_{k-1}}\right)+O\left(\frac{n^{-1/2+4s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\chi_A\left(R_{P_l}-R_{P_0}\right)+O\left(n^{-1/2+4s\varepsilon}\right)\right) = O(1). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Комбинируя (2.65) для $k = 1, 2\ldots, K$ и (2.63), (2.66), получаем, что:

$$< e^{R_P+R_Q} >_r = \exp\left(\chi_A\left(R_P\right)+O\left(n^{-1/2+4s\varepsilon}\right)\right) < e^{R_Q} >_r + \mathcal{R}_1, \tag{2.67}$$

где

$$\mathcal{R}_1 = O\left(K\exp(-c_2 n^{2\varepsilon}))\right) < 1 > = O\left(\exp(-c_3 n^{2\varepsilon}))\right) < 1 > \tag{2.68}$$

для некоторого $c_3 > 0$, зависящего только от a, b, c, r, s, ε.

Используя формулу (2.48), мы получаем, что:

$$\begin{aligned} &< e^{R_{Q_{k-1}}} >_r = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\chi_A\left(R^2_{Q_{k-1}}-R^2_{Q_k}\right)+O\left(\frac{n^{-1/2+5s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right)\right) < e^{R_{Q_k}} >_r + \\ &\qquad + O\left(\exp(-c_2 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.69}$$

Используя Утверждение 1, (2.25) и (2.46), заметим, что для любого $l \leq K$

$$\begin{aligned} &\prod_{n=1}^{l} \exp\left(\frac{1}{2}\chi_A\left(R^2_{Q_k}-R^2_{Q_{k-1}}\right)+O\left(\frac{n^{-1/2+5s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\chi_A\left(R^2_{Q_l}-R^2_{Q_0}\right)+O\left(n^{-1/2+5s\varepsilon}\right)\right) = O(1). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Комбинируя (2.69) для $k = 1, 2 \ldots, K$ и (2.63), (2.70), получаем, что:

$$< e^{R_Q} >_r = \exp\left(\chi_A\left(R_Q^2/2\right) + O\left(n^{-1/2+5s\varepsilon}\right)\right) < 1 >_r + \mathcal{R}_2, \tag{2.71}$$

где

$$\mathcal{R}_2 = O\left(K \exp(-c_2 n^{2\varepsilon}))\right) < 1 > = O\left(\exp(-c_3 n^{2\varepsilon}))\right) < 1 > . \tag{2.72}$$

Комбинируя (2.38), (2.67), (2.71), мы получаем (2.35) для случая $P = R_P$, $Q = R_Q$ и, как следствие,

$$< e^{R_P + R_Q} >_r = O(1) < 1 > . \tag{2.73}$$

Теперь перейдем к случаю произвольных P и Q. Используя (2.73) и формулы (2.47) (2.48), получаем, что:

$$\begin{aligned} < e^{P_{k-1}+Q} >_r = e^{\chi_A(P_{k-1}-P_k)} < e^{P_k+Q} >_r + \\ + O\left(\frac{n^{-1/2+4s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} < e^{Q_{k-1}} >_r = e^{\frac{1}{2}\chi_A\left({Q_{k-1}}^2 - {Q_k}^2\right)} < e^{Q_k} >_r + \\ + O\left(\frac{n^{-1/2+5s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.75}$$

Комбинируя (2.74) для $k = 1, 2 \ldots, K$, находим, что:

$$< e^{P+Q} >_r = e^{\chi_A(P)} < e^Q >_r + \mathcal{R}_3, \tag{2.76}$$

где, принимая во внимание (2.25) и Утверждение 1,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 = \sum_{k=1}^{K} e^{\chi_A(P-P_k)} O\left(\frac{n^{-1/2+4s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right) < 1 > = \\ = O\left(n^{-1/2+4s\varepsilon}\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.77}$$

Комбинируя (2.75) для $k = 1, 2 \ldots, K$, находим, что:

$$< e^Q >_r = e^{\chi_A\left(Q^2/2\right)} < 1 >_r + \mathcal{R}_4, \tag{2.78}$$

где, принимая во внимание (2.25) и Утверждение 1,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 = \sum_{k=1}^{K} e^{\frac{1}{2}\chi_A\left(Q^2 - Q_k^2\right)} O\left(\frac{n^{-1/2+5s\varepsilon}}{n^{|\operatorname{supp}\vec{d}^k|}}\right) < 1 >= \\ = O\left(n^{-1/2+5s\varepsilon}\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{2.79}$$

Комбинируя (2.76) - (2.79) и Утверждение 1, мы получаем (2.35).

Глава 3.

ГРАФЫ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

3.1. Класс графов с сильными перемешивающими свойствами

3.1.1. Перемешивающие свойства графов

Пусть G — неориентированный простой граф с множеством вершин VG и множеством ребер EG. Определим $n \times n$ матрицу L следующим образом:

$$L_{jk} = \begin{cases} -1, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ d_j, & j = k, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $n = |VG|$ и d_j обозначает степень $v_j \in VG$. Матрица $L = L(G)$ называется матрицей Лапласа графа G. Собственные значения

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

матрицы L являются неотрицательными вещественными числами, причем кратность нулевого собственного значения совпадает с количеством компонент связности, в частности, $\lambda_1 = 0$. Число $\lambda_2 = \lambda_2(G)$ называется алгебраической связностью графа G.

Классическая теория алгебраической связности была развита в работах Fiedler M., см. [42], [43]. Данный параметр используется для анализа устойчивости и синхронизируемости сетей, см. [16]. Отметим также, что число $\lambda_2(G)$ является дискретным аналогом наименьшего положительного собственного значения дифференциального оператора Лапласа на римановом многообразии. (Для дополнительной информации о спектральных свойствах матрицы Лапласа см., например, [75] и ссылки, приведенные там.)

Пусть $\mathcal{F}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 1. Алгебраическая связность $\lambda_2(G) \geq \gamma|VG|$.

Для подмножества вершин $S \subset VG$ обозначим $\mathrm{cut}_G(S)$ множество всех ребер, соединяющих вершину из S и вершину не из S:

$$\mathrm{cut}_G(S) = \left\{\{u,v\} \in EG : u \in S, v \in VG \setminus S\right\}.$$

Константа Чигера (или изопериметрическое число) графа G, обозначаемая $i(G)$, определяется следующим образом:

$$i(G) = \min\left\{\frac{|\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|} : S \subset VG,\ 0 < |S| \leq \frac{|VG|}{2}\right\}. \tag{3.2}$$

Константа Чигера отражает свойства расширения графа, другими словами, является числовой мерой того свойства, что в графе нет «узких мест» (англ. bottleneck). Данный параметр особенно важен при рассмотрении расширяющих графов (англ. expander graphs), которые используются для построения кодов, исправляющих ошибки, и надежных вычислительных схем, см. [55], [83]. Кроме того, число $i(G)$ является дискретным аналогом изопериметрической константы (Чигера) в теории римановых многообразий и имеет много других интересных интерпретаций (для более подробной информации см., например, [74] и ссылки, приведенные там).

Пусть $\mathcal{C}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 2. Константа Чигера $i(G) \geq \gamma|VG|$.

Обозначим $P = P(G)$ матрицу переходных вероятностей случайного блуждания по графу G:

$$P_{jk} = \begin{cases} 1/d_j, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Собственные значения P таковы, что:

$$1 = \chi_1 \geq \chi_2 \ldots \geq \chi_n \geq -1.$$

Кроме того, рассмотрим матрицу $\tilde{P} = \tilde{P}(G)$ переходных вероятностей «ленивого» случайного блуждания по графу G:

$$\tilde{P}_{jk} = \begin{cases} 1/2, & \text{если } j = k, \\ 1/(2d_j), & \text{если} \{v_j, v_k\} \in EG, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что $\tilde{P} = \frac{1}{2}(P + I)$, где I — единичная $n \times n$ матрица, поэтому собственные значения $\tilde{P}$ лежат в интервале $[0, 1]$.

Граф G связен тогда и только тогда, когда случайное блуждание (или «ленивое» случайное блуждание) является неприводимой цепью Маркова. В этом случае, существует единственное стационарное распределение и кратность собственного значения $\chi_1 = 1$ равна одному. Для дополнительной информации о случайных блужданиях на графах см., например, [64] и ссылки, приведенные там.

Спектральный зазор $1 - \chi_2$ является важным параметром, соответствующим скорости сходимости «ленивого» случайного блуждания к предельному состоянию. Другими словами, он отражает то, насколько быстро «забывается» начальное состояние (перемешивание).

Что касается случайного блуждания с матрицей (3.3), то помимо $1 - \chi_2$ другим важным параметром является $1+\chi_n$, свойства которого обсуждаются в §3.2. Например, для двудольного графа G данная цепь Маркова является периодической (в отличие от «ленивого» случайного блуждания), поэтому даже при большом спектральном зазоре $1 - \chi_2$, всегда можно определить к какой доле относилось начальное состояние по четности шага. Тем не менее, внутри каждой доли перемешивание происходит быстро.

Пусть $\mathcal{R}_\gamma^+$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 3. Спектральной зазор $1 - \chi_2(G) \geq \gamma$ и $\min_j d_j \geq \gamma |VG|$.

Графы $\mathcal{F}_\gamma$, $\mathcal{C}_\gamma$, $\mathcal{R}_\gamma^+$ обладают различными свойствами, каждое из которых соответствует хорошей перемешиваемости графа. Назовем $\mathcal{F}_\gamma \cap \mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{R}_\gamma^+$ классом γ-перемешивающих графов.

Оказывается, что Свойства 1-3 эквивалентны в следующем смысле: если граф удовлетворяет одному из этих свойств при $\gamma = \gamma_0 > 0$, то он удовлетворяет всем Свойствам 1-3 для некоторого $\gamma > 0$, зависящего только от γ_0. Отметим также, что некоторые подобные оценки, связывающие рассматриваемые параметры графов, были ранее получены в [26].

3.1.2. Доказательство эквивалентности

Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и M — $n \times n$ матрица. Напомним, что:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}}, \qquad \|A\|_2 = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\, \vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}.$$

Известно, что для простого графа G с n вершинами:

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{n-1} \min_j d_j, \tag{3.4a}$$

$$\lambda_2(G) \geq 2 \min_j d_j - n + 2, \tag{3.4b}$$

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq i(G) \leq \sqrt{\lambda_2(G)(2 \max_j d_j - \lambda_2(G))}, \tag{3.5}$$

$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2(G_1) + 1, \tag{3.6a}$$

$$\lambda_2(G') \leq \lambda_2(G) \leq \lambda_2(G') + \|L(G) - L(G')\|_2, \tag{3.6b}$$

где G_1 — граф, получающийся из G посредством удаления одной вершины и всех смежных ей ребер, G' — произвольный граф такой, что $VG' = VG$ и $EG' \subset EG$.

Оценки (3.4), (3.6) были получены в [42]. Оценки (3.5) приведены в [74].

Используя (3.5) и неравенство $d_j < n$, мы получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{C}_{\gamma_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_1}, \tag{3.7}$$

где $\gamma_1 > 0$ зависит только от γ_0.

Для того чтобы завершить доказательство эквивалентности Свойств 1-3, нам потребуется следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть константы $a, b_1, b_2 > 0$ фиксированы. Пусть A — такая симметричная положительно определенная $n \times n$ матрица, что для некоторого вектора $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} \neq \vec{0}$,*

$$A\vec{w} = 0, \tag{3.8a}$$

и для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T\vec{w} = 0$,

$$\|A\vec{u}\|_2 \geq a\|\vec{u}\|_2. \tag{3.8b}$$

Тогда для любой симметричной $n \times n$ матрицы B такой, что

$$\|B\|_2 \leq b_1 \quad \text{и} \quad \vec{w}^T B\vec{w} \geq b_2\|\vec{w}\|_2^2, \tag{3.8c}$$

выполняется следующее утверждение:

$$\begin{cases} \det(A - \lambda B) = 0, \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda \geq \rho \tag{3.9}$$

для некоторого $\rho = \rho(a, b_1, b_2) > 0$.

Доказательство Леммы 5 приведено в конце данного подпараграфа.

Заметим, что

$$P = I - D^{-1}L, \tag{3.10}$$

где L и P матрицы, определенные в (3.1) и (3.3), соответственно, I обозначает единичную матрицу и D — диагональная матрица, определяемая $D_{jj} = d_j$.

Пусть $A_1 = \frac{1}{n}Q$, $B_1 = \frac{1}{n}D$ и $\vec{w}_1 = (1, \dots, 1)^T$. Используя (3.10), получаем, что:

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(L - \lambda n I) = 0; \tag{3.11}$$

$$\det(A_1 - \lambda B_1) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0; \tag{3.12}$$

для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T \vec{w}_1 = 0$,

$$\vec{u}^T A_1 \vec{u} \geq \frac{1}{n} \lambda_2(G) \vec{u}^T \vec{u}; \tag{3.13}$$

$$\|B_1\|_2 \leq \frac{1}{n} \max_j d_j \leq 1, \quad \vec{w}_1^T B_1 \vec{w}_1 \geq \frac{1}{n} \min_j d_j \, \vec{w}_1^T \vec{w}_1. \tag{3.14}$$

Комбинируя Свойство 1, (3.4a), (3.11)-(3.14) и Лемму 5, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \subset \mathcal{R}^+_{\gamma_2}, \tag{3.15}$$

где $\gamma_2 > 0$ зависит только от γ_0.

Пусть $A_2 = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$, $B = nD^{-1}$ и $\vec{w}_2 = D^{\frac{1}{2}} \vec{w}_1$, где D^s — диагональная матрица, $D^s_{jj} = (d_j)^s$. Используя (3.10), находим, что:

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(P - (1-\lambda)I) = 0; \tag{3.16}$$

$$\det(A_2 - \lambda B_2) = 0 \Longleftrightarrow \det(L - \lambda n I) = 0; \tag{3.17}$$

для любого $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\vec{u}^T \vec{w}_2 = 0$,

$$\vec{u}^T A_2 \vec{u} \geq (1 - \chi_2(G)) \vec{u}^T \vec{u}; \tag{3.18}$$

$$\|B_2\|_2 \leq \frac{n}{\min\limits_j d_j}, \quad \vec{w}_2^T B_1 \vec{w}_2 = n \vec{w}_1^T \vec{w}_1 \geq \vec{w}_2^T \vec{w}_2. \tag{3.19}$$

Комбинируя Свойство 3, (3.16)-(3.19) и Лемму 5, получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{R}^+_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_{\gamma_3}, \tag{3.20}$$

где $\gamma_3 > 0$ зависит только от γ_0.

Собирая вместе (3.7), (3.15) и (3.20), мы получаем искомое утверждение:

Предложение 4. *Пусть* $\mathcal{F}_\gamma, \mathcal{C}_\gamma, \mathcal{R}^+_\gamma$ *— классы графов, рассматриваемые в п. 3.1.1. Тогда для любого* $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{F}_{\gamma_0} \cup \mathcal{C}_{\gamma_0} \cup \mathcal{R}^+_{\gamma_0} \subset \mathcal{F}_\gamma \cap \mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{R}^+_\gamma,$$

где $\gamma > 0$ *зависит только от* γ_0.

Теперь осталось доказать Лемму 5.

Доказательство Леммы 5. Пусть $\det(A - \lambda B) = 0$. Тогда для некоторого $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq 0$,

$$A\vec{v} = \lambda B\vec{v}. \tag{3.21}$$

Пусть $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, где $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{w}$ и $\vec{v}_\perp^T \vec{w} = 0$. Согласно (3.8a), имеем, что

$$\vec{v}_\parallel^T A\vec{v} = 0.$$

Так как $\lambda \neq 0$, используя (3.21), получаем, что

$$\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel = -\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp. \tag{3.22}$$

Используя (3.8c), (3.22) и неравенство Коши-Шварца, находим, что

$$b_1\|\vec{v}_\parallel\|_2\|\vec{v}_\perp\|_2 \geq \|\vec{v}_\parallel\|_2\|B\vec{v}_\perp\|_2 \geq |\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\perp| = |\vec{v}_\parallel^T B\vec{v}_\parallel| \geq b_2\|\vec{v}_\parallel\|_2^2.$$

Поэтому имеем, что

$$\|\vec{v}_\perp\|_2 \geq \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\|\vec{v}\|_2. \tag{3.23}$$

Используя (3.8b), (3.8c) и (3.23), мы находим, что:

$$\begin{aligned} &\|A\vec{v}\|_2 \geq a\|\vec{v}_\perp\|_2, \\ &\|B\vec{v}\|_2 \leq b_1\|\vec{v}\|_2 \leq \frac{b_1\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_2}\|\vec{v}_\perp\|_2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Комбинируя (3.21) и (3.24), получаем, что

$$\lambda \geq \frac{ab_2}{b_1\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \tag{3.25}$$

■

3.1.3. Примеры

Утверждение 3.

$$\begin{array}{lcc} \textit{если } \min\limits_j d_j \geq \sigma|VG| & & \textit{то граф } G \textit{ является } \gamma\textit{-перемешивающим} \\ & \Longrightarrow & \\ \textit{для некоторого } \sigma > 1/2, & & \textit{для некоторого } \gamma = \gamma(\sigma) > 0. \end{array}$$

Утверждение 3 следует из оценки (3.4b) и Предложения 4.

Пример 1. Пусть K_n и $\tilde{K}_n$ — два полных графа с n вершинами. Определим $G_n^{(1)}$ следующим образом:

$$VG_n^{(1)} = VK_n \cup V\tilde{K}_n,$$
$$EG_n^{(1)} = EK_n \cup E\tilde{K}_n \cup E^+,$$
$$\text{где } E^+ = \{\{v_i, \tilde{v}_i\},\ i = 1, \dots n\}.$$

Для $G = G_n^{(1)}$ имеем, что для всех $j = 1, \dots, 2n$

$$d_j = n = \frac{1}{2}|VG_n^{(1)}|,$$

однако

$$\frac{i(G_n^{(1)})}{n} \leq \frac{|E^+|}{n|VK_n|} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому семейство $\{G_n^{(1)}\}$ не удовлетворяет Свойству 2 (и, следовательно, Свойствам 1,3). Отметим также, что графы семейства $\{G_n^{(1)}\}$ имеют большую вершинную и реберную связность.

Пример 2. Пусть K_n — полный граф с n вершинами. Определим $G_n^{(2)}$ следующим образом:

$$VG_n^{(2)} = VK_n \cup \{v_{n+1}\},$$
$$EG_n^{(2)} = EK_n \cup \{v_n, v_{n+1}\}.$$

Для $G = G_n^{(2)}$ имеем, что $\min\limits_j d_j = 1$. Поэтому семейство $\{G_n^{(2)}\}$ не удовлетворяет Свойству 3 (и, следовательно, Свойствам 1, 2). Тем не менее, можно показать, спектральный зазор $1 - \chi_2(G_n^{(2)}) \geq 1/2$ при $n \geq 2$.

Замечание. Отметим, что Примеры 1 и 2 показывают, в частности, что оба условия Свойства 3 являются существенными.

Пример 3. Пусть G_0 — связный простой граф с $m > 1$ вершинами. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — некоторые натуральные числа. Определим $G_n^{(3)}$ следующим образом:

$$VG_n^{(3)} = \{v_j^i : \ i = 1, \ldots, nc_j, \ j = 1, \ldots, m\},$$
$$\{v_{j_1}^{i_1}, v_{j_2}^{i_2}\} \in EG_n^{(3)} \Longleftrightarrow \{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in EG_0.$$

Оценим константу Чигера (изопериметрическое число) $i(G_n^{(3)})$. Пусть

$$c_0 = \min_{1 \le j \le m} c_j, \quad C = \sum_{j=1}^{m} c_j \ .$$

Заметим, что:

$$\text{степень каждой вершины } VG_n^{(3)} \text{ не менее } c_0 n \tag{3.26a}$$

и

$$|VG_n^{(3)}| = Cn. \tag{3.26b}$$

Пусть $S \subset VG_n^{(3)}$, $|S| \le Cn/2$.

- Случай 1. $|S| \le c_0 n/2$. Используя (3.26), находим, что

$$|\mathrm{cut}_{G_n^{(3)}}(S)| \ge c_0 n|S| - |S|^2 \ge \frac{c_0 n}{2}|S| = \frac{c_0|VG_n^{(3)}|}{2C}|S| \tag{3.27}$$

- Случай 2. $|S| > c_0 n/2$. Пусть $V_1, V_2 \subset VG_0$ такие, что

$$v_j \in V_1 \Longleftrightarrow |\left\{v_j^i : v_j^i \in S\right\}| \ge \frac{c_0 n}{2m},$$

$$v_j \in V_2 \Longleftrightarrow |\left\{v_j^i : v_j^i \notin S\right\}| \ge \frac{c_j n}{2}.$$

Используя $c_0 n/2 < |S| \le Cn/2$, находим, что

$$V_1 \cup V_2 = VG_0, \quad |V_1| > 0, \quad |V_2| > 0.$$

Так как G_0 — связный, мы можем найти $v_{j_1} \in V_1$, $v_{j_2} \in V_2$ такие, что $\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in EG_0$. Оценивая число ребер в $\mathrm{cut}_{G_n^{(3)}}(S)$, соответствующих этим вершинам, получаем, что

$$|\mathrm{cut}_{G_n^{(3)}}(S)| \geq \frac{c_0 c_{j_2} n^2}{4m} \geq \frac{c_0^2 n}{2mC}|S| = \frac{c_0^2 |VG_n^{(3)}|}{2mC^2}|S|. \tag{3.28}$$

Комбинируя формулы (3.27), (3.28) и Предложение 4, получаем, что семейство $\left\{VG_n^{(3)}\right\}$ удовлетворяет Свойствам 1-3 с $\gamma > 0$, зависящим только от исходного графа G_0 и констант $c_1, \ldots, c_m$.

Отметим также, что Пример 3 может быть модифицирован таким образом, что константы $c_1, \ldots, c_m > 0$ необязательно являются натуральными числами. Мы предположили это только для простоты доказательства.

Замечание. Комбинируя Пример 3, оценки (3.6) и Предложение 4, можно доказать Свойства 1-3 для большого числа классических примеров (включая семейства $\{K_n\}$, $\{K_{n,n}\}$ и множество других).

3.1.4. Пути и разрезы

Пусть G — граф с множеством вершин VG и множеством ререр EG. Путь в графе G — это последовательность вершин $v_i \in VG$ при $i = 1, \ldots, k$, таких, что две любые последовательные вершины соединены хотя бы одним ребром из EG. Число k звеньев в пути называется его длиной. Путь, один конец которого принадлежит $S \subset VG$, а другой принадлежит $T \subset VG$, называется $S - T$ путем. В частности, путь с концами в вершинах s, $t \in VG$ называется $s - t$ путем. Подмножество ребер $W \subset EG$ называется $S - T$ разрезом (реберным), если любой $S - T$ путь содержит хотя бы одно ребро из W.

Следующая теорема из [72] является классическим результатом теории графов:

Теорема (Менгер К.)**.** *Пусть G — конечный неориентированный граф. Подмножества вершин $S, T \subset VG$ таковы, что $S \cap T = \emptyset$. Тогда максимальное* *число попарно не пересекающихся по ребрам $S - T$ путей совпадает с минимальной мощностью $S - T$ разреза.*

Аналогичный результат справедлив также для непересекающихся по вершинам $S - T$ путей и вершинных $S - T$ разрезов. Теорема Менгера может быть рассмотрена как следствие результатов Форда и Фалкерсона, см. [46].

Предположим, что G — простой γ-перемешивающий граф с n вершинами. Оценим величину $S - T$ разреза W, для $S, T \subset VG$ таких, что $S \cap T = \emptyset$. Пусть V_S — множество вершин $v \in VG$, для которых существует $S - v$ путь не пересекающийся по ребрам с W. В частности, по определению разреза имеем, что:

$$S \subseteq V_S, \quad T \subseteq VG \setminus V_S. \tag{3.29}$$

Пусть L — матрица Лапласа G. Собственному значению 0 матрицы L соответствует вектор $\vec{1} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что для $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\vec{1}^T \vec{x} = x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0$,

$$\sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j - x_k)^2 = \vec{x}^T L \vec{x} \geq \lambda_2(G) \|\vec{x}\|_2^2 \geq \gamma n \|\vec{x}\|_2^2.$$

Используя $\vec{x}$, определяемый,

$$x_j = \begin{cases} n - |V_S|, & \text{если } v_j \in V_S, \\ -|V_S|, & \text{если } v_j \in V \setminus V_S, \end{cases}$$

мы получаем неравенство

$$n^2 |W| \geq \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j - x_k)^2 \geq \gamma n^2 |V_S| (n - |V_S|).$$

Учитывая (3.29), мы находим, что:

$$|V_S|(n - |V_S|) \geq \frac{n \min\{|S|, |T|\}}{2}.$$

Используя Теорему Менгера, мы получаем, что существует по крайней мере $\gamma \frac{n \min\{|S|,|T|\}}{2}$ попарно не пересекающихся по ребрам $S - T$ путей. Мы покажем, что длина достаточно большого количества этих путей ограничена константой, не зависящей от n.

Предложение 5. *Пусть G — простой γ-перемешивающий граф с n вершинами для некоторого $\gamma > 0$. Подмножества вершин $S, T \subset VG$ таковы, что $S \cap T = \emptyset$. Тогда существуют $\mu\, n \min\{|S|, |T|\}$ попарно не пересекающихся по ребрам $S - T$ путей длины не превосходящей H, причем константы $\mu, H > 0$ зависят только от γ.*

Доказательство Предложения 5. Нам потребуется для доказательства оценка диаметра графа с большой алгебраической связностью:

Утверждение 4. *Пусть G' — простой граф с n вершинами, причем алгебраическая связность $\lambda_2(G') \geq \gamma n/3$. Тогда для любых двух различных вершин $s, t \in VG'$ существует простой $s - t$ путь в G' длины, не превосходящей $l_{\gamma/3}$, где константа $l_{\gamma/3}$ зависит только от γ.*

Действительно, так как $\lambda_2(G') > 0$, то G' — связный граф. Кратчайший $s - t$ путь является простым (без самопересечений). Согласно (3.4b), степень любой вершины в G' не менее $\gamma n/6$. Поэтому в любого наборе, состоящем из не менее чем $6/\gamma$ вершин, найдутся две, имеющие общую смежную вершину. Тогда получаем, что длина кратчайшего $s - t$ пути ограничена константой, зависящей только от γ (иначе путь можно было бы сократить).

Следствием Утверждения 4 является:

Утверждение 5. *Пусть G' — простой граф с n вершинами, причем алгебраическая связность $\lambda_2(G') \geq 2\gamma n/3$. Подмножества вершин $S, T \subset VG$ таковы, что $S \cap T = \emptyset$. Тогда существуют по крайней мере $\frac{\min\{|S|, |T|, \gamma n/3\}}{l_{\gamma/3}+1}$ попарно не имеющих общих вершин простых $S - T$ путей в G' длины, не превосходящей $l_{\gamma/3}$.*

Действительно, используя Утверждение 4 будем выбирать простой $S - T$ путь длины, не превосходящей $l_{\gamma/3}$ и удалять из графа все вершины этого пути. Мы можем повторять такую процедуру до тех пор пока в S и T остается хотя бы по одной вершине, и алгебраическая связность не менее $\gamma n/3$. Учитывая неравенство (3.6a), мы получим необходимое число путей.

Доказательство Предложения 5 завершается следующим образом: пока алгебраическая связность остается по крайней мере $2\gamma n/3$, используя Утверждение 5, мы выбираем по крайней мере $\frac{\min\{|S|,|T|,\gamma n/3\}}{l_{\gamma/3}+1}$ простых $S-T$ путей, запоминаем их и удаляем все ребра, входящие в выбранные пути. Обозначим G_k — граф, получающийся после k таких шагов. Так как на каждом шаге выбираются попарно не пересекающиеся по вершинам простые пути, то степень любой вершины уменьшилась не более чем на $2k$. Используя тот факт (см., например [11]), что

$$\|A\|_2 \leq \max_k \sum_{j=1}^{n} |A_{jk}|, \tag{3.30}$$

мы получаем:

$$\|L(G) - L(G_k)\|_2 \leq 4k,$$

где $L(G)$ и $L(G_k)$ — матрицы Лапласа графов G и G_k, соответственно. Рассмотрим собственный вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ матрицы $L(G_k)$, соответствующий значению $\lambda_2(G_k)$. Тогда, учитывая $\vec{1}^T\vec{x} = 0$,

$$\lambda_2(G_k)\|\vec{x}\|_2^2 = \vec{x}^T L(G_k)\vec{x} \geq \vec{x}^T L(G)\vec{x} - 4k\|\vec{x}\|_2^2 \geq (\lambda_2(G_k) - 4k)\|\vec{x}\|_2^2.$$

Тем самым, если $4k \leq \gamma n/3$, то процедуру удаления ребер можно продолжать. В результате мы получим необходимое число попарно не пересекающихся по ребрам путей длины, не превосходящей $l_{\gamma/3}$. ∎

3.1.5. Свойства матрицы Лапласа

Для матрицы Лапласа $L(G)$ простого графа G (определенной в (3.1)) вектор $(1, 1, \ldots, 1)^T$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$. Пусть

$$\hat{L}(G) = L(G) + J, \text{ где } J \text{ — матрица, все элементы которой равны 1.} \tag{3.31}$$

Заметим, что $L(G)$ и $\hat{L}(G)$ имеют одинаковый набор собственных значений и векторов, за исключением собственного значения, соответствующего вектору

$[1, 1, \ldots, 1]^T$, которое равно 0 для $L(G)$ и n для $\hat{L}(G)$.

Для $s \in \mathbb{R}$ обозначим $\tilde{D}^s$ следующую $n \times n$ матрицу:

$$(\tilde{D}^s)_{jk} = \begin{cases} (d_j+1)^s, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases} \tag{3.32}$$

где d_j — степень вершины v_j графа G.

Предположим, что граф G является γ-перемешивающим для некоторого $\gamma > 0$. Далее в этом подпараграфе мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ.

Предложение 6. *Пусть G — простой γ-перемешивающий граф с n вершинами для некоторого $\gamma > 0$. Тогда:*

$$\gamma n/2 \le d_j \le n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.33}$$

$$\gamma^n n^n \le \det \hat{L} \le n^n, \tag{3.34}$$

$$(\hat{L}^{-1})_{jk} = \begin{cases} (d_j+1)^{-1} + O(n^{-2}), & \textit{если } j = k, \\ O(n^{-2}), & \textit{если } j \neq k, \end{cases} \tag{3.35}$$

где матрица $\hat{L} = \hat{L}(G)$ определяется (3.31);

$$\textit{матрица } \tilde{D}^{-1/2}\hat{L}\tilde{D}^{-1/2} \textit{ принадлежит классу } \mathcal{M}_{a,b}, \tag{3.36}$$

где $\tilde{D}^s$ определяется в (3.32), класс $\mathcal{M}_{a,b}$ определен в §2.1 (см. (2.4)), причем константы $a, b > 0$ зависят только от γ; при $n \ge n_0$

$$\det \hat{L} = O(n) \det \hat{L}_1, \quad \det \hat{L}_1 = O(n^{-1}) \det \hat{L}, \tag{3.37}$$

где $n_0 > 0$ зависит только от γ, $\hat{L}_1 = \hat{L}(G_1)$, а граф G_1 получается из G посредством удаления одной из вершин и всех смежных ребер;

$$\det \hat{L} = O(1) \det \hat{L}', \quad \det \hat{L}' = O(1) \det \hat{L}. \tag{3.38}$$

где $\hat{L}' = \hat{L}(G')$, причем граф G' выбран такой, что $VG' = VG$, $EG' \subset EG$, разность числа ребер $|EG| - |EG'| = O(n)$ и любая вершина $v \in VG$ имеет не более $\gamma^2 n/8$ ребер в $EG \setminus EG'$.

Доказательство Предложения 6. Формула (3.33) немедленно следует из (3.4a).

Из (3.30) получаем, что:

$$\lambda_n = ||L||_2 \le ||\hat{L}||_2 = \max_k \sum_{j=1}^{n} |\hat{L}_{jk}| = n. \tag{3.39}$$

Поэтому все собственные значения $\hat{L}$ лежат в $[\gamma n, n]$ и, в частности, выполняется (3.34).

Используя (3.33) и

$$\|\tilde{D}^{1/2}\hat{L}^{-1}\tilde{D}^{1/2}\|_2 \le \|\tilde{D}^{1/2}\|_2 \|\hat{L}^{-1}\|_2 \|\tilde{D}^{1/2}\|_2 \le \frac{n}{\gamma n} = \gamma^{-1},$$

мы получаем (3.36).

Комбинируя формулы (3.33), (3.36) и Предложение 1 (см. п. 2.2.1), мы получаем (3.35).

Без ограничения общности можно считать, что G_1 получается из G посредством удаления вершины v_1. Рассмотрим $n \times n$ матрицу M такую, что

$$M_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 1 \text{ и } k \ne 1, \\ 0, & \text{если } j \ne 1 \text{ и } k = 1, \\ \hat{L}_{jk}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя Предложение 3 (см. п. 2.2.3) для $A = \tilde{D}^{-1/2}\hat{L}\tilde{D}^{-1/2}$ и тот факт, что главный минор равен определителю $\tilde{D}^{-1/2}M\tilde{D}^{-1/2}$, получаем, что для $n \ge n_0$

$$\det M = O(1)\det \hat{L}, \quad \det \hat{L} = O(1)\det M, \tag{3.40}$$

где константа $n_0 > 0$ зависит только от γ. Заметим, что

$$\det M = (d_1 + 1)\det M', \tag{3.41}$$

где M' — матрица, получающаяся из M (или из $\hat{L}$) посредством удаления первой строки и первого столбца. Кроме того, отметим, что M' практически совпадает с $\hat{L}_1$:

$$M' - \hat{L}_1 \text{ — диагональная матрица с элементами 0 или 1.} \tag{3.42}$$

Пусть $A_1 = \tilde{D}_1^{-1/2}\hat{L}_1\tilde{D}_1^{-1/2}$ матрица аналогичная A, но для графа G_1 вместо G. Учитывая (3.6a), алгебраическая связность $\lambda_2(G_1) \geq \gamma n/2$ для $n \geq 2/\gamma$. Используя (3.36) для графа G_1, (3.42), и Предложение 2 (см. п. 2.2.2) для $A = A_1$ и $A' = \tilde{D}_1^{-1/2}M'\tilde{D}_1^{-1/2}$, находим, что:

$$\det M' = O(1)\det \hat{L}_1, \quad \det \hat{L}_1 = O(1)\det M'. \tag{3.43}$$

Комбинируя (3.40)-(3.43) и (3.33), мы получаем (3.37)

Используя (3.30) и (3.33), находим, что:

$$\begin{gathered}\hat{L} - \hat{L}'\text{— неотрицательно определенная матрица,}\\ \|\tilde{D}^{-1/2}(\hat{L} - \hat{L}')\tilde{D}^{-1/2}\|_2 \leq \frac{\|\hat{L} - \hat{L}'\|_2}{\gamma n/2} \leq \frac{2\gamma^2 n/8}{\gamma n/2} = \gamma/2.\\ \operatorname{tr}(\tilde{D}^{-1/2}(\hat{L} - \hat{L}')\tilde{D}^{-1/2}) = O(1).\end{gathered} \tag{3.44}$$

Комбинируя (3.39), (3.44) и Предложение 2 (см. п. 2.2.2) для $A = \tilde{D}^{-1/2}\hat{L}\tilde{D}^{-1/2}$ и $A' = \tilde{D}^{-1/2}\hat{L}'\tilde{D}^{-1/2}$, мы получаем (3.38). ∎

Формулы (3.33) - (3.38) будут активно использоваться в Главе 4 при получении асимптотических формул для числа эйлеровых ориентаций и числа эйлеровых циклов.

3.2. Класс существенно недвудольных графов

3.2.1. Недвудольность и апериодичность

Рассмотрим неориентированный простой граф G с множеством вершин $VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер EG. Определим $n \times n$ матрицу Q следующим образом:

$$Q_{jk} = \begin{cases} 1, & \{v_j, v_k\} \in EG,\\ d_j, & j = k,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{3.45}$$

где $n = |VG|$ и d_j обозначает степень вершины $v_j \in VG$. Матрица $Q = Q(G)$ называется беззнаковой матрицей Лапласа или Q-матрицей графа G. Беззнаковая матрица Лапласа привлекла большое внимание в последние годы, особенно после исследований Cvetković D. в [29], см. также [31]- [33]. Как было замечено в работе [51], спектральные свойства матрицы Q порой несут больше информации о графе G, чем спектр других хорошо изученных матриц: матрицы смежности и матрицы Лапласа. Спектральная теория графов, основанная на Q-матрице, называется Q-теорией.

Собственные значения

$$q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$$

матрицы Q являются неотрицательными вещественными числами, причем кратность нулевого собственного значения совпадает с числом двудольных компонент связности графа G, в частности, $q_n = 0$ тогда и только тогда, когда какая-то из компонент связности — двудольная. Собственное значение $q_n = q(G)$ называется алгебраической недвудольностью (англ. bipartiteness) и может быть рассмотрено как числовая мера того, насколько граф G близок двудольному. Для информации о последних полученных результатах, касающихся $q(G)$, см., например, [53], [40] и ссылки, приведенные там.

Свойства алгебраической недвудольности $q(G)$ во многом аналогичны свойствам алгебраической связности $\lambda_2(G)$:

$$q(G) \leq \min_j d_j, \tag{3.46}$$

$$q(G) \leq q(G_1) + 1, \tag{3.47a}$$

$$q(G') \leq q(G) \leq q(G') + \|Q(G) - Q(G')\|_2, \tag{3.47b}$$

где G_1 — граф, получающийся из G посредством удаления одной вершины и всех смежных ей ребер, G' — произвольный граф такой, что $VG' = VG$ и $EG' \subset EG$.

Оценка (3.46) получена в [35]. Оценки (3.47) приведены в [53]. Так как алгебраическая недвудольность графов, содержащих изолированные вершины, равна 0, легко видеть (удаляя всех соседей одной из вершин), что (3.46) следует из (3.47a).

Пусть $\mathcal{Q}_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 4. Алгебраическая недвудольность $q(G) \geq \gamma |VG|$.

По аналогии с п. 3.1.1 мы рассмотрим матрицу $P = P(G)$ переходных вероятностей случайного блуждания по графу G:

$$P_{jk} = \begin{cases} 1/d_j, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Собственные значения P таковы, что:

$$1 = \chi_1 \geq \chi_2 \ldots \geq \chi_n \geq -1.$$

Граф G обладает двудольными компонентами связности тогда и только тогда, когда случайное блуждание является цепью Маркова, с непустым множеством периодических состояний. В случае связного графа G параметр $\chi_n + 1$ показывает насколько соответствующая цепь Маркова близка к периодической.

Пусть $\mathcal{R}^-_\gamma$ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 5. Спектральной зазор $1 + \chi_n(G) \geq \gamma$ и $\min\limits_j d_j \geq \gamma |VG|$.

Заметим, что $P = D^{-1}Q - I$, где I — единичная $n \times n$ матрица. Поэтому (при условии обратимости соответствующих матриц):

$$\frac{1}{q(G)} = \|Q^{-1}\|_2 \leq \|D^{-1}\|_2 \|(P+I)^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{(1 + \chi_n(G) \min\limits_j d_j},$$

$$\frac{1}{1 + \chi_n(G)} = \|(P+I)^{-1}\|_2 \leq \|D\|_2 \|Q^{-1}\|_2 \leq \frac{n}{q(G)}.$$

Используя (3.46), мы получаем, что для любого $\gamma_0 > 0$

$$\mathcal{R}^-_{\gamma_0} \subset \mathcal{Q}_{\gamma_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}_{\gamma_0} \subset \mathcal{R}^-_{\gamma_1}, \tag{3.48}$$

где $\gamma_1 > 0$ зависит только от γ_0.

В работе [40] вводится следующий параметр:

$$\psi(G) = \min_{\emptyset \neq S \subseteq VG} \frac{2\epsilon_b(G[S]) + |\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|}, \tag{3.49}$$

где $G[S]$ — подграф G, индуцированный на вершинах из $S \subset VG$, а параметр $\epsilon_b(G)$ (реберная недвудольность) — минимальное число ребер графа G, удаление которых приводит к двудольному. Параметр $\psi(G)$ можно полноправно считать аналогом константы Чигера $i(G)$, рассматриваемой в п. 3.1.1, поскольку выполняются следующие неравенства (см. [40]):

$$q(G) \leq 2\psi(G) \leq \frac{4}{n}\epsilon_b(G), \tag{3.50a}$$

$$\psi(G) \leq \sqrt{q(G)(2\max_j d_j - q(G))}. \tag{3.50b}$$

Пусть Ψ_γ — множество простых графов G, обладающих следующим свойством:

Свойство 6. Параметр $\psi(G) \geq \gamma|VG|$.

Комбинируя (3.50) с (3.48), мы получаем, следующее утверждение:

Предложение 7. *Для любого $\gamma_0 > 0$*

$$\mathcal{Q}_{\gamma_0} \cup \Psi_{\gamma_0} \cup \mathcal{R}^-_{\gamma_0} \subset \mathcal{Q}_\gamma \cap \Psi_\gamma \cap \mathcal{R}^-_\gamma,$$

где $\gamma > 0$ зависит только от γ_0.

Графы, удовлетворяющие Свойствам 4-6, существенно отличаются от двудольных. Назовем $\mathcal{Q}_\gamma \cap \Psi_\gamma \cap \mathcal{M}^-_\gamma$ классом γ-недвудольных графов.

3.2.2. Примеры

Утверждение 6.

$$\begin{array}{ccc} \textit{если } \min\limits_j d_j \geq \sigma|VG| & & \textit{то граф } G \textit{ является } \gamma\textit{-недвудольным} \\ & \Longrightarrow & \\ \textit{для некоторого } \sigma > 1/2, & & \textit{для некоторого } \gamma = \gamma(\sigma) > 0. \end{array}$$

Доказательство Утверждения 6. Так как двудольный граф с k вершинами не может иметь более $k^2/4$ ребер, получаем, что:

$$\epsilon_b(G[S]) \geq |EG[S]| - |S|^2/4 \quad \text{для любого } \emptyset \neq S \subseteq VG,$$

где $EG[S]$ обозначает множество ребер графа $G[S]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2\epsilon_b(G[S]) + |\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|} &\geq \frac{2|EG[S]) - |S|^2/2 + |\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|} \geq \\ &\geq \frac{|S| \min\limits_j d_j - |S|^2/2}{|S|} \geq (\sigma - 1/2)|VG|. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Комбинируя (3.51) и Предложение 7, мы получаем Утверждение 6. ∎

Замечание. Условие $\min\limits_j d_j \geq |VG|/2$ является недостаточным для того, чтобы граф был γ-недвудольным. Контрпримером является полный двудольный граф $K_{n,n}$.

Пример 4 (см. Пример 2)**.** Пусть K_n — полный граф с n вершинами. Рассмотрим $G_n^{(4)}$, который определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} VG_n^{(4)} &= VK_n \cup \{v_{n+1}\}, \\ EG_n^{(4)} &= EK_n \cup \{v_n, v_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Для $G = G_n^{(4)}$ имеем, что $\min\limits_j d_j = 1$. Поэтому семейство $\{G_n^{(4)}\}$ не удовлетворяет Свойству 5 (и, следовательно, Свойствам 4, 6). Тем не менее, можно показать, спектральный зазор $1 + \chi_n(G_n^{(4)}) \geq 1/2$ при $n \geq 6$.

Замечание. Тем самым, получаем, что оба условия Свойства 5 являются существенными.

Пример 5 (см. Пример 3 с дополнительным ограничением на граф G_0)**.** Пусть G_0 — связный простой недвудольный граф с $m > 1$ вершинами. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — некоторые натуральные числа. Определим $G_n^{(5)}$ следующим образом:

$$VG_n^{(5)} = \{v_j^i : \ i = 1, \ldots, nc_j, \ j = 1, \ldots, m\},$$
$$\{v_{j_1}^{i_1}, v_{j_2}^{i_2}\} \in EG_n^{(5)} \Longleftrightarrow \{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in EG_0.$$

Оценим параметр $\psi(G_n^{(5)})$. Пусть $S \subseteq VG_n^{(5)}$.

Если $|S| \leq |VG_n^{(5)}|/2$, то пользуясь оценками Примера 3, имеем, что:

$$\mathrm{cut}_{G_n^{(5)}}(S) \geq \gamma |VG_n^{(5)}||S| \tag{3.52}$$

для некоторого $\gamma > 0$, зависящего только от исходного графа G_0 и констант $c_1, \ldots, c_m$.

Пусть подмножество $V \subseteq VG_0$ такое, что

$$v_j \in V \Longleftrightarrow |\left\{v_j^i : v_j^i \in S\right\}| \geq \frac{c_j n}{2}.$$

Если $|S| > |VG_n^{(5)}|/2$, то множество V не пусто.

- Случай 1. $V = VG$. Рассмотрим нечетный цикл в G_0. Тогда этому соответствует по крайней мере $(c_0 n/2)^2$ попарно не пересекающихся по ребрам нечетных циклов в $G[S]$, где $c_0 = \min\limits_{1 \leq j \leq m} c_j$. Поэтому

$$\epsilon_b(G[S]) \geq c_0^2 n^2/4 \geq \frac{c_0^2}{4C^2}|VG_n^{(5)}||S|, \quad C = \sum_{j=1}^{m} c_j. \tag{3.53}$$

- Случай 2. $V \neq VG$. Тогда существуют две соседние вершины $v_j \in V$ и $v_k \notin V$. Оценивая число ребер в $\mathrm{cut}_{G_n^{(3)}}(S)(S)$, соответствующих этим вершинам, получаем, что

$$\mathrm{cut}_{G_n^{(5)}}(S) \geq (c_0 n/2)^2 \geq \frac{c_0^2}{4C^2}|VG_n^{(5)}||S|. \tag{3.54}$$

Комбинируя определение (3.49), формулы (3.52)-(3.54) и Предложение 7, получаем, что семейство $\left\{VG_n^{(5)}\right\}$ удовлетворяет Свойствам 4-6 с $\gamma > 0$, зависящим только от исходного графа G_0 и констант $c_1, \ldots, c_m$.

Отметим также, что Пример 5 может быть модифицирован таким образом, что константы $c_1, \ldots, c_m > 0$ необязательно являются натуральными числами. Мы предположили это только для простоты доказательства.

Замечание. Комбинируя Пример 5, оценки (3.47) и Предложение 7, можно получить, что Свойства 4-6 выполняются для большого числа различных примеров классов графов.

3.2.3. Нечетные пути

Пусть G — граф с множеством вершин VG и множеством ререр EG. Напомним, что путь в графе G — это последовательность вершин из VG таких, что две любые последовательные вершины соединены хотя бы одним ребром из EG. Число звеньев в пути называется его длиной. Простой путь — это путь без самопересечений. Путь, оба конца которого принадлежит $S \subseteq VG$, называется S-путем. Данный подпараграф посвящен результатам аналогичным тем, что рассматривались в п. 3.1.4, но для путей нечетной длины.

В работах [60], [80] показано что, существует связь между наибольшим числом попарно не пересекающихся нечетных путей (по вершинам или ребрам) нечетной длины и наименьшим разрезом (вершинным или реберным), пересекающим все такие пути. Более того, в [47] был получен аналог вершинного варианта теоремы Менгера:

Теорема (результат из [47])**.** *Пусть G — простой неориентированный граф. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого подмножества вершин $S \subseteq VG$ выполняется ровно одно из следующих утверждений:*

1. *существует k простых S-путей нечетной длины попарно не пересекающихся по вершинам;*

2. *существует такое множество вершин $X \subset VG$, мощности не более чем $2k - 2$, что любой простой S-путь нечетной длины содержит хотя бы одну вершину из X.*

Аналогичный факт о числе непересекающихся по ребрам нечетных S-путей приведен в [48] для случая планарного графа G с по крайней мере двумя нечетными гранями. Аналог реберного варианта теоремы Менгера (для нечетных путей) в случае общего графа до сих пор не был получен в литературе.

Для случая γ-недвудольного графа G мы покажем, что существует достаточно большое количество попарно не пересекающихся по ребрам нечетных S-путей, длина которых ограничена не зависящей от n константой.

Предложение 8. *Пусть G — простой γ-недвудольный граф с n вершинами для некоторого $\gamma > 0$. Тогда для любого подмножества $\emptyset \neq S \subseteq VG$ существует не менее $\mu n|S|$ попарно не имеющих общих ребер S-путей нечетной длины, не превосходящей H, причем константы $\mu, H > 0$ зависят только от γ.*

Замечание. Отметим, что для простоты мы разрешаем использовать пути с самопересечениями. Аналогичный факт верен и для путей без самопересечений, но при дополнительном условии, что n достаточно большое.

Доказательство Предложения 8. Покажем сначала, что существует нечетный путь ограниченной длины:

Утверждение 7. *Пусть G' — простой граф с n вершинами, причем алгебраическая недвудольность $q(G') \geq \gamma n/3$. Тогда для любой вершины $s \in VG'$ существует такой нечетный s-путь в G', что любая вершина встречается в пути не более двух раз, а длина не превосходит некоторой положительной константы $l_{\gamma/3}$, зависящей только от γ.*

Действительно, так как $q(G') > 0$, то любая компонента связности G' недвудольная. Тогда существует путь от s до нечетного цикла и обратно. Выберем кратчайший нечетный s-путь. Заметим, что любая вершина входит в путь не более двух раз, иначе можно было бы построить более короткий путь нечетной длины.

Согласно (3.46), степень любой вершины в G' не менее $\gamma n/3$. Поэтому в любого наборе, состоящем из не менее чем $3/\gamma$ вершин, найдутся две, имеющие общую смежную вершину. Тогда получаем, что длина кратчайшего нечетного s-пути ограничена константой, зависящей только от γ (иначе путь можно было бы сократить, рассмотрев набор вершин, находящихся в пути на четном большем 2 расстоянии друг от друга).

Аналогично доказательству Утверждения 5 (см. п. 3.1.4), используя Утверждение 7, получаем:

Утверждение 8. *Пусть G' — простой граф с n вершинами, причем алгебраическая недвудольность $q(G') \geq 2\gamma n/3$. Тогда для любого подмножества вершин $S \subseteq VG'$ существуют по крайней мере $\frac{\min\{|S|/2, \gamma n/3\}}{l_{\gamma/3}+1}$ нечетных попарно не имеющих общих вершин S-путей в G' таких, что любая вершина встречается в каждом пути не более двух раз, а длина не превосходит $l_{\gamma/3}$.*

Пока алгебраическая связность остается по крайней мере $2\gamma n/3$, используя Утверждение 5, мы выбираем по крайней мере $\frac{\min\{|S|/2, \gamma n/3\}}{l_{\gamma/3}+1}$ нечетных S-путей, запоминаем их и удаляем все ребра, входящие в выбранные пути. Обозначим G_k — граф, получающийся после k таких шагов. Так как на каждом шаге выбираются попарно не пересекающиеся по вершинам пути такие, что любая вершина встречается в каждом пути не более двух раз, то степень любой вершины уменьшилась не более чем на $4k$. Доказательство Предложения 8 завершается аналогично доказательству Предложения 5. ■

3.2.4. Свойства беззнаковой матрицы Лапласа

Для $s \in \mathbb{R}$ обозначим D^s следующую $n \times n$ матрицу:

$$(D^s)_{jk} = \begin{cases} d_j^s, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases} \tag{3.55}$$

где d_j — степень вершины v_j графа G.

Предположим, что граф G является γ-недвудольным для некоторого $\gamma > 0$. Далее в этом подпараграфе мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ.

Предложение 9. *Пусть G — простой γ-недвудольный граф с n вершинами для некоторого $\gamma > 0$. Тогда:*

$$\gamma n \le d_j \le n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.56}$$

$$\gamma^n n^n \le \det Q \le n^n, \tag{3.57}$$

$$(Q^{-1})_{jk} = \begin{cases} d_j^{-1} + O(n^{-2}), & \text{если } j = k, \\ O(n^{-2}), & \text{если } j \ne k, \end{cases} \tag{3.58}$$

где Q — беззнаковая матрица Лапласа графа G;

$$\text{матрица } D^{-1/2} Q D^{-1/2} \text{ принадлежит классу } \mathcal{M}_{a,b}, \tag{3.59}$$

где D^s определяется в (3.55), класс $\mathcal{M}_{a,b}$ определен в §2.1 (см. (2.4)), причем константы $a, b > 0$ зависят только от γ; при $n \ge n_0$

$$\det Q = O(n) \det Q_1, \quad \det Q_1 = O(n^{-1}) \det Q, \tag{3.60}$$

где $n_0 > 0$ зависит только от γ, $Q_1 = Q(G_1)$, а граф G_1 получается из G посредством удаления одной из вершин и всех смежных ребер.

Доказательство Предложения 9 ничем не отличается от доказательства Предложения 6 (см. п. 3.1.5).

Формулы (3.56) - (3.60) будут активно использоваться в Главе 4 при получении асимптотических формул для числа подграфов с заданной последовательностью вершин.

3.3. Сильная перемешиваемость и существенная недвудольность случайного графа

Рассмотрим модель случайного графа $G(n, p)$, в которой каждое возможное ребро графа с n вершинами присутствует в графе независимо с вероятностью $0 < p < 1$:

$$\forall_{1 \le i < j \le n} \Pr(\{v_i, v_j\} \in EG) = p, \quad 0 < p < 1,$$
$$\text{(независимо для каждой пары } \{i, j\}).$$

Эту модель принято называть моделью случайного графа Эрдеша–Реньи. Тем не менее, отметим, что одновременно с работой [38] классиков современной комбинаторики и теории вероятностей Эрдеша П. и Реньи А. данная модель была рассмотрена независимо Гилбертом Э. в [49].

В данном параграфе мы доказываем, что случайный граф в модели $G(n, p)$ является одновременно и γ-перемешивающим, и γ-недвудольным с вероятностью, близкой к 1.

Пусть ξ — случайная величина, принадлежащая биномиальному распределению $B(K, p)$:

$$\Pr(\xi = k) = \frac{K!}{k!(K-k)!} p^k (1-p)^{K-k}, \quad 0 < p < 1, \ K \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$\Pr(\xi \le \alpha K) \le \beta_1^{-K} \tag{3.61}$$

для некоторых $\alpha > 0$, $\beta_1 > 1$, зависящих только от p. Это следует, например, из следующей оценки: для $1 \le k \le \frac{p(K+1)}{p+2}$

$$\frac{\Pr(\xi = k)}{\Pr(\xi = k-1)} = \frac{K-k+1}{k} \frac{p}{1-p} \ge \frac{\frac{2}{p+2}(K+1)}{\frac{p}{p+2}(K+1)} \frac{p}{1-p} \ge 2.$$

Пусть G обозначает случайный граф (в модели Эрдеша–Реньи) с n вершинами. Применяя (3.61) для $\emptyset = S \subseteq VG$, мы находим, что:

- если $|S| \le n/2$, тогда

$$\Pr\Big(|\mathrm{cut}_G(S)| \le \alpha |S|(n - |S|)\Big) \le \beta_1^{-|S|(n-|S|)} \le \beta_1^{-|S|n/2}, \tag{3.62}$$

  где $\mathrm{cut}_G(S)$ обозначает множество ребер, соединяющих вершину из S и вершину не из S;

- если $|S| \geq n/2 \geq n/4+1$, тогда

$$\Pr\Big(|2EG[S]| \leq \alpha|S|(|S|-1)\Big) \leq \beta_1^{-|S|(|S|-1)} \leq \beta_1^{-|S|n/4}, \tag{3.63}$$

  где $EG[S]$ — множество ребер подграфа $G[S]$ графа G, индуцированного на вершинах $S \subseteq VG$.

Используя (3.62), оценим вероятность того, что константа Чигера $i(G)$ меньше αn:

$$\begin{gathered}\Pr\Big(i(G) \leq \alpha n\Big) \leq \sum_{0<|S|\leq \frac{n}{2}} \Pr\Big(|\mathrm{cut}_G(S)| \leq \alpha n|S|\Big) \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n/2}\sum_{|S|=k} \beta_1^{-|S|n/2} \leq \sum_{k=1}^{n/2} n^k \beta_1^{-kn/2} \leq \beta_2^{-n}\end{gathered} \tag{3.64}$$

для некоторого $\beta_2 > 1$, зависящего только от p.

Применяя (3.63), мы получаем, что:

$$\begin{gathered}\Pr\Big(2\epsilon_b(G) \leq \alpha n^2\Big) \leq \sum_{S\subseteq VG,\ |S|\geq \frac{n}{2}} \Pr\Big(|2EG[S]| \leq \alpha n^2\Big) \leq \\ \leq \sum_{S\subseteq VG,\ |S|\geq \frac{n}{2}} \Pr\Big(|2EG[S]| \leq \alpha|S|(|S|-1)\Big) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n/2}\sum_{|A|=n-k} \beta_1^{-|A|n/4} \leq \sum_{k=0}^{n/2} n^k \beta_1^{-(n-k)n/4} \leq \beta_3^{-n^2}\end{gathered} \tag{3.65}$$

для некоторого $\beta_3 > 1$, зависящего только от p, где $\epsilon_b(G)$ — минимальное число ребер графа G, удаление которых приводит к двудольному.

Используя (3.65) для графа $G[S]$ на месте G, находим, что для $|S| \geq n/2$

$$\Pr\Big(2\epsilon_b(G[S]) \leq \alpha|S|^2\Big) \leq \beta_3^{-|S|^2} \leq \beta_3^{-|S|n/2} \tag{3.66}$$

Комбинируя (3.62) и (3.66), получаем, что для $\emptyset \neq S \subseteq VG$

$$\Pr\Big(\frac{2\epsilon_b(G[S]) + |\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|} \leq \alpha n/2\Big) \leq \beta_4^{-|S|n} \tag{3.67}$$

для некоторого $\beta_4 > 1$, зависящего от p. В результате находим следующую оценку параметра $\psi(G)$, определенного в (3.49):

$$\begin{aligned} &\Pr\Big(\psi(G) \le \alpha n/2\Big) \le \\ &\le \sum_{S \subseteq VG,\ S \ne \emptyset} \Pr\Big(\frac{2\epsilon_b(G[S]) + |\mathrm{cut}_G(S)|}{|S|} \le \alpha n/2\Big) \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n} n^k \left(\beta_3^{-n}\right)^k \le \beta_4^{-n} \end{aligned} \tag{3.68}$$

для некоторого $\beta_4 > 1$, зависящего только от p.

Комбинируя оценки (3.64), (3.68), и Предложения 4, 7, мы получаем следующее предложение:

Предложение 10. *Вероятность того, что случайный граф в модели $G(n,p)$ является одновременно и γ-перемешивающим, и γ-недвудольным, не менее $1 - \beta^{-n}$ для некоторых констант $\gamma > 0$, $\beta > 1$, зависящих только от p.*

3.4. Комбинаторный смысл миноров матрицы Лапласа и определителя Q-матрицы

Ориентированным корневым деревом с корнем v называется связный ориентированный граф T такой, что $v \in VT$ не имеет выходящих ребер, а любая другая вершина имеет ровно одно выходящее ребро. Другими словами, T — дерево, у которого все ребра ориентированы в сторону v.

В работе [87] была доказана следующая теорема:

Теорема 2 (результат из [87])**.** *Пусть w_{jk} $(1 \le j,k \le n,\ j \ne k)$ заданы произвольно. Пусть $n \times n$ матрица A определена следующим образом:*

$$A_{jk} = \begin{cases} -w_{jk}, & \textit{если } j \ne k, \\ \sum_{r \ne j} w_{jr}, & \textit{если } k = j \end{cases}, \tag{3.69}$$

с суммой по $1 \le r \le n$ и $r \ne j$. Для любого r, $1 \le r \le n$, пусть M_r обозначает матрицу, получающийся из A удалением r-го столбца и r-ой *строки. Тогда*

$$\det M_r = \sum_T \prod_{(v_j,v_k)\in ET} w_{jk}, \tag{3.70}$$

где сумма берется по всем корневым ориентированным деревьям T с множеством вершин $VT = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и корнем v_r.

Рассмотрим неориентированный простой граф G с множеством вершин $VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Пусть $w_{jk} = 1$ для $\{v_j, v_k\}$ и $w_{jk} = 0$ для остальных пар. Так как для любого остовного дерева T графа G и любой вершины $v_r \in VG$ существует ровно одна ориентация ребер T такая, что получается ориентированное корневое дерево с корнем v_r, то

$$\det L^{(r)} = t(G),$$

где $t(G)$ — число остовных деревьев G, а матрица $L^{(r)}$ получается удалением r-го столбца и r-ой строки из матрицы Лапласа L графа G. Этот результат известен как матричная теорема о деревьях и был впервые получен в [61].

Так как все главные миноры матрицы Лапласа равны, то

$$\frac{\det \hat{L}}{n} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det L^{(1)} + \ldots + \det L^{(n)} = n\, t(G), \tag{3.71}$$

где матрица $\hat{L}$ определена в (3.31). Комбинируя (3.37), (3.38) и (3.71), получаем следующее следствие («устойчивость» числа остовных деревьев):

Следствие 2. *Пусть G — простой γ-недвудольный граф с n вершинами для некоторого $\gamma > 0$. Тогда:*

$$t(G') = O(1)\, t(G) \quad \text{и} \quad t(G) = O(1)\, t(G')$$

для любого графа G' такого, что $VG' = VG$, $EG' \subset EG$, разность числа ребер $|EG| - |EG'| = O(n)$ и любая вершина $v \in VG$ имеет не более $\gamma^2 n/8$ ребер в $EG \setminus EG'$; при $n \geq n_0$

$$t(G) = O(n)\, t(G_1) \quad \text{и} \quad t(G_1) = O(n^{-1})\, t(G),$$

где $n_0 > 0$ зависит только от γ, граф G_1 получается из G посредством удаления одной из вершин и всех смежных ребер.

Мы говорим, что граф (или подграф), обладающим каким-либо свойством, минимальный , если при удалении любого ребра граф перестает обладать этим свойством. Например, дерево – это минимальный связный граф, а остовное дерево — это минимальный связный подграф, содержащий все вершины графа.

Утверждение 9. *Минимальный недвудольный граф — это граф, у которого каждая компонента связности содержит ровно один цикл, длина которого нечетна.*

В работе [30] показано, что

$$\det Q(G) = \sum_{H} 4^{\mathrm{con}(H)}, \tag{3.72}$$

где суммирование производится по минимальным недвудольным подграфам графа G, содержащим все вершины, Q — это беззнаковая матрица Лапласа графа G, $\mathrm{con}(H)$ обозначает число компонент связности подграфа H. Формулу (3.72) можно считать аналогом матричной теоремы о деревьях в Q-теории.

В литературе известно также много других интересных результатов о коэффициентах характеристических многочленов различных матриц, ассоциированных с графами. В связи с этим, см., например, [13], [28] и ссылки приведенные там.

Глава 4.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД НА ПРИМЕРЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ

4.1. Эйлеровы ориентации

4.1.1. Асимптотическая формула

В этом параграфе приводится доказательство асимптотической формулы для числа различных эйлеровых ориентаций $EO(G)$ графа G, принадлежащему классу γ-перемешивающих графов. Данный класс графов подробно обсуждается в §3.1.

Теорема 3. *Пусть G — неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, имеющими четную степень. Пусть для некоторого фиксированного $\gamma > 0$ граф G является γ-перемешивающим. Тогда:*

$$
\begin{aligned}
EO(G) &= (1 + \delta_{eo}(G)) \left(e^{K_{eo}} 2^{|EG| + \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(G)}} \right), \\
K_{eo} &= -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} + \frac{1}{d_k + 1} \right)^2,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где d_j — степень вершины v_j, $t(G)$ — число остовных деревьев G (эффективно вычисляется с помощью (3.71)), и для любого $\varepsilon > 0$

$$
|\delta_{eo}(G)| \le C_{eo}\, n^{-1/2+\varepsilon}, \tag{4.2}
$$

где константа $C_{eo} > 0$ зависит только от γ и ε.

Замечание. Для случая полного графа имеем, что:

$$\lambda_2(K_n) = n, \quad |EK_n| = \frac{n(n-1)}{2}, \quad t(K_n) = n^{n-2},$$

$$K_{eo} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EK_n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)^2 = -1/2 + O(n^{-1}).$$

Результат Теоремы 3 для случая полного графа совпадает с формулой из [67], приведенной в п. 1.2.3 (формула (1.4)).

Для доказательства Теоремы 3 мы используем представление числа эйлеровых ориентаций в виде интеграла (см. формулу (1.5)):

$$EO(G) = 2^{|EG|} \pi^{-n} S, \qquad S = \int\limits_{U_n(\pi/2)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \, d\vec{\xi}, \tag{4.3}$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$ и

$$U_n(\rho) = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\vec{\xi}\|_\infty = \max_j |\xi_j| \le \rho\}.$$

Зафиксируем некоторую небольшую константу $\varepsilon > 0$. Мы можем корректно определить:

$$\begin{aligned} V_0 = \{\vec{\xi} \in U_n(\pi/2) : \ |\xi_j - \bar{\xi}|_\pi \le n^{-1/2+\varepsilon} \text{ для любого } 1 \le j \le n\}, \\ |x - y|_\pi = \min_{l \in \mathbb{Z}} |x - y + \pi l|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Замечание. Заметим, что если все ξ_j лежат в одной половине окружности, получающейся отождествлением концов отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, то есть если

$$\exists_{a \in [-\pi/2, \pi/2]} \ \ |\xi_j - a|_\pi < \pi/2 \text{ для любого } 1 \le j \le n\}, \tag{4.5}$$

то тогда можно корректно определить $\bar{\xi}$ — среднее ξ_j по окружности:

$$\bar{\xi} = \left(a + \frac{(\xi_1 - a)_\pi + (\xi_2 - a)_\pi + \ldots + (\xi_n - a)_\pi}{n} \right)_\pi,$$

$$x_\pi = x + \pi l \text{ где } l \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x_\pi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Кроме того, выбор a, удовлетворяющего (4.5) не влияет на значение $\bar{\xi}$.

Пусть S_0 — вклад в S области $\vec{\xi} \in V_0$:

$$S_0 = \int\limits_{V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \, d\vec{\xi}, \tag{4.6}$$

Доказательство Теоремы 3 строится следующим образом: сначала мы оценим значение S_0, в основном используя результаты Главы 2, затем покажем, что остальные части интеграла пренебрежимо малы.

4.1.2. Основная часть интеграла

Далее в этом параграфе везде предполагается, что предположения Теоремы 3 выполнены. Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от γ и ε.

Пусть $\mathcal{L}$ — ортогональное дополнение к вектору $(1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Так как подынтегральное выражение в (4.6) и область V_0 являются инвариантными относительно равномерного сдвига всех $\xi_j \bmod \pi$, можно зафиксировать $\bar{\xi} = 0$ и умножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора $\frac{1}{n}(1, \ldots, 1)^T$. Получаем:

$$S_0 = \pi n^{1/2} \int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \, d\mathcal{L}.$$

Используя разложение $\cos \Delta_{jk}$ в ряд Тэйлора, мы находим, что для $\vec{\xi} \in V_0$

$$\begin{aligned} &\prod_{(v_j, v_k) \in EG} \cos \Delta_{jk} = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{(v_j, v_k) \in EG} \Delta_{jk}^2 - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + O(n^{-1+6\varepsilon}) \right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Пусть

$$R_{eo}(\vec{\xi}) = -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4.$$

Заметим также, что:

$$\sum_{(v_j, v_k) \in EG} \Delta_{jk}^2 = \vec{\xi}^T L \vec{\xi},$$

где L – матрица Лапласа графа G (см. п. 3.1.1). Получаем, что:

$$S_0 = \big(1 + O(n^{-1+6\varepsilon})\big)\, \pi n^{1/2} \int\limits_{\mathcal{L}\cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi} + R_{eo}(\vec{\xi})}\, d\mathcal{L}. \qquad (4.8)$$

Обозначим $\vec{\xi^{\mathcal{L}}}$ ортогональную проекцию вектора $\vec{\xi}$ на пространство $\mathcal{L}$:

$$\vec{\xi^{\mathcal{L}}} = \vec{\xi} - \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}(1, 1, \ldots, 1)^T.$$

Заметим, что

$$L\vec{\xi} = L\vec{\xi^{\mathcal{L}}}, \qquad R_{eo}(\vec{\xi}) = R_{eo}(\vec{\xi^{\mathcal{L}}}). \qquad (4.9)$$

Поэтому получаем, что:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{L}\cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi} + R_{eo}(\vec{\xi})}\, d\mathcal{L} &= \int\limits_{\mathcal{L}\cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi} + R_{eo}(\vec{\xi})}\, d\mathcal{L} = \\ &= \int\limits_{V_P} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi} + R_{eo}(\vec{\xi})}\, d\vec{\xi} \Bigg/ \int\limits_{-n^{-1/2+\varepsilon}}^{n^{-1/2+\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}nx^2} dx, \end{aligned} \qquad (4.10)$$

где $\hat{L} = L + J$, а J обозначает $n \times n$ матрицу, все элементы которой равны 1,

$$V_P = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \right| \le n^{-1/2+\varepsilon},\ \vec{\xi^{\mathcal{L}}} \in \mathcal{L} \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon}) \right\}.$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} \|\vec{\xi}\|_\infty &\le \|\vec{\xi^{\mathcal{L}}}\|_\infty + \|\vec{\xi} - \vec{\xi^{\mathcal{L}}}\|_\infty, \\ \|\vec{\xi^{\mathcal{L}}}\|_\infty &\le \|\vec{\xi}\|_\infty + \|\vec{\xi^{\mathcal{L}}} - \vec{\xi})\|_\infty, \end{aligned}$$

находим, что:

$$U_n(\frac{1}{2}n^{-1/2+\varepsilon}) \subseteq V_P \subseteq U_n(2n^{-1/2+\varepsilon}). \qquad (4.11)$$

Кроме того, для некоторого $c > 0$

$$\int\limits_{-n^{-1/2+\varepsilon}}^{n^{-1/2+\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}nx^2} dx = (1 + O(\exp(-cn^{2\varepsilon})))\sqrt{2\pi/n}. \qquad (4.12)$$

Комбинируя (4.8), (4.10) и (4.12), получаем, что

$$S_0 = \left(1 + O(n^{-1+6\varepsilon})\right) \frac{\sqrt{\pi} n}{\sqrt{2}} \int\limits_{V_P} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L} \vec{\xi} + R_{eo}(\vec{\xi})}\, d\vec{\xi}.$$

Определим $\vec{\xi}(\vec{\theta}) = (\xi_1(\vec{\theta}), \xi_2(\vec{\theta}), \ldots, \xi_n(\vec{\theta}))$ следующим образом:

$$\xi_k = \xi_k(\vec{\theta}) = \frac{\theta_k}{\sqrt{(d_k+1)/2}}.$$

Пусть

$$A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{(d_j+1)(d_k+1)}} \hat{L}_{jk}, \quad \vec{\theta}^T A \vec{\theta} = \frac{1}{2} \vec{\xi}(\vec{\theta})^T \hat{L} \vec{\xi}(\vec{\theta}),$$
$$P_{eo}(\vec{\theta}) = R_{eo}(\vec{\xi}(\vec{\theta})), \quad \Omega = \left\{ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^n : \vec{\xi}(\vec{\theta}) \in V_P \right\}.$$

Тогда получаем:

$$S_0 = \left(1 + O(n^{-1+6\varepsilon})\right) \frac{\sqrt{\pi} n}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{eo}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(d_j+1)/2}}.$$

Используя Предложение 6 (см. оценки (3.33)), а также (4.11), находим, что:

$$U_n(r_1 n^{\varepsilon}) \subseteq \Omega \subseteq U_n(r_2 n^{\varepsilon}) \tag{4.13}$$

для некоторых $r_1, r_2 > 0$, зависящих только от γ, и

$$h_1(P_{eo}) = O(1), \tag{4.14}$$

где функция высоты полинома h_1 определена в п. 2.3.1 (см. (2.23)).

Комбинируя (4.13), (4.14), Предложение 6 (см. формулы (3.33), (3.36)), Теорему 1 и Следствие 1, получаем, что:

$$\int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{eo}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} = \left(1 + O(n^{-1/2+20\varepsilon})\right) e^{\chi_A(P_{eo})} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}}\, d\vec{\theta},$$

где функция χ_A определена в п. 2.3.2 (см. (2.32)), причем

$$\begin{aligned} \chi_A(P_{eo}) &= -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \chi_A \left(\frac{\theta_j}{\sqrt{(d_j+1)/2}} - \frac{\theta_k}{\sqrt{(d_k+1)/2}} \right)^4 = \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(3 \left(\frac{1}{d_j+1} + \frac{1}{d_k+1} \right)^2 + O(n^{-3}) \right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}} d\vec{\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(d_j+1)/2}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}} d\vec{\xi} = (2\pi)^{n/2} \Big/ \sqrt{\det \hat{L}}, \qquad (4.16)$$

и выбирая достаточно маленькое ε, мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 10. *При выполненных предположениях Теоремы 3,*

$$S_0 = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) e^{K_{eo}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}},$$

$$K_{eo} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j,v_k\}\in EG} \left(\frac{1}{d_j+1} + \frac{1}{d_k+1} \right)^2.$$

Кроме того, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 6. *Пусть G — неориентированный простой граф с множеством врешин $VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер EG. Пусть для некоторого фиксированного $\gamma > 0$ граф G является γ-перемешивающим. Тогда:*

$$\int\limits_{U_n(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j,v_k\}\in EG} \Delta_{jk}^2 \right) d\vec{\xi} = O(1) \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}}; \qquad (4.17)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{L}\setminus U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j,v_k\}\in EG} \Delta_{jk}^2 \right) d\mathcal{L} &= \\ &= O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n^{1/2}}{\sqrt{\det \hat{L}}} \end{aligned} \qquad (4.18)$$

причем константа $c > 0$ зависит только от γ и ε.

Доказательство Леммы 6. Так как $\mathcal{L}$ — собственное подпространство L и $\hat{L}$,

$$\int\limits_{\mathcal{L}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}} d\mathcal{L} = \int\limits_{\mathcal{L}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi}} d\mathcal{L} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{1/2} \Big/ \sqrt{\det \hat{L}}.$$

Диагональ куба $U_n(\pi/2)$ равна $\pi n^{1/2}$. Поэтому, используя (4.9), находим:

$$\int\limits_{U_n(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\Delta_{jk}^2\right)d\vec{\xi} = \int\limits_{U_n(\pi/2)} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi}}d\vec{\xi} \leq$$

$$\leq \pi n^{1/2}\int\limits_{\mathcal{L}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi}}d\mathcal{L} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}n}{\sqrt{\det\hat{L}}}.$$

Согласно Предложению 6 (см. формулы (3.33), (3.36)) и оценке (2.38), имеем, что:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus U_n(\frac{1}{2}n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}}d\vec{\xi} = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}}d\vec{\xi}$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ и ε. Используя (4.9), (4.16) и факт $U_n(\frac{1}{2}n^{-1/2+\varepsilon}) \subseteq \{\xi\in\mathbb{R}^n : \xi^{\mathcal{L}} \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\}$, получаем:

$$\int\limits_{\mathcal{L}\setminus U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\Delta_{jk}^2\right)d\mathcal{L} = \int\limits_{\mathcal{L}\setminus U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}}d\mathcal{L} =$$

$$= \int\limits_{\{\xi\in\mathbb{R}^n:\xi^{\mathcal{L}}\in\mathcal{L}\setminus U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}}d\vec{\xi}\Bigg/\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}nx^2}dx \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus U_n(\frac{1}{2}n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T \hat{L}\vec{\xi}}d\vec{\xi} = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right)\frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}n^{1/2}}{\sqrt{\det\hat{L}}}.$$

■

4.1.3. Оценка незначительных частей

Мы продолжаем предполагать, что предположения Теоремы 3 выполнены и использовать обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от γ и ε. Кроме того, в некоторых местах предполагается что n — достаточно большое: $n \geq n_{\min}$ для некоторого $n_{\min} = n_{\min}(\gamma,\varepsilon) > 0$. Для простоты, во всех таких местах используется одинаковое обозначение $n_{\min}$ (то есть $n_{\min}$ соответствует максимуму из всех ограничений).

Для оценки $S - S_0$ потребуется следующее неравенство:

$$|\cos x| \leq \exp(-x^2/2) \quad \text{при} \quad |x| \leq \frac{9\pi}{16}. \tag{4.19}$$

Напомним также, что согласно Предложению 6 (формула (3.34))

$$\gamma^n n^n \leq \det \hat{L} \leq n^n, \qquad \hat{L} = L + J, \tag{4.20}$$

где L — матрица Лапласа, J — матрица, все элементы которой равны 1.

Разделим промежуток $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \bmod \pi$ на 32 равных интервала $H_0, \dots, H_{31}$ таких, что $H_0 = [-\frac{\pi}{64}, \frac{\pi}{64}]$. Для каждого $j = 0, 1, \dots, 32$ определим область $W_j \subseteq U_n(\pi/2)$ как множество таких $\vec{\xi} \in U_n(\pi/2)$, у которых хотя бы $\frac{n}{32}$ координат лежат в H_j. Очевидно, что набор W_j покрывает $U_n(\pi/2)$. Заметим также, что W_j может быть отображен в W_0 путем равномерного сдвига всех $\xi_j \bmod \pi$. Это отображение не изменяет подынтегрального выражения (4.6), а также переводит V_0 в себя, поэтому:

$$\int\limits_{U_n(\pi/2)\setminus V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk}\, d\vec{\xi} \leq 32Z,$$

где

$$Z = \int\limits_{W_0 \setminus V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}|\, d\vec{\xi}.$$

Мы определим интегралы S_1, S_2, S_3 так, чтобы Z было ограничено их суммой, и покажем отдельно, что каждый из них пренебрежимо мал. Пусть

$$V_1 = \left\{ \vec{\theta} \in W_0 : |\xi_j| \geq \frac{\pi}{32} \text{ для менее чем } n^{\varepsilon} \text{ различных } j \right\},$$
$$V_2 = \left\{ \vec{\theta} \in V_1 : |\xi_j| \geq \frac{\pi}{16} \text{ для по крайней мере одного } j \right\}.$$

Наши три интеграла определяются следующим образом:

$$S_1 = \int\limits_{W_0 \setminus V_1} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| \, d\vec{\xi},$$
$$S_2 = \int\limits_{V_2} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| \, d\vec{\xi},$$
$$S_3 = \int\limits_{V_1 \setminus (V_2 \cup V_0)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| \, d\vec{\xi}.$$

Начнем с S_1. Мы воспользуемся Предложением 5 для множества вершин $\{v_j : |\xi_j| \le \frac{\pi}{64}\}$ и множества вершин $\{v_j : |\xi_j| \ge \frac{\pi}{32}\}$. В любом из выбранных путей длины, не превосходящей H, можно найти ребро $\{v_j, v_k\}$ такое, что

$$|\cos \Delta_{jk}| \le \cos \frac{\pi}{64H}.$$

Из определения области V_1 следует существование по крайней мере $\frac{\mu}{32} n^{1+\varepsilon}$ таких ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$. Учитывая (4.20), получаем:

$$S_1 \le \pi^n \left(\cos \frac{\pi}{64H}\right)^{\frac{\mu}{32} n^{1+\varepsilon}} = O\Big(\exp(-c n^{1+\varepsilon})\Big) \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}} \qquad (4.21)$$

для некоторой константы $c > 0$, зависящей только от γ и ε.

Для $1 \le r \le n^\varepsilon$ обозначим $S_2(r)$ вклад в S_2 тех $\vec{\xi} \in V_2$, для которых неравенство $|\xi_j| \ge \frac{\pi}{16}$ выполняется ровно для r индексов j. Если $|\xi_j| \le \frac{\pi}{32}$ и $|\xi_k| \ge \frac{\pi}{16}$ или наоборот, получаем:

$$|\cos \Delta_{jk}| \le \cos \frac{\pi}{32}.$$

Это выполняется по крайней мере для $r(\gamma n/2 - n^\varepsilon)$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$, так как степень любой вершины G не менее $\gamma n/2$ (см. (3.33)). Для ребер $\{v_j, v_k\}$ таких, что $|\xi_j|, |\xi_k| \le \frac{\pi}{16}$, мы используем неравенство (4.19). Пусть $\vec{\xi'} \in \mathbb{R}^{n-r}$. Получаем, что:

$$S_2(r) \le \pi^r \left(\cos \frac{\pi}{32}\right)^{r(\gamma n/2 - n^\varepsilon)} \sum_{G_r} \int\limits_{U_{n-r}(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG_r} \Delta_{jk}^2\right) d\vec{\xi'}, \quad (4.22)$$

где первая сумма по графам, получающимся из G посредством удаления всевозможных наборов из r вершин.

Используя Предложение 6 (оценки (3.37)) и оценку (3.6a), получаем, что при $n \geq n_{\min}$

$$\begin{aligned} \lambda_2(G_r) \geq \gamma n - n^{\varepsilon}, \qquad \det \hat{L} = O(c^r n^r) \det \hat{L}_r, \\ \hat{L}_r = \hat{L}(G_r) = L(G_r) + J_{n-r}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

где константа $c > 0$ зависит только от γ, граф G_r получается из графа G посредством удаления r вершин и всех смежных ребер, J_{n-r} — $(n-r)\times(n-r)$ матрица, все элементы которой равны 1. Согласно Лемме 6 (оценка (4.17)), находим, что для $n \geq n_{\min}$

$$\int\limits_{U_{n-r}(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG_r} \Delta_{jk}^2\right) d\vec{\xi'} = O(1)\frac{2^{\frac{n-r-1}{2}}\pi^{\frac{n-r+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}_r}}. \tag{4.24}$$

Комбинируя (4.22) с (4.23) и (4.24) и оценивая числом n^r выбор набора из r вершин для построения графа G_r, получаем, что для $n \geq n_{\min}$

$$S_2(r) = O(1)\, 2^{\frac{n-r-1}{2}} \pi^{\frac{n+r+1}{2}} n^{r+1} \left(\cos\frac{\pi}{32}\right)^{r(\gamma n/2 - n^{\varepsilon})} \frac{(cn)^{r/2}}{\sqrt{\det \hat{L}}}.$$

Суммируя по $0 \leq r \leq n^{\varepsilon}$, находим, что для $n \geq n_{\min}$

$$S_2 = \sum_{r=1}^{n^{\varepsilon}} S_2(r) = O(c_1^{-n})\, \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}}, \tag{4.25}$$

причем константа $c_1 > 1$ зависит только от γ и ε.

Заметим, что $\Delta_{jk} \leq \frac{\pi}{8}$ для $\vec{\xi} \in V_1 \setminus V_2$, поэтому

$$V_1 \setminus V_2 \subset V_3 = \left\{\vec{\xi} \in U_n(\pi/2) : |\xi_j - \bar{\xi}|_{\pi} \leq \pi/8\right\},$$

где $\bar{\xi}$ и $|\xi_j - \bar{\xi}|_{\pi}$ определяются аналогично (4.4). Так как подынтегральное выражение инвариантно относительно равномерного сдвига всех $\xi_j \bmod \pi$, а также V_0 и V_3 переходят в себя, мы можем зафиксировать $\bar{\xi} = 0$ и умножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора

$\frac{1}{n}(1, 1, \ldots, 1)^T$. Получаем, что:

$$S_3 \le \pi n^{1/2} \int\limits_{\mathcal{L}\cap U_n(\pi/8)\setminus V_0} \prod_{\{v_j, v_k\}\in EG} |\cos \Delta_{jk}|\, d\mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ обозначает ортогональное дополнение к $(1, 1, \ldots, 1)^T$. Используя неравенство (4.19), находим, что:

$$S_3 \le \pi n^{1/2} \int\limits_{\mathcal{L}\cap U_n(\pi/8)\setminus V_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j, v_k\}\in EG} \Delta_{jk}^2\right) d\mathcal{L}.$$

Принимая во внимание Лемму 6 (оценку (4.17)) получаем, что при $n \ge n_{\min}$

$$S_3 = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}} \tag{4.26}$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ. Комбинируя (4.21), (4.25) и (4.26), мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 11. *Пусть все предположения Теоремы 3 выполнены. Тогда при* $n \ge n_{\min}$

$$S - S_0 = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}}$$

для некоторого $c > 0$*, зависящего только от* γ *и* ε*.*

Теперь несложно завершить доказательство асимптотической формулы для числа эйлеровых ориентаций графа.

Доказательство Теоремы 3. Комбинируя Утверждения 10 и 11, мы получаем, что при $n \ge n_{\min}$

$$S = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) e^{K_{eo}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}}},$$
$$K_{eo} = -\frac{1}{4}\sum_{\{v_j, v_k\}\in EG} \left(\frac{1}{d_j+1} + \frac{1}{d_k+1}\right)^2.$$

Согласно матричной теореме о деревьях, см. §3.4 (формула (3.71)), имеем:

$$\det \hat{L} = n^2 t(G). \tag{4.27}$$

Подставляя значение S в (4.3), получаем (4.1) для случая $n \geq n_{\min}(\gamma, \varepsilon) > 0$ и достаточно маленького $\varepsilon > 0$.

Утверждение Теоремы 3 для больших $\varepsilon > 0$ следует автоматически, так как является более слабым. Оценка (4.2) для $n \leq n_{\min}$ выполняется при выборе достаточно большой константы C_{eo}.

■

4.2. Эйлеровы циклы

4.2.1. Асимптотическая формула

В этом параграфе приводится доказательство асимптотической формулы для числа различных эйлеровых циклов $EC(G)$ графа G, принадлежащему классу γ-перемешивающих графов.

Теорема 4. *Пусть G — неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, имеющими четную степень. Пусть для некоторого фиксированного $\gamma > 0$ граф G является γ-перемешивающим. Тогда:*

$$\begin{gathered} EC(G) = (1 + \delta_{ec}(G)) \left(e^{K_{ec}} 2^{|EG| - \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{t(G)} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right)! \right), \\ K_{ec} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} - \frac{1}{d_k + 1} \right)^2, \end{gathered} \tag{4.28}$$

где d_j — степень вершины v_j, $t(G)$ — число остовных деревьев G (эффективно вычисляется с помощью (3.71)), и для любого $\varepsilon > 0$

$$|\delta_{ec}(G)| \leq C_{ec} \, n^{-1/2 + \varepsilon}, \tag{4.29}$$

где константа $C_{ec} > 0$ зависит только от γ и ε.

Замечание. Для случая полного графа имеем, что:

$$\lambda_2(K_n) = n, \quad |EK_n| = \frac{n(n-1)}{2}, \quad t(K_n) = n^{n-2},$$

$$K_{ec} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EK_n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)^2 = 0.$$

Результат Теоремы 4 для случая полного графа совпадает с формулой из [69], приведенной в п. 1.3.1 (формула (1.6)).

Для доказательства Теоремы 4 мы используем представление числа эйлеровых циклов в виде интеграла (см. формулу (1.8)):

$$EC(G) = 2^{|EG|-n+1} \pi^{-n} S \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right)!, \tag{4.30}$$

причем для любой $v \in VG$

$$S = \int\limits_{U_n(\pi/2)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) \, d\vec{\xi}, \tag{4.31}$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$, $\mathcal{T}_v$ — множество корневых ориентированных остовных деревьев с корнем v, определенное в п. 1.3.2, и

$$U_n(\rho) = \{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\vec{\xi}\|_\infty = \max_j |\xi_j| \le \rho \}.$$

Рассмотрим область V_0 из (4.4).

$$V_0 = \{ \vec{\xi} \in U_n(\pi/2) : \ |\xi_j - \bar{\xi}|_\pi \le n^{-1/2+\varepsilon} \text{ для любого } 1 \le j \le n \}.$$

Пусть S_0 — вклад в S области $\vec{\xi} \in V_0$:

$$S_0 = \frac{1}{n} \int\limits_{V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{v \in VG} \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) \, d\vec{\xi}. \tag{4.32}$$

Доказательство Теоремы 4 аналогично доказательству Теоремы 3: сначала мы оценим значение S_0, используя результаты Главы 2, затем покажем, что остальные части интеграла пренебрежимо малы. Тем не менее, для того, чтобы привести интеграл (4.32) к интегралу гауссовского типа, необходимо преодолеть дополнительные трудности (в отличие от оценки эйлеровых ориентаций в §4.1).

4.2.2. Приведение к интегралу гауссовского типа

Далее в этом параграфе везде предполагается, что предположения Теоремы 4 выполнены. Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от γ и ε.

Напомним, что $\hat{L}(G) = L(G) + J$, где L — матрица Лапласа графа G, J — матрица, все элементы которой равны 1. Представляя суммирование по $\mathcal{T}_v$ в подынтегральном выражении из (4.32) в виде определителя с помощью Теоремы 2 (см. §3.4), мы получим следующую лемму:

Лемма 7. *При выполненных предположениях Теоремы 4, для $\vec{\xi} \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})$*

$$\sum_{v\in VG}\sum_{T\in\mathcal{T}_v}\prod_{(v_j,v_k)\in ET}(1 + i\tan\Delta_{jk}) = \\ = \left(1 + O(n^{-1/2+4\varepsilon})\right)\frac{e^{i\vec{\xi}^T L\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1})^2}\det\hat{L}}{n}, \tag{4.33}$$

где $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор, составленный из диагональных элементов матрицы $\hat{L}^{-1}$, $\Lambda = \Lambda(\vec{\xi})$ — диагональная $n \times n$матрица с элементами на диагонали, равными соответствующим координатам вектора $L\vec{\xi}$.

Доказательство Леммы 7. Определим $n\times n$ матрицу B следующим образом:

$$B_{jk} = \begin{cases} -\operatorname{tg}\Delta_{jk}, & \text{если } \{v_j, v_k\} \in EG, \\ \sum\limits_{l:\{v_j,v_l\}\in EG}\operatorname{tg}\Delta_{jl}, & \text{если } k = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях }. \end{cases}$$

Используя Теорему 2 для матрицы $A = L + iB$, получаем, что:

$$\sum_{v\in VG}\sum_{T\in\mathcal{T}_v}\prod_{(v_j,v_k)\in ET}(1 + i\operatorname{tg}\Delta_{jk}) = \sum_{r=1}^{n} M_r, \tag{4.34}$$

где M_r обозначает главный минор матрицы A, образованный удалением r-й строки и r-го столбца. Так как вектор $(1, 1, \ldots, 1)^T$ —общий собственный вектор матриц L и B, соответствующий собственному значению 0, находим, что:

$$\sum_{r=1}^{n} M_r = \frac{\det(\hat{L} + iB)}{n}. \tag{4.35}$$

Далее в доказательстве Леммы 7 мы всегда предполагаем, что $\vec{\xi} \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})$. Заметим, что:

$$|\Delta_{jk}| \leq 2n^{-1/2+\varepsilon}, \tag{4.36}$$

$$||B||_1 = \max_j \sum_{k=1}^{n} |B_{jk}| = O(n^{1/2+\varepsilon}). \tag{4.37}$$

Пусть $\Phi = B\hat{L}^{-1}$. Комбинируя Предложение 6 (оценки (3.33) и (3.35)) и (4.37), получаем, что:

$$||\Phi||_1 \leq ||B||_1 ||\hat{L}^{-1}||_1 = O(n^{-1/2+\varepsilon}).$$

Применяя Лемму 2 (см. п. 2.2.2) для матрицы $i\Phi$, находим, что:

$$\det(I + i\Phi) = \exp\left(i\mathrm{tr}\Phi + \frac{\mathrm{tr}\Phi^2}{2} + O(n^{-1/2+3\varepsilon}) \right). \tag{4.38}$$

Пусть

$$B = B_{skew} + B_{diag},$$

где B_{skew} — кососимметрическая матрица, а B_{diag} — диагональная матрица. Так как $\hat{L}$ — симметрическая матрица,

$$\mathrm{tr}(B_{skew}\hat{L}^{-1}) = 0. \tag{4.39}$$

Используя (4.36), находим, что:

$$||B_{diag} - \Lambda||_2 = O(n^{-1/2+3\varepsilon}), \tag{4.40}$$

где $\Lambda = \Lambda(\vec{\xi})$ обозначает диагональную матрицу, у которой соответствующие диагональные элементы равны компонентам вектора $L\vec{\xi}$. Комбинируя Предложение 6 (оценки (3.33) и (3.35)) и (4.40), получаем, что:

$$\left| \mathrm{tr}\left((B_{diag} - \Lambda)\hat{L}^{-1} \right) \right| \leq n||B_{diag} - \Lambda||_2 ||\hat{L}^{-1}||_2 = O(n^{-1/2+3\varepsilon}). \tag{4.41}$$

Используя (4.39) и (4.41), находим, что:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\Phi = \mathrm{tr}(B_{diag}\hat{L}^{-1}) = \mathrm{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1}) + O(n^{-1/2+3\varepsilon}) = \\ = \vec{\xi}^T L\vec{\alpha} + O(n^{-1/2+3\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.42}$$

где $\vec{\alpha}$ — вектор, компоненты которого равны соответствующим диагональным элементам $\hat{L}^{-1}$.

Используя свойство следа матрицы

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX), \tag{4.43}$$

получаем, что:

$$\mathrm{tr}\Phi^2 = \mathrm{tr}(B_{skew}\hat{L}^{-1})^2 + \mathrm{tr}(B_{diag}\hat{L}^{-1})^2 + 2\,\mathrm{tr}\left(B_{skew}\hat{L}^{-1}B_{diag}\hat{L}^{-1}\right). \tag{4.44}$$

Так как B_{skew} — кососимметрическая матрица, а $\hat{L}^{-1}B_{diag}\hat{L}^{-1}$ — симметрическая матрица, находим, что:

$$\mathrm{tr}\left(B_{skew}\hat{L}^{-1}B_{diag}\hat{L}^{-1}\right) = 0. \tag{4.45}$$

Мы используем следующие неравенства для $n \times n$ матриц X, Y:

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}(XY)| &\leq \|X\|_{HS}\|Y\|_{HS}, \\ \|XY\|_{HS} &\leq \|X\|_{HS}\|Y^T\|_2, \end{aligned} \tag{4.46}$$

где $\|\cdot\|_{HS}$ обозначает норму Гильберта-Шмидта:

$$\|X\|_{HS} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|X_{jk}|^2}.$$

Получаем, что:

$$\left|\mathrm{tr}(B_{skew}\hat{L}^{-1})^2\right| \leq ||B_{skew}\hat{L}^{-1}||_{HS}^2. \tag{4.47}$$

Комбинируя Предложение 6 (оценки (3.33) и (3.35)) и (4.36), находим, что:

$$||B_{skew}\hat{L}^{-1}||_{HS} \leq ||\hat{L}^{-1}||_2||B_{skew}||_{HS} = O(n^{-1/2+\varepsilon}). \tag{4.48}$$

Используя (4.36) и (4.40), получаем, что:

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{tr}\left((B_{diag}-\Lambda)\hat{L}^{-1}B_{diag}\hat{L}^{-1}\right)\right| \leq \\ &\qquad \leq n\|\hat{L}^{-1}\|_2^2||(B_{diag}-\Lambda)||_2||B_{diag}||_2 = O(n^{-1+4\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.49}$$

и

$$\left|\operatorname{tr}\Big((B_{diag}-\Lambda)\hat{L}^{-1}(B_{diag}-\Lambda)\hat{L}^{-1}\Big)\right| \leq \\ \leq n\|\hat{L}^{-1}\|_2^2||(B_{diag}-\Lambda)||_2^2 = O(n^{-2+6\varepsilon}). \tag{4.50}$$

Комбинируя (4.43), (4.49) и (4.50), мы находим, что:

$$\operatorname{tr}(B_{diag}\hat{L}^{-1})^2 = \operatorname{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1})^2 + O(n^{-1+4\varepsilon}). \tag{4.51}$$

Комбинируя (4.44), (4.45), (4.47), (4.48) и (4.51), получаем, что:

$$\operatorname{tr}\Phi^2 = \operatorname{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1})^2 + O(n^{-1+4\varepsilon}). \tag{4.52}$$

Используя (4.42) и (4.52) в (4.38), мы убеждаемся, что:

$$\det(I+i\Phi) = \exp\left(i\,\vec{\xi}^T L\vec{\alpha} + \frac{\operatorname{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1})^2}{2} + O(n^{-1/2+4\varepsilon})\right). \tag{4.53}$$

Оценка (4.33) следует из (4.53) и (4.35). ■

Пусть $\mathcal{L}$ — ортогональное дополнение к вектору $(1,1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\vec{\xi}^{\mathcal{L}}$ ортогональную проекцию вектора $\vec{\xi}$ на пространство $\mathcal{L}$. Пусть

$$V_P = \left\{\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right| \leq n^{-1/2+\varepsilon},\ \vec{\xi}^{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}\cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\right\}.$$

Используя Лемму 7, мы получаем следующее выражение S_0 в виде интеграла:

Утверждение 12. *Пусть предположения Теоремы 4 выполнены. Тогда:*

$$S_0 = \frac{\sqrt{\pi}\det\hat{L}}{\sqrt{2}\,n}\left(\int\limits_{V_P} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi}+R_{ec}(\vec{\xi})+iI_{ec}(\vec{\xi})}\,d\vec{\xi} + \right. \\ \left. + O(n^{-1/2+4\varepsilon})\int\limits_{V_P} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L\vec{\xi}+R_{ec}(\vec{\xi})}\,d\vec{\xi}\right), \tag{4.54}$$

$$R_{ec}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Lambda\hat{L}^{-1})^2 - \frac{1}{12}\sum_{\{v_j,v_k\}\in VG}\Delta_{jk}^4, \qquad I_{ec}(\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T L\vec{\alpha}.$$

где $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ обозначает вектор, составленный из диагональных элементов матрицы $\hat{L}^{-1}$, $\Lambda = \Lambda(\vec{\xi})$ — диагональная $n\times n$ матрица с элементами на диагонали, равными соответствующим координатам вектора $L\vec{\xi}$.

Доказательство Утверждения 12. Аналогично п. 4.1.2, так как подынтегральное выражение в (4.32) и область V_0 являются инвариантными относительно равномерного сдвига всех $\xi_j \mod \pi$, можно зафиксировать $\bar{\xi} = 0$ и умножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора $\frac{1}{n}(1, \ldots, 1)^T$. Получаем, что:

$$S_0 = \pi n^{-1/2} \int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{v \in VG} \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) \, d\mathcal{L}.$$

Используя разложение $\cos \Delta_{jk}$ в ряд Тэйлора (см. (4.7)) и Лемму 7, находим:

$$S_0 = \frac{\sqrt{\pi} \det \hat{L}}{\sqrt{2}\, n^{3/2}} \Bigg(\int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L \vec{\xi} + R_{ec}(\vec{\xi}) + i I_{ec}(\vec{\xi})} \, d\mathcal{L} +$$
$$+ O(n^{-1/2+4\varepsilon}) \int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T L \vec{\xi} + R_{ec}(\vec{\xi})} \, d\mathcal{L} \Bigg),$$

$$R_{ec}(\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Lambda \hat{L}^{-1})^2 - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in VG} \Delta_{jk}^4, \qquad I_{ec}(\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T L \vec{\alpha}.$$

Так как $L\vec{\xi} = L\vec{\xi}^{\mathcal{L}}$ и $\Lambda(\vec{\xi}) = \Lambda(\vec{\xi}^{\mathcal{L}})$, то

$$R_{ec}(\vec{\xi}) = R_{ec}(\vec{\xi}^{\mathcal{L}}), \qquad I_{ec}(\vec{\xi}) = I_{ec}(\vec{\xi}^{\mathcal{L}}).$$

Используя (4.12) и формулы, аналогичные (4.10), мы получаем (4.54). ∎

4.2.3. Основная часть интеграла

В этом подпараграфе, основываясь на выражении (4.54) и используя результаты §2.4, мы оценим значение S_0.

Пусть $\vec{e}^{(k)} = (e_1^{(k)}, \ldots, e_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ такой, что $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Учитывая линейность $\Lambda(\vec{\xi})$ и $\operatorname{tr}(\cdot)$, получаем, что

$$\operatorname{tr}(\Lambda(\vec{\xi}) \hat{L}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \hat{L}^{-1}) = \vec{\xi}^T R \vec{\xi},$$

где

$$R_{jk} = \operatorname{tr}(\Lambda(\vec{e}^{(j)}) \hat{L}^{-1} \Lambda(\vec{e}^{(k)}) \hat{L}^{-1}).$$

Пусть $l_1^{(j)}, \dots, l_n^{(j)}$ — компоненты вектора $L\vec{e}^{(j)}$ (которые совпадают с диагональными элементами диагональной матрицы $\Lambda(\vec{e}^{(j)})$). Имеем, что:

$$l_k^{(j)} = \begin{cases} -1, & \text{если } \{v_j, v_k\} \in EG, \\ d_j, & \text{если } k = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Комбинируя Предложение 6 (оценки (3.33) и (3.35)) и формулу

$$\mathrm{tr}(\Lambda(\vec{e}^{(j)})\hat{L}^{-1}\Lambda(\vec{e}^{(k)})\hat{L}^{-1}) = \sum_{j'=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} l_{j'}^{(j)}(\hat{L}^{-1})_{j'k'}(\hat{L}^{-1})_{k'j'}l_{k'}^{(k)}$$

получаем, что:

$$R_{jk} = \begin{cases} 1 + O(n^{-1}), & \text{если } k = j, \\ O(n^{-1}), & \text{если } k \neq j. \end{cases} \tag{4.55}$$

Определим $\vec{\xi}(\vec{\theta}) = (\xi_1(\vec{\theta}), \xi_2(\vec{\theta}), \dots, \xi_n(\vec{\theta}))$ следующим образом:

$$\xi_k = \xi_k(\vec{\theta}) = \frac{\theta_k}{\sqrt{(d_k+1)/2}}.$$

Пусть

$$A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{(d_j+1)(d_k+1)}}\hat{L}_{jk}, \quad \vec{\theta}^T A\vec{\theta} = \frac{1}{2}\vec{\xi}(\vec{\theta})^T\hat{L}\vec{\xi}(\vec{\theta}),$$

$$P_{ec}(\vec{\theta}) = R_{ec}(\vec{\xi}(\vec{\theta})), \quad Q_{ec}(\vec{\theta}) = iI_{ec}(\vec{\xi}(\vec{\theta})),$$

$$\Omega = \left\{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n : \vec{\xi}(\vec{\theta}) \in V_P\right\}.$$

Используя Утверждение 12, получаем:

$$S_0 = \frac{\sqrt{\pi}\det\hat{L}}{\sqrt{2}\,n}\left(\int_\Omega e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta} + P_{ec}(\vec{\theta}) + Q_{ec}(\vec{\theta})}\,d\vec{\theta} + \right.$$
$$\left. + O(n^{-1/2+4\varepsilon})\int_\Omega e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta} + P_{ec}(\vec{\theta})}\,d\vec{\theta}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(d_j+1)/2}}.$$

Используя (4.14), (4.55) и Предложение 6 (см. оценки (3.35)), мы находим:

$$h_1(P_{ec}) = O(1), \quad h_1(Q_{ec}) = O(n^{1/2}), \quad h_2(Q_{ec}) = 0. \tag{4.56}$$

где функции высоты полинома h_1 и четной высоты полинома h_2 определены в п. 2.3.1 (см. (2.23), (2.24)).

Комбинируя (4.13), (4.56), Предложение 6 (см. формулы (3.33), (3.36)), Теорему 1 и Следствие 1, получаем, что:

$$\int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}+P_{ec}(\vec{\theta})+Q_{ec}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} + O(n^{-1/2+4\varepsilon}) \int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}+P_{ec}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} =$$

$$= \left(1 + O(n^{-1/2+20\varepsilon})\right) e^{\chi_A(P_{ec}+Q_{ec}^2/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}\, d\vec{\theta},$$

где функция χ_A определена в п. 2.3.2 (см. (2.32)). Принимая во внимание также (4.15) и (4.55), получаем, что:

$$\chi_A(P_{ec}) = \frac{1}{2}\chi_A\left(\vec{\xi}(\vec{\theta})^T R\vec{\xi}(\vec{\theta})\right) - \frac{1}{12}\chi_A\left(\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG} (\xi_j(\vec{\theta}) - \xi_k(\vec{\theta}))^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j+1} - \frac{1}{4}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(\frac{1}{d_j+1} + \frac{1}{d_k+1}\right)^2 + O(n^{-1}).$$

$$\chi_A(Q_{ec}^2/2) = -\frac{1}{2}\chi_A\left(\left(\vec{\xi}(\vec{\theta})^T L\vec{\alpha}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}^T L^T \hat{L}^{-1} L\vec{\alpha}.$$

Используя равенство

$$L\hat{L}^{-1}J = \frac{1}{n}LJ = 0$$

и оценки (3.35), находим:

$$\vec{\alpha}^T L^T \hat{L}^{-1} L\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^T L^T \hat{L}^{-1} J\vec{\alpha} + \vec{\alpha}^T L^T \hat{L}^{-1} \hat{L}\vec{\alpha} =$$

$$= \vec{\alpha}^T L\vec{\alpha} = \sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(\frac{1}{d_j+1} - \frac{1}{d_k+1}\right)^2 + O(n^{-1}).$$

Поэтому

$$\chi_A(P_{ec} + Q_{ec}^2/2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j+1} - \frac{1}{4}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(\frac{1}{d_j+1} + \frac{1}{d_k+1}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(\frac{1}{d_j+1} - \frac{1}{d_k+1}\right)^2 + O(n^{-1}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(\frac{1}{d_j+1} - \frac{1}{d_k+1}\right)^2 + O(n^{-1}).$$

Учитывая (4.16) и выбирая достаточно маленькое ε, мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 13. *При выполненных предположениях Теоремы 4,*

$$S_0 = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) e^{K_{ec}} 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n^{-1} \sqrt{\det \hat{L}},$$

$$K_{ec} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} - \frac{1}{d_k + 1} \right)^2.$$

4.2.4. Оценка незначительных частей

Мы продолжаем предполагать, что предположения Теоремы 4 выполнены и использовать обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от γ и ε. Кроме того, в некоторых местах предполагается что n — достаточно большое: $n \ge n_{\min}$ для некоторого $n_{\min} = n_{\min}(\gamma, \varepsilon) > 0$. Для простоты, во всех таких местах используется одинаковое обозначение $n_{\min}$ (то есть $n_{\min}$ соответствует максимуму из всех ограничений).

В этом подпараграфе приводится доказательство оценок, которые во многом аналогичны оценкам из п. 4.1.3. Мы ссылаемся на соответствующие формулы для того, чтобы не повторять рассуждение.

Пусть

$$E'T = \left\{ \{v_j, v_k)\} : (v_j, v_k) \in ET \text{ или } (v_k, v_j) \in ET \right\}.$$

Подынтегральное выражение в (4.31) может быть представлено следующим образом:

$$F(\vec{\xi}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} f_{jk}(T, \vec{\xi}), \tag{4.57}$$

где

$$f_{jk}(T, \vec{\xi}) = \begin{cases} \cos \Delta_{jk} (1 + i \tan \Delta_{jk}), & (v_j, v_k) \in ET, \\ \cos \Delta_{jk} (1 - i \tan \Delta_{jk}), & (v_k, v_j) \in ET, \\ \cos \Delta_{jk}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что $|f_{jk}(T, \vec{\xi})| \le 1$ для любых значений параметров.

Разделим промежуток $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \bmod \pi$ на 32 равных интервала $H_0, \ldots, H_{31}$ таких, что $H_0 = [-\frac{\pi}{64}, \frac{\pi}{64}]$. Для каждого $j = 0, 1, \ldots, 32$ определим область $W_j \subseteq U_n(\pi/2)$ как множество таких $\vec{\xi} \in U_n(\pi/2)$, у которых хотя бы $\frac{n}{32}$ координат лежат в H_j. Аналогично п. 4.1.3 имеем, что:

$$\int\limits_{U_n(\pi/2)\setminus V_0} |F(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi} \leq 32Z,$$

где

$$Z = \int\limits_{W_0\setminus V_0} |F(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi}.$$

Мы определим интегралы S_1, S_2, S_3, S_4 так, чтобы Z было ограничено их суммой (для любого корня $v \in VG$), и покажем отдельно, что каждый из них пренебрежимо мал. Пусть

$$F(\vec{\xi}) = F_a(\vec{\xi}) + F_b(\vec{\xi}),$$

где $F_a(\vec{\xi})$ и $F_b(\vec{\xi})$ соответствуют разбиению суммы в (4.57) по множествам деревьев из $\mathcal{T}_v$, для которых наибольшая степень вершины больше $\gamma^2 n/8$ и не превосходит $\gamma^2 n/8$, соответственно. Пусть

$$V_1 = \left\{\vec{\theta} \in W_0 : |\xi_j| \geq \frac{\pi}{32} \text{ для менее чем } n^{\varepsilon} \text{ различных } j\right\},$$
$$V_2 = \left\{\vec{\theta} \in V_1 : |\xi_j| \geq \frac{\pi}{16} \text{ для по крайней мере одного } j\right\}.$$

Наши четыре интеграла определяются следующим образом:

$$S_1 = \int\limits_{W_0\setminus V_1} |F(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi},$$
$$S_2 = \int\limits_{V_1} |F_a(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi},$$
$$S_2 = \int\limits_{V_2} |F_b(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi},$$
$$S_3 = \int\limits_{V_1\setminus(V_2\cup V_0)} |F_b(\vec{\xi})|\, d\vec{\xi}.$$

Начнем с S_1. Аналогично (4.21), получаем, что для $\vec{\xi} \in V_1$ существует по крайней мере $\frac{\mu}{32}n^{1+\varepsilon}$ таких ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$, что

$$|\cos \Delta_{jk}| \leq \cos \frac{\pi}{64H}.$$

Любое дерево содержит не более n из этих ребер. Учитывая (4.20), получаем:

$$S_1 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \pi^n \left(\cos \frac{\pi}{64H}\right)^{\frac{\mu}{32}n^{1+\varepsilon}-n} = O\Big(\exp(-cn^{1+\varepsilon})\Big) \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}} n\, t(G)}{\sqrt{\det \hat{L}}} \tag{4.58}$$

для некоторой константы $c > 0$, зависящей только от γ и ε, где $t(G)$ — число остовных деревьев графа G.

Для оценки S_2 нам потребуется следующая лемма из [69]:

Лемма 8. *Число помеченных деревьев с n вершинами таких, что степень первой вершины больше d не превосходит $2n^{n-2}/d!$ для любых $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Доказательство Леммы 8. Хорошо известно, что производящая функция числа помеченных деревьев с n вершинами по степеням вершин имеем следующий вид:

$$f(\vec{x}) = x_1 \cdots x_n (x_1 + \ldots x_n)^{n-2}.$$

Получаем, что число деревьев, степень первой вершины которых d_1, равно

$$\binom{d_1 - 1}{n-2}(n-1)^{n-d_1-1} \leq \frac{n^{n-2}}{(d_1-1)!}.$$

Для $d > 0$ суммирование по $d_1 > d$ дает желаемый результат. Для $d = 0$ используем факт, что число всех остовных деревьев равно n^{n-2}. ∎

Принимая во внимание оценки (4.20) то в качестве следствия Леммы 8 получаем, что:

Следствие 3. *Пусть G — простой γ-перемешивающий граф с n вершинами для некотрого $\gamma > 0$. Тогда существует константа $c_t = c_t(\gamma) > 0$ такая, что число помеченных остовных деревьев в G, для которых наибольшая степень вершины больше $\gamma^2 n/8$, не превосходит $c_t^n \det \hat{L}/d!$.*

Используя (4.19) мы получаем, что неравенство

$$|f_{jk}(T,\vec{\xi})| \le \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta_{jk}^2\right)$$

выполнено везде за исключением не более чем $n^{2\varepsilon}$ пар $\{j,k\}$, для которых $|\Delta_{jk}| \ge \frac{\pi}{16}$, и менее чем n пар из $E'T$. В этих исключительных случаях абсолютное значение $f_{jk}(T,\vec{\xi})$ оценивается сверху $e^{\pi^2/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta_{jk}^2\right) \ge 1$. Получаем, что:

$$S_2 \le \frac{c_t^n \det \hat{L}}{(\gamma^2 n/8)!}\exp\left(\frac{\pi^2}{2}(n+n^{2\varepsilon})\right)\int\limits_{U_n(\pi/2)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\Delta_{jk}^2\right)d\vec{\xi}.$$

Используя Лемму 6 (оценка (4.17)), находим, что при $n \ge n_{\min}$

$$S_2 = O(n^{-cn})2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}n^{-1}\sqrt{\det \hat{L}} \qquad (4.59)$$

для некоторой $c > 0$ зависящей только от γ и ε.

Для $1 \le r \le n^{\varepsilon}$ обозначим $S_3(r)$ вклад в S_2 тех $\vec{\xi} \in V_2$, для которых неравенство $|\xi_j| \ge \frac{\pi}{16}$ выполняется ровно для r индексов j. Если $|\xi_j| \le \frac{\pi}{32}$ и $|\xi_k| \ge \frac{\pi}{16}$ или наоборот, получаем:

$$|f_{jk}(T,\vec{\xi})| \le \cos\frac{\pi}{32},$$

за исключением $\{v_j,v_k\} \in E'T$. Это выполняется по крайней мере для

$$r(\gamma n/2 - n^{\varepsilon} - \gamma^2 n/8) \ge r(\gamma n/4 - n^{\varepsilon})$$

ребер $\{v_j,v_k\} \in EG$, так как (см. оценку (3.33)) степень любой вершины G не менее $\gamma n/2$. Для ребер $\{v_j,v_k\}$ таких, что $|\xi_j|,|\xi_k| \le \frac{\pi}{16}$, мы используем неравенство (4.19). Пусть $\vec{\xi'} \in \mathbb{R}^{n-r}$. Получаем, что:

$$S_3(r) \le \pi^r\left(\cos\frac{\pi}{32}\right)^{r(\gamma n/4-n^{\varepsilon})}\sum_{G_r^T}\int\limits_{U_{n-r}(\pi/2)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG_r^T}\Delta_{jk}^2\right)d\vec{\xi'}, \quad (4.60)$$

где сумма по графам G_r^T, получающимся из G посредством удаления ребер дерева T и удаления r вершин (со смежными ребрами), для всех деревьев со степенями вершин, не превосходящими $\gamma^2 n/8$, и всевозможных наборов из r вершин.

Используя Предложение 6 (оценки (3.37) и (3.38)), оценки (3.6a), (3.6b) и неравенство $\|L(T)\|_2 \leq \|L(T)\|_1 \leq 2\gamma^2 n/8$, получаем, что при $n \geq n_{\min}$

$$\begin{aligned} \lambda_2(G_r^T) \geq \gamma n - r - \gamma^2 n/4 \geq \gamma n/2 - n^{\varepsilon}, \\ \det \hat{L} = O(c^r n^r) \det \hat{L}_{T,r}, \\ \hat{L}_{T,r} = \hat{L}(G_r^T) = L(G_r^T) + J_{n-r}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

где константа $c > 0$ зависит только от γ, J_{n-r} — $(n-r) \times (n-r)$ матрица, все элементы которой равны 1. Согласно Лемме 6 (оценка (4.17)), находим, что для $n \geq n_{\min}$

$$\int\limits_{U_{n-r}(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG_r^T} \Delta_{jk}^2\right) d\vec{\xi}' = O(1) \frac{2^{\frac{n-r-1}{2}} \pi^{\frac{n-r+1}{2}} n}{\sqrt{\det \hat{L}_{T,r}}}. \tag{4.62}$$

Комбинируя (4.60) с (4.61) и (4.62) и оценивая числом $n^r t(G)$ выбор набора из r вершин и дерева T для построения графа G_r^T, получаем, что для $n \geq n_{\min}$

$$S_3(r) = O(1)\, 2^{\frac{n-r-1}{2}} \pi^{\frac{n+r+1}{2}} n^{r+1} \left(\cos \frac{\pi}{32}\right)^{r(\gamma n/4 - n^{\varepsilon})} \frac{(cn)^{r/2}\, t(G)}{\sqrt{\det \hat{L}}}.$$

Суммируя по $0 \leq r \leq n^{\varepsilon}$, находим, что для $n \geq n_{\min}$

$$S_3 = \sum_{r=1}^{n^{\varepsilon}} S_2(r) = O(c_1^{-n})\, \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n\, t(G)}{\sqrt{\det \hat{L}}}, \tag{4.63}$$

причем константа $c_1 > 1$ зависит только от γ и ε.

Заметим, что $\Delta_{jk} \leq \frac{\pi}{8}$ для $\vec{\xi} \in V_1 \setminus V_2$, поэтому

$$V_1 \setminus V_2 \subset V_3 = \left\{\vec{\xi} \in U_n(\pi/2) : |\xi_j - \bar{\xi}|_\pi \leq \pi/8\right\},$$

где $\bar{\xi}$ и $|\xi_j - \bar{\xi}|_\pi$ определяются в (4.4). Аналогично п. 4.1.3 имеем, что:

$$S_4 \leq \pi n^{1/2} \int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(\pi/8) \setminus V_0} F_b(\vec{\xi})\, d\mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ обозначает ортогональное дополнение к $(1, 1, \dots, 1)^T$. Используя неравенство (4.19), находим, что:

$$S_4 \le \pi n^{1/2} \sum_{G^T} \int\limits_{\mathcal{L} \cap U_n(\pi/8) \setminus V_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG_T} \Delta_{jk}^2 \right) d\mathcal{L},$$

где сумма по графам G^T, получающимся из G посредством удаления ребер дерева T, для всех деревьев со степенями вершин, не превосходящими $\gamma^2 n/8$. Принимая во внимание (4.61) и Лемму 6 (оценку (4.17)) для G^T, получаем, что при $n \ge n_{\min}$

$$S_4 = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} n\, t(G)}{\sqrt{\det \hat{L}}} \tag{4.64}$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ. Комбинируя (4.58), (4.59), (4.63), (4.64) и (4.27), мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 14. *Пусть все предположения Теоремы 4 выполнены. Тогда при $n \ge n_{\min}$*

$$S - S_0 = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{t(G)}$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ и ε.

Теперь несложно завершить доказательство асимптотической формулы для числа эйлеровых циклов графа.

Доказательство Теоремы 4. Комбинируя (4.27) и Утверждения 13 и 14, мы получаем, что при $n \ge n_{\min}$

$$S = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) e^{K_{ec}} 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{t(G)},$$

$$K_{ec} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} - \frac{1}{d_k + 1} \right)^2.$$

Подставляя S в (4.30), мы получаем (4.28) для случая $n \ge n_{\min}(\gamma, \varepsilon) > 0$ и достаточно маленького $\varepsilon > 0$.

Утверждение Теоремы 4 для больших $\varepsilon > 0$ следует автоматически, так как является более слабым. Оценка (4.29) для $n \le n_{\min}$ выполняется при выборе достаточно большой константы C_{ec}. ■

4.3. Подграфы с заданной последовательностью степеней вершин

4.3.1. Асимптотическая формула

Напомним, что $SG(\vec{s})$ обозначает число различных помеченных подграфов графа G с заданным набором степеней вершин $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{N}^n$. Пусть $\vec{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T \in \mathbb{N}^n$ — степени вершин графа G. В случае, когда граф G является существенно недвудольным, а s_j/d_j отличаются не сильно, аналитический подход позволяет получить следующую формулу:

Теорема 5. *Пусть константы $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $0 < \epsilon < 1/2$ зафиксированы. Пусть G — неориентированный простой γ-недвудольный граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причем константа Чигера $i(G) \ge n^\alpha$. Тогда для любых $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{N}^n$ и $\lambda \in [\epsilon, 1-\epsilon]$ таких, что $s_1 + \ldots + s_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$ и $\max\limits_{1 \le j \le n} |s_j - \lambda d_j| \le \beta$, выполняется:*

$$\begin{gathered}
SG(\vec{s}) = (1 + \delta_{sg}(\vec{s}, G)) \left(\frac{2e^{-K_{sg}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\lambda^{E + \frac{n}{2}} (1-\lambda)^{|EG| - E + \frac{n}{2}} \sqrt{\det Q}} \right), \\
K_{sg} = \frac{\vec{w}^T Q \vec{w}}{4} + \frac{(1-2\lambda)^2 \vec{w}^T \vec{1}}{12\lambda(1-\lambda)} + \frac{\vec{a}^T Q^{-1} \vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)} + \frac{(1-2\lambda)\vec{a}^T \vec{w}}{2\lambda(1-\lambda)},
\end{gathered} \tag{4.65}$$

где $E = (s_1 + \ldots + s_n)/2$, $|EG|$ – число ребер графа G,

$$\vec{a} = (s_1 - \lambda d_1, \ldots, s_n - \lambda d_n)^T, \quad \vec{w} = (d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})^T, \quad \vec{1} = (1, \ldots, 1)^T,$$

причем для любого $\varepsilon > 0$

$$|\delta_{sg}(\vec{s}, G)| \le C_{sg} n^{-1/2+\varepsilon}, \tag{4.66}$$

где константа $C_{sg} > 0$ зависит только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \varepsilon$.

Замечание. Для случая полного графа имеем, что: алгебраическая недвудольность $q(K_n) = n - 2$, число ребер $|EK_n| = \frac{n(n-1)}{2}$ и при $n \to \infty$

$$\det Q = (2n-2)(n-2)^{n-1} = \left(1 + O(n^{-1})\right) 2e^{-2}n^n,$$

$$\vec{w}^T Q \vec{w} = \sum_{\{v_j,v_k\} \in VG} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^2 = 2 + O(n^{-1}),$$

$$\vec{w}^T \vec{1} = \frac{n}{n-1} = 1 + O(n^{-1}), \quad \vec{a}^T \vec{w} = \gamma_1,$$

$$\vec{a}^T Q^{-1} \vec{a} = n\gamma_2 - \gamma_1^2/2 + O(n^{-1}),$$

$$K_{sg} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2\lambda)^2}{12\lambda(1-\lambda)} + \frac{\gamma_2 - \gamma_1^2/2}{2\lambda(1-\lambda)} + \frac{(1-2\lambda)\gamma_1}{2\lambda(1-\lambda)} + O(n^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}R - nR\gamma_2 - \frac{1}{2}R\gamma_1^2 + R(1-2\lambda)\gamma_1 + O(n^{-1}).$$

где

$$R = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)}, \qquad \gamma_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{n-1}\right)^k.$$

Если выбрать $\lambda = E/|EK_n|$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Учитывая (4.65), находим, что:

$$SK_n(\vec{s}) \sim \sqrt{2}\left(2\pi n \lambda^{\frac{2E}{n}+1}(1-\lambda)^{n-\frac{2E}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}R - nR\gamma_2\right).$$

Следовательно, Теорема 5 дает такую же оценку числа графов с заданной последовательностью степеней вершин как и результаты из [70], приведенные также в п. 1.4.2, при условии $\max_{1 \le j \le n} |s_j - \lambda(n-1)| = O(1)$ (см. формулу (1.10)).

Для доказательства Теоремы 5 мы используем представление числа различных помеченных подграфов в виде интеграла (см. формулу (1.9)):

$$SG(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{n} r_j^{s_j}} \int\limits_{U_n(\pi)} \left(\frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\} \in EG} \left(1 + r_j r_k e^{i(\xi_j + \xi_k)}\right)}{e^{i(s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \ldots + s_n\xi_n)}} \right) d\vec{\xi}.$$

Пусть

$$r_j = \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}e^{\rho_j}, \quad \vec{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)^T = \frac{Q^{-1}\vec{a}}{\lambda(1-\lambda)}.$$

Получаем, что:

$$SG(\vec{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n \lambda^E (1-\lambda)^{|EG|-E}} S,$$
$$S = \int\limits_{U_n(\pi)} \left(\frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} \left(1 + \lambda\left(e^{\rho_j+\rho_k+i(\xi_j+\xi_k)} - 1\right)\right)}{e^{\vec{s}^T\vec{\rho}+i\vec{s}^T\vec{\xi}}} \right) d\vec{\xi}, \tag{4.67}$$

Пусть S_0 — вклад в S области $U_n(n^{-1/2+\varepsilon})$.

Доказательство Теоремы 5 аналогично доказательству Теорем 3 и 4: сначала мы оценим значение S_0, используя результаты Главы 2. Затем мы покажем, что идентичный вклад в S вносит симметричная $U_n(n^{-1/2+\varepsilon})$ область $\{\vec{\xi} : \max\limits_j |\xi_j - \pi|_{2\pi} \le n^{-1/2+\varepsilon}\}$, а остальные части интеграла пренебрежимо малы.

Замечание. Отметим, что даже если ослабить условие $\max\limits_{1\le j\le n} |s_j - \lambda d_j| = O(1)$ в Теореме 5 до $\max\limits_{1\le j\le n} |s_j - \lambda d_j| = O(n^{1/2+\varepsilon})$, то по-прежнему данный подход позволяет оценить число помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин и получить формулу, обобщающую (4.65). Подобный результат достигается с помощью подходящего выбора вектора $\vec{\rho} \in \mathbb{R}^n$ в (4.67). Однако, при этом объем выкладок существенно увеличивается, и финальная формула становится более сложной.

4.3.2. Основная часть интеграла

Далее в этом параграфе везде предполагается, что предположения Теоремы 5 выполнены. Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Пусть $F(\vec{\xi})$ обозначает подынтегральное выражение в (4.67):

$$F(\vec{\xi}) = \frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} \left(1 + \lambda\left(e^{\rho_j+\rho_k+i(\xi_j+\xi_k)} - 1\right)\right)}{e^{\vec{s}^T\vec{\rho}+i\vec{s}^T\vec{\xi}}}.$$

Используя разложение e^z в ряд Тэйлора, находим, что при $|z| = O(n^{-1/2+\varepsilon})$

$$1 + \lambda(e^z - 1) = \exp\left(\lambda z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + O(n^{-5/2+5\varepsilon})\right),$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda), \quad A_3 = \frac{1}{6}\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda), \tag{4.68}$$
$$A_4 = \frac{1}{24}\lambda(1-\lambda)(1-6\lambda+6\lambda^2).$$

Комбинируя Предложение 9 (оценки (3.56), (3.59)) и Предложение 1 (оценка (2.11)), получаем, что:

$$\|\vec{\rho}\|_\infty = \frac{\|Q^{-1}\vec{a}\|_\infty}{\lambda(1-\lambda)} = O(n^{-1}). \tag{4.69}$$

Используя формулу

$$\vec{x}^T Q \vec{y} = \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j + x_k)(y_j + y_k), \tag{4.70}$$

находим, что для $\|\vec{\xi}\|_\infty = \max\limits_j |\xi_j| = O(n^{-1/2+\varepsilon})$

$$\begin{aligned} F(\vec{\xi}) = \exp\Bigg(&\vec{\rho}^T(\lambda\vec{d} - \vec{s}) + i\vec{\xi}^T(\lambda\vec{d} - \vec{s}) + A_2(\vec{\rho} + i\vec{\xi})^T Q(\vec{\rho} + i\vec{\xi}) - \\ &- 3A_3 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^2(\rho_j + \rho_k) - iA_3 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^3 + \\ &+ A_4 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^4 + O(n^{-1/2+5\varepsilon})\Bigg) = \\ =&e^{-\vec{\rho}^T(\vec{s} - \lambda\vec{d}) + A_2\vec{\rho}^T Q\vec{\rho}} \exp\Bigg(-A_2\vec{\xi}^T Q\vec{\xi} + R_{sg}(\vec{\xi}) + iI_{sg}(\vec{\xi}) + O(n^{-1/2+5\varepsilon})\Bigg), \end{aligned}$$

где $\vec{d}$ — вектор, компоненты которого равны степеням вершин графа G,

$$R_{sg}(\vec{\xi}) = -3A_3 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^2(\rho_j + \rho_k) + A_4 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^4,$$
$$I_{sg}(\vec{\xi}) = -A_3 \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (\xi_j + \xi_k)^3.$$

Определим $\vec{\xi}(\vec{\theta}) = (\xi_1(\vec{\theta}), \xi_2(\vec{\theta}), \ldots, \xi_n(\vec{\theta}))$ следующим образом:

$$\xi_k = \xi_k(\vec{\theta}) = \frac{\theta_k}{\sqrt{A_2 d_k}}. \tag{4.71}$$

Пусть

$$A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{d_j d_k}} Q_{jk}, \quad \vec{\theta}^T A \vec{\theta} = A_2 \vec{\xi}(\vec{\theta})^T Q \vec{\xi}(\vec{\theta}),$$
$$P_{sg}(\vec{\theta}) = R_{sg}(\vec{\xi}(\vec{\theta})), \quad Q_{sg}(\vec{\theta}) = i I_{sg}(\vec{\xi}(\vec{\theta})),$$
$$\Omega = \left\{ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^n : \vec{\xi}(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon}) \right\}.$$

Тогда для S_0 получаем следующее выражение:

$$S_0 = e^{-\vec{\rho}^T(\vec{s}-\lambda\vec{d}) + A_2 \vec{\rho}^T Q \vec{\rho}} \left(\int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{sg}(\vec{\theta}) + Q_{sg}(\vec{\theta})} d\vec{\theta} + \right.$$
$$\left. + O(n^{-1/2+5\varepsilon}) \int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{sg}(\vec{\theta})} d\vec{\theta} \right) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{A_2 d_j}}. \tag{4.72}$$

Используя Предложение 9 (см. оценки (3.56)) и (4.69), находим, что:

$$U_n(r_1 n^{\varepsilon}) \subseteq \Omega \subseteq U_n(r_2 n^{\varepsilon}) \tag{4.73}$$

для некоторых $r_1, r_2 > 0$, зависящих только от γ, и

$$h_1(P_{sg}) = O(1), \quad h_1(Q_{sg}) = O(n^{1/2}), \quad h_2(Q_{sg}) = 0. \tag{4.74}$$

где функции высоты полинома h_1 и четной высоты полинома h_2 определены в п. 2.3.1 (см. (2.23), (2.24)).

Комбинируя (4.69), (4.70), (4.73), (4.74), Предложение 9 (см. (3.56), (3.59)), Теорему 1 и Следствие 1, получаем, что:

$$\int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{sg}(\vec{\theta}) + Q_{sg}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} + O(n^{-1/2+4\varepsilon}) \int\limits_{\Omega} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + P_{sg}(\vec{\theta})}\, d\vec{\theta} =$$
$$= \left(1 + O(n^{-1/2+20\varepsilon})\right) e^{\chi_A(P_{sg} + Q_{sg}^2/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta},$$

где функция χ_A определена в п. 2.3.2 (см. (2.32)), причем

$$\chi_A(P_{sg}) = \chi_A\left(-3A_3\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}(\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^2(\rho_j+\rho_k)\right)+$$
$$+\chi_A\left(A_4\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}(\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^4\right)=$$
$$=\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}\left(-\frac{3A_3}{2A_2}\left(\frac{1}{d_j}+\frac{1}{d_k}\right)(\rho_j+\rho_k)+\frac{3A_4}{4A_2^2}\left(\frac{1}{d_j}+\frac{1}{d_k}\right)^2\right)+O(n^{-1})=$$
$$=-\frac{3A_3}{2A_2}\vec{w}^TQ\vec{\rho}+\frac{3A_4}{4A_2^2}\vec{w}^TQ\vec{w}+O(n^{-1}),$$

$$\chi_A(Q_{sg}^2/2) = -\frac{A_3^2}{2}\chi_A\left(\left(\sum_{\{v_j,v_k\}\in EG}(\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^3\right)^2\right)=$$
$$=-\frac{9A_3^2}{16A_2^3}(Q\vec{w})^TWQ\vec{w}-\frac{3A_3^2}{8A_2^3}\vec{w}^T\vec{1}+O(n^{-1}),$$

где мы использовали обозначения

$$W=Q^{-1},\quad \vec{w}=(1/d_1,\ldots,1/d_n),\quad \vec{1}=(1,\ldots,1)$$

и равенства (для попарно различных натуральных $j,k,l,m\le n$):

$$\chi_A\left((\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^3(\xi_l(\vec{\theta})+\xi_m(\vec{\theta}))^3\right)=$$
$$=\frac{9\,(W_{jl}+W_{kl}+W_{km}+W_{jm})}{8A_2^3}\left(\frac{1}{d_j}+\frac{1}{d_k}\right)\left(\frac{1}{d_l}+\frac{1}{d_m}\right)+O(n^{-5}),$$

$$\chi_A\left((\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^3(\xi_j(\vec{\theta})+\xi_l(\vec{\theta}))^3\right)=\frac{3}{4A_2^3d_j^3}+$$
$$+\frac{9W_{jj}}{8A_2^3}\left(\frac{1}{d_j}+\frac{1}{d_k}\right)\left(\frac{1}{d_j}+\frac{1}{d_l}\right)+O(n^{-4}),$$
$$\chi_A\left((\xi_j(\vec{\theta})+\xi_k(\vec{\theta}))^6\right)=O(n^{-3}).$$

Подставляя значения A_2, A_3, A_4 из (4.68), находим:

$$\chi_A(P_{sg}+Q_{sg}^2/2)=-\frac{\vec{w}^TQ\vec{w}}{4}-\frac{(1-2\lambda)\vec{w}^TQ\vec{\rho}}{2}-\frac{(1-2\lambda)^2\vec{w}^T\vec{1}}{12\lambda(1-\lambda)}+O(n^{-1}).$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A\vec{\theta}}\, d\vec{\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{A_2 d_j}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-A_2\vec{\xi}^T Q\vec{\xi}}\, d\vec{\xi} = \frac{(\pi/A_2)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det Q}},$$

$$\vec{\rho} = \frac{Q\vec{a}}{2A_2}, \qquad A_2 = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda),$$

и выбирая достаточно маленькое ε, мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 15. *При выполненных предположениях Теоремы 5,*

$$S_0 = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) e^{-K_{sg}} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}},$$

$$K_{sg} = \frac{\vec{w}^T Q\vec{w}}{4} + \frac{(1-2\lambda)^2\vec{w}^T\vec{1}}{12\lambda(1-\lambda)} + \frac{\vec{a}^T Q^{-1}\vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)} + \frac{(1-2\lambda)\vec{a}^T\vec{w}}{2\lambda(1-\lambda)}.$$

Кроме того, нам потребуется следующая лемма:

Лемма 9. *Пусть константы $\beta, \gamma > 0$ и $0 < \epsilon < 1/2$ зафиксированы. Пусть G — неориентированный простой γ-недвудольный граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тогда для любых $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{N}^n$, $\lambda \in [\epsilon, 1-\epsilon]$ и $\vec{\rho}' \in \mathbb{R}^n$ таких, что $s_1 + \ldots + s_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$ и $\max\limits_{1\le j\le n} |s_j - \lambda d_j| \le \beta$, $\|\vec{\rho}'\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} |\rho'_j| = O(n^{-1})$, выполняется:*

$$\int\limits_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \frac{\prod\limits_{\{v_j,v_k\}\in EG} \left|1 + \lambda(e^{\rho'_j+\rho'_k+i(\xi_j+\xi_k)} - 1)\right|}{e^{\rho'_1 s_1 + \rho'_2 s_2 + \ldots + \rho'_n s_n}} d\vec{\xi} = O(1)\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}}.$$

Доказательство Леммы 9. Доказательство абсолютно аналогично доказательству Утверждения 15: сначала рассматриваемый интеграл сводится к интегралу гауссовского типа с помощью (4.68) и (4.71), затем используется Следствие 1. Остается только заметить, что $e^{-\vec{\rho}'^T(\vec{s}-\lambda\vec{d}) + A_2\vec{\rho}'^T Q\vec{\rho}'} = O(1)$. ■

4.3.3. Оценка незначительных частей

Мы продолжаем предполагать, что предположения Теоремы 5 выполнены и использовать обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε. Кроме того, в некоторых местах предполагается что n — достаточно большое: $n \geq n_{\min}$ для некоторого $n_{\min} = n_{\min}(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \varepsilon) > 0$. Для простоты, во всех таких местах используется одинаковое обозначение $n_{\min}$ (то есть $n_{\min}$ соответствует максимуму из всех ограничений).

Зафиксируем $t = n^{-1/2+\varepsilon}/2$. Пусть $n_0 = n_0(\vec{\xi})$, $n_1 = n_1(\vec{\xi})$, $n_2 = n_2(\vec{\xi})$ и $n_3 = n_3(\vec{\xi})$, где $\vec{\xi} \in U_n(\pi)$, обозначают числа ξ_j, принадлежащих областям $[-t, t]$, $[t, \pi - t]$, $[\pi - t, \pi] \cup [-\pi, -\pi + t]$ и $[-\pi + t, -t]$, соответственно. Пусть

$$|x|_{2\pi} = \min_{j \in \mathbb{Z}} |x + 2\pi j|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство треугольника:

$$|x + y|_{2\pi} \leq |x|_{2\pi} + |y|_{2\pi}. \tag{4.75}$$

Пусть S_1 обозначает вклад в интеграл S (см. (4.67)) таких $\vec{\xi}$, для которых или $n_1 \geq n^{1-\varepsilon}$, или $n_3 \geq n^{1-\varepsilon}$. В этом случае, используя Предложение 8, существуют по крайней мере $\mu n^{2-\varepsilon}$ попарно не пересекающихся путей в G нечетной длины, не превосходящей H, с концами в $[t, \pi - t]$ или $[-\pi + t, -t]$. В силу (4.75), в каждом из этих путей можно выбрать такое ребро $\{v_j, v_k\}$, что

$$|\xi_j + \xi_k|_{2\pi} \geq \frac{2t}{H}.$$

Принимая во внимание (4.69), имеем, что

$$\begin{aligned} &\left|1 + \lambda\left(e^{\rho_j + \rho_k + i(\xi_j + \xi_k)} - 1\right)\right| \leq \\ &\qquad \leq \left|1 + \lambda\left(e^{i(\xi_j + \xi_k)} - 1\right)\right| + O(n^{-1}) \leq e^{-c_1|\xi_j + \xi_k|^2_{2\pi} + O(n^{-1})} \end{aligned} \tag{4.76}$$

для некоторого $c_1 > 0$, зависящего только от β, γ, ϵ и ε. Для остальных ребер $\{v_j, v_k\}$, учитывая неравенство $\left|1 + \lambda\left(e^{i(\xi_j + \xi_k)} - 1\right)\right| \leq 1$, оцениваем:

$$\left|1 + \lambda\left(e^{\rho_j + \rho_k + i(\xi_j + \xi_k)} - 1\right)\right| = \exp(O(n^{-1})). \tag{4.77}$$

Используя Предложение 9 (оценки (3.57)), находим:

$$\begin{aligned} S_1 \le (2\pi)^n e^{-\vec{s}^T\vec{\rho}} \exp\left(-c_1 \frac{4t^2}{H^2}\mu n^{2-\varepsilon} + O(n^{-1})|EG|\right) = \\ = O\left(\exp\left(-cn^{1+\varepsilon}\right)\right) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}} \end{aligned} \qquad (4.78)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Пусть $n_{13} = n_{13}(\vec{\xi})$, где $\vec{\xi} \in U_n(\pi)$, обозначают число ξ_j, принадлежащих $[\pi/4, 3\pi/4] \cup [-3\pi/4, -\pi/4]$. Пусть S_2 обозначает вклад в интеграл S таких $\vec{\xi}$, не покрытых S_1, для которых $n_{13} \ge \frac{1}{2}n^\alpha$. Так как степень любой вершины не менее γn (см. оценку (3.56)), то существует по крайней мере $(\gamma n - n_1 - n_3)n_{13}$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$ таких, что

$$|\xi_j + \xi_k|_{2\pi} \ge \pi/4 - t.$$

Используя (4.76) для этих ребер и (4.77) для остальных, а также оценки (3.57), находим, что:

$$\begin{aligned} S_2 \le (2\pi)^n e^{-\vec{s}^T\vec{\rho}} \exp\left(-c_1(\pi/4 - t)^2(\gamma n - n_1 - n_3)n_{13} + O(n)\right) = \\ = O(\exp\left(-cn^{1+\alpha}\right)) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}} \end{aligned} \qquad (4.79)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Пусть S_3 обозначает вклад в интеграл S таких $\vec{\xi}$, не покрытых S_1 и S_2, для которых $n_0 \ge n^{1-\alpha/2}$ и $n_2 \ge n^{1-\alpha/2}$. Согласно определению (3.2), существует не менее $n^{1-\alpha/2}(i(G) - n_{13})$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$ таких, что $\xi_j \in [-\pi/4, \pi/4]$ и $\xi_k \in [3\pi/4, \pi] \cup [-\pi, -3\pi/4]$. Используя (4.76) для этих ребер и (4.77) для остальных, а также оценки (3.57), находим, что:

$$\begin{aligned} S_3 \le (2\pi)^n e^{-\vec{s}^T\vec{\rho}} \exp\left(-c_1(\pi/2)^2 n^{1-\alpha/2}(i(G) - n_{13}) + O(n)\right) = \\ = O\left(\exp\left(-cn^{1+\alpha/2}\right)\right) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}} \end{aligned} \qquad (4.80)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Для области интегрирования, не покрытой S_1, S_2 и S_3, мы получаем, что: $n_1, n_3 \le n^{1-\varepsilon}$ и либо $n_0 \le n^{1-\alpha/2}$, либо $n_2 \le n^{1-\alpha/2}$. Последние два случая эквивалентны, так как подынтегральное выражение в (4.67) является инвариантным относительно равномерного сдвига всех $\xi_j \to \xi_j + \pi$. Поэтому достаточно получить оценку для случая $n_2 \le n^{1-\alpha/2}$, а затем удвоить результат.

Пусть $S_4(r)$ обозначает вклад в интеграл S таких $\vec{\xi}$, не покрытых S_1, S_2, S_3, для которых ровно r из ξ_j не принадлежит $[-2t, 2t]$. Так как степень любой вершины не менее γn (см. оценку (3.56)), то существует по крайней мере $(\gamma n - n_1 - n_3)n_{13}$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$ таких, что $|\xi_j| \ge 2t$, $|\xi_k| \le t$ и, следовательно,

$$|\xi_j + \xi_k|_{2\pi} \ge t.$$

Пусть $\vec{\xi'} \in \mathbb{R}^{n-r}$. Используя (4.76) и (4.77), получаем, что

$$S_4(r) \le \frac{(2\pi)^r}{e^{(c_1 t^2 + O(n^{-1}))r(\gamma n - n_1 - n_2 - n_3)}} \sum_{G_r} \int\limits_{U_{n-r}(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\vec{s}^T \vec{\rho}} \left| F_{G_r}(\vec{\xi'}) \right| d\vec{\xi'},$$

$$\left| F_{G_r}(\vec{\xi'}) \right| = \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG_r} \left| 1 + \lambda \left(e^{\rho_j + \rho_k + i(\xi'_j + \xi'_k)} - 1 \right) \right|$$

где сумма по графам G_r, получающимся из G посредством удаления r вершин и всех смежных ребер и нумерация координат $\vec{\xi'} \in \mathbb{R}^{n-r}$ наследуется для удобства из $\vec{\xi}$. Используя Предложение 9 (оценки (3.60)) и оценку (3.47a), получаем, что при $n \ge n_{\min}$

$$q(G_r) \ge \gamma n - r, \qquad \det Q = O(c^r n^r) \det Q_r,$$

где константа $c > 0$ зависит только от γ, граф G_r получается из графа G посредством удаления r вершин и всех смежных ребер, $Q_r = Q(G_r)$. Комбинируя (4.69) и Лемму 9, находим, что при $n \ge n_{\min}$

$$\int\limits_{U_{n-r}(n^{-1/2+\varepsilon})} e^{-\vec{s}^T \vec{\rho}} \left| F_{G_r}(\vec{\xi'}) \right| d\vec{\xi'} = O(c_2^r) \frac{(2\pi)^{\frac{n-r}{2}}}{\lambda^{\frac{n-r}{2}} (1-\lambda)^{\frac{n-r}{2}} \sqrt{\det Q}}$$

для некоторого $c_2 > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε. Оценивая числом n^r выбор набора из r вершин, получаем, что при $n \geq n_{\min}$

$$S_4(r) = (2\pi)^r n^r e^{\left(c_1 t^2 + O(n^{-1})\right) r(\gamma n - n_1 - n_2 - n_3)} \frac{O(c_2^r)(2\pi)^{\frac{n-r}{2}}(cn)^{r/2}}{\lambda^{\frac{n-r}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n-r}{2}}\sqrt{\det Q}} =$$

$$= O(\exp\left(-c_3 r n^{2\varepsilon}\right)) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}}$$

для некоторого $c_3 > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε. Следовательно, при $n \geq n_{\min}$

$$\sum_{r=1}^{r_{\max}} S_4(r) = O(\exp\left(-c_3 n^{2\varepsilon}\right)) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}}. \tag{4.81}$$

где $r_{\max} \leq 2n^{1-\varepsilon} + n^{1-\alpha/2}$.

Комбинируя (4.78)-(4.81), мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 16. *Пусть все предположения Теоремы 5 выполнены. Тогда при $n \geq n_{\min}$*

$$S - 2S_0 = O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right) \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}}$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Теперь несложно завершить доказательство асимптотической формулы для числа помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин.

Доказательство Теоремы 5. Комбинируя Утверждения 15 и 16, мы получаем, что при $n \geq n_{\min}$

$$S = \left(1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})\right) 2e^{-K_{sg}} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\lambda^{\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det Q}},$$

$$K_{sg} = \frac{\vec{w}^T Q \vec{w}}{4} + \frac{(1-2\lambda)^2 \vec{w}^T \vec{1}}{12\lambda(1-\lambda)} + \frac{\vec{a}^T Q^{-1} \vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)} + \frac{(1-2\lambda)\vec{a}^T \vec{w}}{2\lambda(1-\lambda)}.$$

Подставляя вышеприведенную оценку S в формулу (4.67), мы получаем (4.65) для случая $n \geq n_{\min}(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \varepsilon) > 0$ и достаточно маленького $\varepsilon > 0$.

Утверждение Теоремы 5 для больших $\varepsilon > 0$ следует автоматически, так как является более слабым. Оценка (4.66) для $n \le n_{\min}$ выполняется при выборе достаточно большой константы C_{sg}. ∎

4.3.4. Наивная гипотеза

В этом подпараграфе мы определим, насколько соответствует действительности «наивная» оценка из п. 1.4.3:

$$\widehat{SG}(\vec{s},\lambda) = \lambda^{E}(1-\lambda)^{|EG|-E}\prod_{j=1}^{n}\binom{d_j}{s_j}.$$

Предположим, что все предположения Теоремы 5 выполнены. Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \le k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ и ε.

Используя формулу Стирлинга для факториалов, находим:

$$\begin{aligned}\binom{d_j}{s_j} &= \frac{d_j!}{s_j!(d_j-s_j)!} = \\ &= \frac{\left(1+O(n^{-2})\right)\left(\frac{d_j}{e}\right)^{d_j}\sqrt{2\pi d_j}\,e^{\frac{1}{12d_j}}}{\left(\frac{s_j}{e}\right)^{s_j}\sqrt{2\pi s_j}\,e^{\frac{1}{12s_j}}\left(\frac{d_j-s_j}{e}\right)^{d_j-s_j}\sqrt{2\pi(d_j-s_j)}\,e^{\frac{1}{12(d_j-s_j)}}}.\end{aligned}$$

Так как $a_j = s_j - \lambda d_j = O(1)$, получаем, что:

$$\frac{\left(\frac{d_j}{e}\right)^{d_j}}{\left(\frac{s_j}{e}\right)^{s_j}\left(\frac{d_j-s_j}{e}\right)^{d_j-s_j}} = \frac{\exp\left(-\frac{a_j^2}{2\lambda(1-\lambda)d_j}+O(n^{-2})\right)}{\lambda^{s_j}(1-\lambda)^{d_j-s_j}},$$

$$\frac{\sqrt{2\pi d_j}}{\sqrt{2\pi s_j}\sqrt{2\pi(d_j-s_j)}} = \frac{\exp\left(\frac{(1-2\lambda)a_j}{2\lambda(1-\lambda)d_j}+O(n^{-2})\right)}{\sqrt{2\pi d_j}\sqrt{\lambda(1-\lambda)}},$$

$$e^{\frac{1}{12d_j}-\frac{1}{12s_j}-\frac{1}{12(d_j-s_j)}} = \exp\left(\frac{1-\lambda+\lambda^2}{12\lambda(1-\lambda)d_j}+O(n^{-2})\right).$$

Следовательно,

$$\widehat{SG}(\vec{s},\lambda) = \big(1+O(n^{-1})\big)\left(\frac{e^{-\widetilde{K}_{sg}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\lambda^{E+\frac{n}{2}}(1-\lambda)^{|EG|-E+\frac{n}{2}}\sqrt{\det D}}\right),$$
$$\widetilde{K}_{sg} = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)\vec{w}^T\vec{1}}{12\lambda(1-\lambda)} + \frac{\vec{a}^T D^{-1}\vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)} + \frac{(1-2\lambda)\vec{a}^T\vec{w}}{2\lambda(1-\lambda)}, \tag{4.82}$$

где $\vec{w} = (d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots, d_n^{-1})^T$, а D — диагональная $n\times n$ матрица с элементами на диагонали $D_{jj} = d_j$.

Комбинируя (4.82) и Теорему 5, получаем следующее предложение:

Предложение 11. *Пусть предположения Теоремы 5 выполнены. Тогда*

$$\frac{SG(\vec{s})}{\widehat{SG}(\vec{s},\lambda)} = \Big(1+O(n^{-1/2+\varepsilon})\Big)\frac{2e^{K_\Delta}\sqrt{\det D}}{\sqrt{\det Q}},$$
$$K_\Delta = -\frac{\vec{w}^T Q\vec{w}}{4} + \frac{\vec{w}^T\vec{1}}{4} + \frac{\vec{a}^T(D^{-1}-Q^{-1})\vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)}.$$

Замечание. В случае полного графа K_n, имеем:

$$\frac{2\sqrt{\det D}}{\sqrt{\det Q}} = \frac{2\sqrt{(n-1)^n}}{\sqrt{(2n-2)(n-2)^{n-1}}} = \sqrt{2e} + O(n^{-1}).$$

Если $\lambda = E/|EK_n|$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Поэтому:

$$K_\Delta = -\frac{\vec{w}^T Q\vec{w}}{4} + \frac{\vec{w}^T\vec{1}}{4} + \frac{\vec{a}^T(D^{-1}-Q^{-1})\vec{a}}{2\lambda(1-\lambda)} = -\frac{1}{4} + O(n^{-1}).$$

Используя Предложение 11, находим, что

$$SK_n(\vec{s}) \sim \sqrt{2}e^{1/4}\widehat{SK_n}(\vec{s},\lambda).$$

Полученная формула хорошо согласуется с результатом из [70], приведенным в п. 1.4.3 (формула (1.12)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1. Аналитический подход, использованный в работах [67], [69], [70] для случая полного графа, адаптирован для существенно более широких классов графов со спектральными ограничениями. Получены новые явные асимптотические формулы для эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин.

2. Получены новые свойства классов графов со спектральными ограничениями. В частности, доказано, что в некотором вероятностном смысле практически все графы принадлежат рассматриваемым классам.

3. При условии асимптотического диагонального доминирования соответствующей матрицы квадратичной формы получена асимптотика интеграла гауссовского типа с полиномиальным возмущением в показателе экспоненты.

Полученные результаты об асимптотике эйлеровых ориентаций, эйлеровых циклов и помеченных подграфов с заданной последовательностью степеней вершин в графах со спектральными ограничениями интересны по двум причинам:

- Рассмотренные задачи являются классическими задачами теории перечисления графов. Новые асимптотические формулы позволяют оценить искомый ответ практически для всех графов (в некотором вероятностным смысле).

- Рассмотренные задачи считаются трудными в теории сложности вычислений, поэтому полученные легковычислимые явные формулы представляют особый интерес с алгоритмической точки зрения.

Доказанная в работе теорема об асимптотике интегралов гауссовского типа является универсальным инструментом, который полезен при получении асимптотических оценок для других подобных задач перечисления.

Автор выражает благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. Тарасову С.П. за постановки задач и постоянное внимание к работе, а также профессору McKay B.D. за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00398а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры// М.: Наука, 1983. 335 с.

2. Исаев М.И. Асимптотика числа эйлеровых циклов в плотных графах// Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики», Управление и прикладная математика, М.: МФТИ, 2010, Т. 1, С. 72–73.

3. Исаев М.И. Свойства графов с большой алгебраической связностью// Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Управление и прикладная математика, М.: МФТИ, 2011, Т. 1, С. 53–54.

4. Исаев М.И. Асимптотическая формула для числа эйлеровых ориентаций в графах с большой алгебраической связностью// Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова, М.: МГУ, 2012, С. 288.

5. Исаев М.И. Задача перечисления эйлеровых циклов в графах// Труды 55-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Управление и прикладная математика, М.: МФТИ, 2012, Т. 1, С. 155–156.

6. Исаев М.И. Асимптотика числа подграфов с заданными степенями вершин в недвудольных графах// Тезисы международной конференции «Алгебра и комбинаторика», посвященной 60-летию А. А. Махнева, Екатеринбург: изд. «УМЦ- УПИ», 2013, С. 58–60.

7. Исаев М.И. Оценка числа подграфов с заданными степенями вершин// Тезисы международной конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций», Новосибирск: изд. Ин-та математики, 2013, С. 106.

8. Исаев М.И. Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций в графах// Математические заметки, 2013, Т. 93, В. 6, С. 828–843.

9. Исаев М.И., Исаева К.В. О классе графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами// Труды Московского Физико-Технического Института, 2013, Т. 5, № 3, С. 44–54.

10. Ландо С.К., Звонкин А.К. Графы на поверхностях и их приложения// Москва: МЦНМО, 2010, 480 с.

11. Ланкастер П. Теория матриц// М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973, 280 с.

12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения// М.: Мир, 1967, в 2-х томах.

13. Чеботаев П.Ю., Шамис Е.В. Матричная теорема о лесах и измерение связей в малых социальных группах// Автомат. и телемех., 1997, В. 9, С. 125—137.

14. Aardenne-Ehrenfest T., Bruijn N.G. Circuits and trees in oriented linear graphs// Simon Stevin, 1951, V. 28, P. 203–217.

15. Anstee R. An algorithmic proof of Tutte's f-factor theorem// J. Algorithms, 1985, V. 6, P. 112–131.

16. Arenas A., Diaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks// Physics Reports, 2008, V. 469, Iss. 3, P. 93–153.

17. Arora S., Karger D., Karpinski M. Polynomial Time Approximation Schemes for Dense Instances of NP-Hard Problems// Proc. 27th ACM STOC, 1995, P. 284–293; in J. Comput. Syst. Sci., 1999, V. 58, P. 193–210.

18. Bai F., Zhang J. An improved fully polynomial randomized approximation scheme(FPRAS) for counting the number of Hamiltonian cycles in dense digraphs// Theor. comput. sci., 2011, V. 412, P. 419–429.

19. Barvinok A., Hartigan J. An asymptotic formula for the number of non-negative integer matrices with prescribed row and column sums// Transactions of the American Mathematical Society, 2012, V. 364, P. 4323–4368.

20. Barvinok A., Hartigan J. The number of graphs and a random graph with a given degree sequence// Random Structures and Algorithms, 2013, V. 42, Iss. 3, P. 301—348.

21. Bezáková I., Štefankovič D., Vazirani D., Vigoda E. Accelerating simulated annealing for the permanent and combinatorial counting problems// SIAM Journal on Computing, 2008, V. 37(5), P. 1429–1454.

22. Bollobas B. Random Graphs// Academic Press, London, 1985, 498 p.

23. Brightwell G., Winkler P. Note on Counting Eulerian Circuits// Proceedings of the 7th ALENEX and 2nd ANALCO, 2005, P. 259–262. arXiv:cs/0405067.

24. Broder A.Z. How hard is it to marry at random? (On the approximation of the permanent)// In Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), ACM, New York, 1986, P. 50–58.

25. Chebulu P., Cryan M., Martin R. Exact counting of Euler tours for generalized series-parallel graphs// Journal of Discrete Algorithms, 2012, V. 10, P. 110–122.

26. Chung F., Spectral Graph Theory// (CBMS Regional Conference Series in Mathematics, N. 92), American Mathematical Society, 1997, 207 p.

27. Creignou N., Hermann M. Complexity of generalized satisfiability counting problems// Information and Computation, 1996, V. 25(1), P. 1—12.

28. Cvetković D., Doob M., Sachs H. Spectra of Graphs// Academic Press, New York, 1980, 447 p.

29. Cvetković D. Signless Laplacians and line graphs// Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., 2005, V. 131, P. 85–92.

30. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S.K. Signless Laplacians of finite graphs// Linear Algebra and its Applications, 2007, V. 423, Iss. 1, , P. 155–171.

31. Cvetković D., Simić S.K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I// Publ. Inst. Math. (Beograd), 2009, V. 85(99), P. 19–33.

32. Cvetković D., Simić S.K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II// Linear Algebra Appl., 2010, V. 432, P. 2257–2272.

33. Cvetković D., Simić S.K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, III// Appl. Anal. Discrete Math., 2010, V. 4, P. 156–166.

34. Creed P. Counting and sampling problems on Eulerian graphs// PhD thesis, University of Edinburgh, 2010.

35. Das K.C. On conjectures involving second Largest signless Laplacian eigenvalue of graphs// Linear Algebra Appl., 2010, V. 432, P. 3018–3029.

36. Dyer M., Goldberg L.A., Greenhill C., Jerrum M. On the relative complexity of approximate counting problems// APPROX 2000, Proceedings of the Third International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, 2000, P. 108–119.

37. Erdős P., Gallai T. Graphs with given degrees of vertices// Mat. Lapok, 1960, V. 11, P. 264-274.

38. Erdős P., Rényi A. On random graphs I// Publ. Math. Debrecen. 1959, V. 6., P. 290–297.

39. Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis// Comm. Acad. Sci. Imperialis Petropolitane, 1736, V. 8, P. 128–140.

40. Fallata S., Fan Y.-Z. Bipartiteness and the least eigenvalue of signless Laplacian of graphs// Linear Algebra and its Applications, 2012, V. 436, Iss. 9, P. 3254–3267.

41. Fellows M.R. Parameterized Complexity: The Main Ideas and Some Research Frontiers// Algorithms and Computation, Lecture Notes in Computer Science, 2001, V. 2223, P. 291–307.

42. Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs// Czech. Math. J., 1973, V. 23(98), P. 298–305.

43. Fiedler M. Laplacian of graphs and algebraic connectivity// Combinatorics and Graph Theory, 1989, V. 25, P. 57–70.

44. Flajolet P., Sedqewick R. Analytic Combinatorics// Cambridge University Press, 2009, 824 p.

45. Flum J., Grohe M. The Parameterized Complexity of Counting Problems// SIAM Journal on Computing archive, 2004, V. 33, Iss. 4, P. 892–922.

46. Ford L.R., Fulkerson D.R. Flows in Networks// Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962, 194 p.

47. Geelen J., Gerards B., Reed B., Seymour P., Vetta A. On the odd-minor variant of Hadwiger's conjecture// Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2009, V. 99, P. 20–29.

48. Gerards A.M.H. Odd paths and odd circuits in planar graphs with two odd faces// CWI. Department of Operations Research, Statistics, and System Theory [BS], 1992, N. R9218, P. 1-8.

49. Gilbert E.N. Random Graphs// Annals of Mathematical Statistics, 1959. V. 30(4), P. 1141–1144.

50. Greenhill C., McKay B.D. Random dense bipartite graphs and directed graphs with specified degrees// Random Struct. Alg., 2009, V. 35, P. 222–249.

51. Haemers W., Spence E. Enumeration of cospectral graphs// Eur. J. Combin., 2004, V. 25, P. 199–211.

52. Harary F., Palmer E. Graphical Enumeration// Academic Press, New York, 1973, 271 p.

53. He C.-X., Pan H. The smallest signless Laplacian eigenvalue of graphs under perturbation// Electronic Journal of Linear Algebra, 2012, V. 23, P. 473–482.

54. Hoeffding W., Probability inequalities for sums of bounded random variables// J. Amer. Statist. Assoc., 1963, V. 58, P. 13–30.

55. Hoory S., Linial N., Wigderson A. Expander graphs and their applications// Bulletin of the AMS, 2006, V. 43(4), P. 439–561.

56. Isaev M.I. Asymptotic behaviour of the number of Eulerian circuits// Electronic Journal of Combinatorics, 2011, V. 18(1), paper N. 219.

57. Jaeger F., Vertigan D.L., Welsh D.J.A. On the Computational Complexity of Jones and Tutte Polynomials// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1990, V. 108(35), 35–53.

58. Jerrum M., Sinclair A., Vigoda E. A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries// J. ACM, 2004, V. 51, P. 671–697.

59. Jerrum M., Valiant L.G., Vazirani V.V. Random Generation of Combinatorial Structures from a Uniform Distribution// Theor. Comput. Sci, 1986, V. 43, P. 169–188.

60. Kawarabayashi K., Kobayashi Y. Edge-disjoint Odd Cycles in 4-edge-connected Graphs// In Proceedings of STACS. 2012, P. 206–217.

61. Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird// Ann. Phys. Chem. 1847, V. 72, P. 497–508. Translated by O'Toole J.B. in I.R.E. Trans. Circuit Theory, CT-5, 1958, N. 4.

62. Las Vergnas M. Le polynôme de Martin d'un graphe eulérien// Ann. Discrete Math., 1983, V. 17, P. 397–411.

63. Las Vergnas M. An upper bound for the number of Eulerian orientations of a regular graph// Combinatorica, 1990, ISSN 1439–6912, V. 10, N. 1, P. 61–65.

64. Lovasz L. Random walks on graphs: A survey// Combinatorics, Paul Erdös is eighty, V. 2 (Keszthely, 1993), Janos Bolyai Math. Soc., 1996, V. 2 of Bolyai Soc. Math. Stud., P. 353–397.

65. Lyons A. Polynomial-Time Approximation of the Permanent// Course project for MATH 100: Markov Chain Monte Carlo (Topics in Probability Theory). Instructor: Peter Winkler, 2011, 7 p.

66. McKay B.D. Applications of a technique for labelled enumeration// Congressus Numerantium, 1983, V. 40, P. 207–221.

67. McKay B.D. The asymptotic numbers of regular tournaments, eulerian digraphs and eulerian oriented graphs// Combinatorica, 1990, V. 10, N. 4, P. 367–377.

68. McKay B.D. Subgraphs of dense random graphs with specified degrees// Combinatorics, Probability and Computing, 2011, V. 20, P. 413–433.

69. McKay B.D., Robinson R.W. Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph// Combinatorics, Probability and Computing, December 1998, V. 7, N. 4, P. 437–449.

70. McKay B.D., Wormald N.C. Asymptotic enumeration by degree sequence of graphs of high degree// European J. Combin., 1990, V. 11, P. 565–580.

71. McKay B.D., Wormald N.C. Asymptotic enumeration by degree sequence of graphs with degrees $o(n^{1/2})$//, Combinatorica, 1991, V. 11, Iss. 4, P. 369–382.

72. Menger K. Zur allgemeinen Kurventheorie// Fund. Math. 10, 1927, P. 96–115.

73. Mihail M., Winkler P. On the number of Eulerian orientations of a graph// Algorithmica, 1996, V. 16, P. 402—414.

74. Mohar B. Isoperimetric numbers of graphs// J. Combin. Theory, Ser. B, 1989, V. 47, P. 274–291.

75. Mohar B. The Laplacian spectrum of graphs// Graph Theory, Combinatorics, and Applications, 1991, V. 2, Ed. Alavi Y., Chartrand G., Oellermann O.R., Schwenk A.J., P. 871–898.

76. Moon J.W. Counting labelled trees// Canadian Mathematical Congress, Montreal, Que., 1970, 113 p.

77. Plummer M.D. Graph factors and factorization: 1985–2003: A survey// Discrete Mathematics, 2007, V. 307, P. 791–821.

78. Pólya G., Read R.C. Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds// Springer-Verlag, New York, 1987, 160 p.

79. Schrijver A. Bounds on the number of Eulerian orientations// Combinatorica, 1983, V. 3 , P. 375–380.

80. Schrijver A., Seymour P. Packing Odd Paths// Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1994, V. 62, Iss. 2, P. 280–288.

81. Simon B. The $P(\phi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory// Princeton Univ. Press, 1974, 392 p.

82. Smith C.A.B., Tutte W.T. On unicursal paths in a network of degree 4// Amer.Math. Monthly, 1941, V. 48, P. 233–237.

83. Spielman D. Constructing error-correcting codes from expander graphs// Emerging Applications of Number Theory, The IMA volumes in Mathematics and its Applications, 1996, V. 109, P. 591–600.

84. Stanley R.P. Enumerative Combinatorics, Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1986, V. 1, 640 p., 1999, V. 2, 585 p.

85. Tetali P., Vempala S. Random sampling of Euler tours// Algorithmica, 2001, V. 30, P. 376–385.

86. Toda S. PP is as hard as the polynomial-time hierarchy// SIAM Journal on Computing, 1991, V. 20(5), P. 865–877.

87. Tutte W.T. The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles// Proc. Cambridge Philos. Soc., 1948, V. 44, P. 463-482.

88. Tutte W.T. A short proof of the factor theorem for finite graphs// Canad. J. Math., 1954, V. 6, P. 347–352.

89. VALIANT L.G. The complexity of computing the permanent// Theoretical Computer Science, 1979, V. 8(2), P. 189–201.

90. WELSH D. J. A. The Computational Complexity of Some Classical Problems from Statistical Physics// Disorder in Physical Systems, Oxford University Press, 1990, P. 307–321.

91. WELSH D. J. A. On the Tutte Map// Lecture Notes, DIMACS, May 1991/Dagstuhl, June 1991.

Приложение А.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4

Мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq k|g|$ для некоторой константы $k > 0$, зависящей только от a, b, c, r, s, ε.

Пусть

$$\vec{\phi}(\vec{\theta}) = (\phi_1(\vec{\theta}), \phi_2(\vec{\theta}), \ldots, \phi_n(\vec{\theta})) = A\vec{\theta}. \tag{A.1}$$

Комбинируя (2.4) и (2.12), мы находим, что:

$$\begin{aligned} \delta_j = \delta_j(\vec{\theta}) = \theta_j - \phi_j(\vec{\theta}) \quad \text{не зависит от } \theta_j, \\ \|\vec{\nu}_j\|_\infty = O(n^{-1}), \qquad \|\vec{\eta}_j\|_\infty = O(n^{-1}), \\ \text{где } \delta_j = \vec{\nu}_j^T \vec{\theta} = \vec{\eta}_j^T \vec{\phi}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Для доказательства Леммы 4 нам потребуются следующие три леммы:

Лемма 10. *Пусть* $\vec{d}, \vec{d'} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ *таковы, что* $\|\vec{d}\|_1 + \|\vec{d'}\|_1 \leq 3s$. *Тогда:*

$$\begin{aligned} < \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\ldots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n} >_r = < \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\ldots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n} > + \\ + O\left(\exp(-c' n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.3}$$

где $c' > 0$ *зависит только от* r, s, ε.

Лемма 11. *Пусть* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varepsilon'' > 0$, $p \leq 1$ *и* $p > \varepsilon'' + (3s+1)\varepsilon$. *Пусть* $T(\vec{\theta}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет* $\frac{\partial T(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} = O(n^{-p+\varepsilon''})$ *в* $U_n(rn^{\varepsilon})$. *Тогда для любого* $\vec{d}, \vec{d'} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ *такого что* $\|\vec{d}\|_1 + \|\vec{d'}\|_1 \leq 3s$ *и* $d'_j = 0$,

- *если d_j — четное:*

$$\begin{aligned} &< \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\dots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n}e^T >_r= \\ &\quad = \kappa_{d_j/2} < \phi_1^{d_1^{(j)}}\phi_2^{d_2^{(j)}}\dots\phi_n^{d_n^{(j)}}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n}e^T >_r + \\ &\quad + O(n^{-p+(3s+1)\varepsilon+\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} < \phi_j^{d_j}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n} >_r = \kappa_{d_j/2} < \theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n} >_r + \\ + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.5}$$

- *если d_j — нечетное:*

$$\begin{aligned} &< \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\dots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n}e^T >_r= \\ &\quad = O(n^{-p+(3s+1)\varepsilon+\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$< \phi_j^{d_j}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n} >_r = O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \tag{A.7}$$

где κ_l определяется в (2.31) *и* $c' = c'(r,a,b,c,s,\varepsilon,\varepsilon'') > 0$.

Лемма 12. *Пусть $\varepsilon'' > 0$, $1/2 \le p \le 1$ зафиксированы и $\varepsilon'' + (3s+1)\varepsilon \le 1/2$. Пусть $T(\vec\theta) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ удовлетворяет $\left\|\frac{\partial T(\vec\theta)}{\partial\vec\theta}\right\|_\infty = O(n^{-p+\varepsilon''})$ в $U_n(rn^\varepsilon)$. Пусть $\delta = \delta(\vec\theta) = \vec\eta^T\vec\phi(\vec\theta)$ для некоторого $\vec\eta \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec\eta\|_\infty = O(n^{-1})$. Тогда, для любого $l \in \mathbb{N}$ и $\vec d, \vec d' \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ такого, что $\|\vec d\|_1 + \|\vec d'\|_1 + l \le 3s$,*

- *для $l \ge 1$:*

$$\begin{aligned} &< \delta^l\, \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\dots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n}e^T >_r= \\ &\quad = O(n^{-p+(3s+1)\varepsilon+\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.8}$$

- *для $l \ge 2$: если $T(\vec\theta)$ — полином, $\deg T \le s$, $h_1(T) \le n^{1-p+(1-s)\varepsilon+\varepsilon''}$, и $\|\vec d\|_1 + \|\vec d'\|_1 + l \le 2s$,*

$$\begin{aligned} &< \delta^l\, \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\dots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\dots\theta_n^{d'_n}e^T >_r= \\ &\quad = O(n^{-1+(3s+2)\varepsilon+2\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{aligned} \tag{A.9}$$

- *для* $l \geq 3$*:*

$$< \delta^l \, \theta_1^{d'_1} \theta_2^{d'_2} \dots \theta_n^{d'_n} >_r = O(n^{-2+(3s+1)\varepsilon}) < 1 >, \tag{A.10}$$

где $c' = c'(a, b, c, r, s, \varepsilon, \varepsilon'') > 0$.

Докажем сначала эти три леммы. Согласно (2.4) имеем, что $A = I + X$, $X_{jj} = 0$, следовательно

$$g_j(\vec{\theta}) = \vec{\theta}^T A \vec{\theta} - \phi_j^2(\vec{\theta}) \text{ не зависит от } \theta_j. \tag{A.11}$$

Используя (2.11), (A.11) и оценивая незначительные части гауссовского интеграла следующего типа:

$$\int |x|^{k_1} e^{-(x-k_2)^2} dx, \tag{A.12}$$

находим, что для любого $\vec{d} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $\|\vec{d}\|_1 \leq 3s$,

$$\begin{gathered} < |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| > = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| \, e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| \, e^{-\,g_1(\theta_2, \dots, \theta_n)} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\theta_1|^{d_1} e^{-\phi_1(\vec{\theta})^2} d\theta_1 \right) d\theta_2 \dots d\theta_n \\ = \big(1 + O\left(\exp(-c' n^{2\varepsilon})\right)\big) \int\limits_{|\phi_1(\vec{\theta})| \leq r' n^{\varepsilon}} |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| \, e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta}, \end{gathered} \tag{A.13}$$

где $r' = r / \|A^{-1}\|_\infty$ и $c' = c'(r, s, \varepsilon) > 0$. Комбинируя выражения, аналогичные (A.13), для $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n$, мы получаем, что:

$$\begin{gathered} \int\limits_{||\vec{\phi}(\vec{\theta})||_\infty > r' n^{\varepsilon}} |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| \, e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = \\ = O\left(n \exp(-c' n^{2\varepsilon})\right) < |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| > = \\ = O\left(\exp(-c'' n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \end{gathered} \tag{A.14}$$

где $c'' = c''(r, s, \varepsilon) > 0$. Следовательно,

$$< |\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}| >_{\mathbb{R}^n \setminus U_n(r n^{\varepsilon})} = O\left(\exp(-c'' n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \tag{A.15}$$

Доказательство Леммы 10. Комбинируя (2.11) и неравенство

$$\left(\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n}\right)^m \leq \frac{|x_1|^m + |x_2|^m + \ldots + |x_n|^m}{n}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{A.16}$$

мы находим, что:

$$\begin{aligned} |\phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\ldots\phi_n^{d_n}| = O(1)\left(|\phi_1| + |\phi_2| + \ldots + |\phi_n|\right)^{\|\vec{d}\|_1} = \\ = O(1)\left(|\theta_1| + |\theta_2| + \ldots + |\theta_n|\right)^{\|\vec{d}\|_1} = \\ = O(n^{\|\vec{d}\|_1 - 1})\left(|\theta_1|^{\|\vec{d}\|_1} + |\theta_2|^{\|\vec{d}\|_1} + \ldots + |\theta_n|^{\|\vec{d}\|_1}\right). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Используя (A.15) и (A.17), получаем, что:

$$\begin{aligned} < |\phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\ldots\phi_n^{d_n}\theta_1^{d'_1}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n}| >_{\mathbb{R}^n\setminus U_n(rn^\varepsilon)} = \\ = O\left(n^{\|\vec{d}\|_1}\exp(-c''n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.18}$$

Оценка (A.3) следует из (A.18). ■

Доказательство Леммы 11. Для простоты положим $j = 1$, поэтому $d'_1 = 0$. Обозначим

$$\tilde{\phi}_j(\vec{\theta}) = \phi_j(\vec{\theta}^{(1)}) = \phi_j(0, \theta_2, \ldots, \theta_n). \tag{A.19}$$

Используя (2.12), получаем, что:

$$\begin{aligned} < \phi_1^{d_1}\phi_2^{d_2}\ldots\phi_n^{d_n}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n}e^T >_r = < \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\ldots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d'_2}\ldots\theta_n^{d'_n}e^T >_r + \\ + O(n^{-1+3s\varepsilon}) < |e^T| >_r . \end{aligned} \tag{A.20}$$

Пусть

$$\begin{array}{ll} \tilde{T}(\vec{\theta}) \equiv T(\vec{\theta}^{(1)}), & \text{если } \ \vec{\theta}^{(1)} \in U_n(rn^\varepsilon), \\ \tilde{T}(\vec{\theta}) \equiv 0, & \text{в остальных случаях.} \end{array} \tag{A.21}$$

Заметим, что $\tilde{T}(\vec{\theta})$ не зависит от θ_1. Используя теорему Лагранжа о среднем значении, мы находим, что:

$$T(\vec{\theta}) - \tilde{T}(\vec{\theta}) = O(n^{-p+\varepsilon+\varepsilon''}) \quad \text{для } \theta \in U_n(rn^\varepsilon). \tag{A.22}$$

Следовательно, имеем:

$$
\begin{aligned}
&< \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{T} >_r = \\
&= < \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}} >_r + O(n^{-p+(3s+1)\varepsilon+\varepsilon''}) < |e^{T}| >_r .
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

Заметим, что:

$$
\begin{aligned}
&< \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}} >= \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}-g_1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^{d_1}e^{-\phi_1(\vec{\theta})^2}d\theta_1\right)d\theta_2\dots d\theta_n = \\
&= \begin{cases} \kappa_{d_1/2} < \tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}} > & \text{для четного } d_1, \\ 0 & \text{для нечетного } d_1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

Комбинируя (A.24) с (A.3), мы получаем (A.5) и (A.7).

Используя (A.20) - (A.24), мы находим, что для того, чтобы доказать (A.4) и (A.6), достаточно показать, что:

$$
\begin{aligned}
< \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}} >=< \phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}} >_r + \\
+O(\exp(-c'n^{2\varepsilon}))\left(< |e^{\tilde{T}}| >_r + < 1 >\right)
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

для некоторого $c' = c'(r, a, b, c, s, \varepsilon, \varepsilon'') > 0$. Используя (A.3) и (A.21), мы получаем, что:

$$
< |\phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}}| >_{\vec{\theta}^{(1)}\notin U_n(rn^{\varepsilon})} = O(\exp(-c'n^{2\varepsilon})) < 1 > . \tag{A.26}
$$

Аналогичным образом как в (A.13), имеем:

$$
\begin{aligned}
< |\phi_1^{d_1}\tilde{\phi}_2^{d_2}\dots\tilde{\phi}_n^{d_n}\theta_2^{d_2'}\dots\theta_n^{d_n'}e^{\tilde{T}}| >_{|\phi_1(\vec{\theta})|>r'n^{\varepsilon}} = \\
= O(\exp(-c'n^{2\varepsilon})) < |e^{\tilde{T}}| >,
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

где $r' = r/\|A^{-1}\|_\infty$. Используя (2.4), (2.12), мы замечаем, что для $j = 2, \dots, n$

$$
|\phi_j(\vec{\theta})| > r'n^{\varepsilon} \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \vec{\theta}^{(1)} \notin U_n(rn^{\varepsilon}) \\ \text{или} \\ |\theta_1| \geq \frac{r'n^{\varepsilon}}{|(A^{-1})_{1j}|} - O(r'n^{\varepsilon}) \\ \Downarrow \\ |\phi_1| \geq \frac{r'n^{\varepsilon}}{O(n^{-1})} - O(r'n^{\varepsilon}). \end{array}\right. \tag{A.28}
$$

Комбинируя (A.26) - (A.28), получаем, что для $j = 2, \ldots, n$:

$$< |\phi_1^{d_1} \tilde{\phi}_2^{d_2} \ldots \tilde{\phi}_n^{d_n} \theta_2^{d'_2} \ldots \theta_n^{d'_n} e^{\tilde{T}}| >_{|\phi_j(\vec{\theta})| > r' n^{\varepsilon}} = \\ = O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) \Big(< |e^{\tilde{T}}| > + < 1 > \Big), \tag{A.29}$$

где $c' = c'(a, b, c, r, s, \varepsilon, \varepsilon'') > 0$. Используя (A.27) и (A.28), мы находим, что:

$$< |\phi_1^{d_1} \tilde{\phi}_2^{d_2} \ldots \tilde{\phi}_n^{d_n} \theta_2^{d'_2} \ldots \theta_n^{d'_n} e^{\tilde{T}}| >_{\|\vec{\theta}\|_\infty > r n^{\varepsilon}} = \\ = O(1) < |\phi_1^{d_1} \tilde{\phi}_2^{d_2} \ldots \tilde{\phi}_n^{d_n} \theta_2^{d'_2} \ldots \theta_n^{d'_n} e^{\tilde{T}}| >_{\|\vec{\phi}(\vec{\theta})\|_\infty > r' n^{\varepsilon}} = \\ = O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) \Big(< |e^{\tilde{T}}| > + < 1 > \Big) \tag{A.30}$$

и, в частности (если положить $\vec{d} = \vec{d'} = \vec{0}$),

$$< |e^{\tilde{T}}| >_{\mathbb{R}^n \setminus U_n(r n^{\varepsilon})} = O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) \Big(< |e^{\tilde{T}}| > + < 1 > \Big). \tag{A.31}$$

Комбинируя (A.30) и (A.31), мы получаем (A.25). Это завершает доказательство Леммы 11. ∎

Доказательство оценки (A.8). Пусть $l \geq 1$. Используя (A.6), мы находим, что для $j \notin \operatorname{supp} \vec{d} \cup \operatorname{supp} \vec{d'}$

$$< \phi_j \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \ldots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \ldots \theta_n^{d'_n} e^T >_r = \\ = O(n^{-p + (3s+1)\varepsilon + \varepsilon''}) < |e^T| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \tag{A.32}$$

Используя $\delta = \eta_1 \phi_1 + \eta_2 \phi_2 + \ldots + \eta_n \phi_n$, $\|\vec{\eta}\|_\infty = O(n^{-1})$, несколько раз (A.32) и принимая во внимание, что $p \leq 1$, мы получаем:

$$< \delta\, \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \ldots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \ldots \theta_n^{d'_n} e^T >_r = \\ = O(n^{-p + (3s+1)\varepsilon + \varepsilon''}) < |e^T| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \tag{A.33}$$

Раскрывая скобки в $\delta^{l-1} = (\eta_1 \phi_1 + \eta_2 \phi_2 + \ldots + \eta_n \phi_n)^{l-1}$ и используя (A.33) для всех слагаемых, мы получаем (A.8). ∎

Доказательство оценки (A.9). Пусть $l \geq 2$. Заметим, что

$$T^{(j)}(\vec{\theta}) = T(\vec{\theta}) - T(\vec{\theta}^{(j)}) = O(n^{-p+\varepsilon+\varepsilon''}), \quad \theta \in U_n r n^{\varepsilon}. \tag{A.34}$$

Следовательно, мы имеем:

$$\begin{aligned} &< \phi_j \delta^{l-1}\, \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^T >_r = \\ &\qquad =< \phi_j \delta^{l-1}\, \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^{T-T^{(j)}} >_r + \\ &\qquad + < \phi_j \delta^{l-1}\, T^{(j)} \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^T >_r + \\ &\qquad + O(n^{-2p+(3s+2)\varepsilon+2\varepsilon''}) < |e^T| >_r . \end{aligned} \tag{A.35}$$

Используя (2.26) вместе с $h_1(T) \leq n^{1-p+(1-s)\varepsilon+\varepsilon''}$ и несколько раз (A.8) для каждого монома в $T^{(j)}$, мы получаем, что:

$$\begin{aligned} &< \delta^{l-1}\, \phi_j T^{(j)} \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^T >_r = \\ &\qquad = O(n^{-2p+(3s+2)\varepsilon+2\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.36}$$

Для $j \notin \operatorname{supp} \vec{d} \cup \operatorname{supp} \vec{d'}$, используя (A.6) with $T - T^j$, $p = 1$, $\varepsilon'' = 0$ и $\delta = \vec{\eta}^T \vec{\phi}$, $\|\vec{\eta}\|_\infty = O(n^{-1})$, мы находим, что:

$$\begin{aligned} &< \phi_j \delta^{l-1}\, \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^{T-T^{(j)}} >_r = \\ &\qquad = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < |e^{T-T^{(j)}}| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 >= \\ &\qquad = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < |e^T| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.37}$$

Комбинируя (A.35) - (A.37) и принимая во внимание $p \geq 1/2$, мы получаем, что для любого $j \notin \operatorname{supp} \vec{d} \cup \operatorname{supp} \vec{d'}$

$$\begin{aligned} &< \phi_j \delta^{l-1}\, \phi_1^{d_1} \phi_2^{d_2} \dots \phi_n^{d_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} e^T >_r = \\ &\qquad = O(n^{-1+(3s+2)\varepsilon+2\varepsilon''}) < |e^T| >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.38}$$

Используя (A.38) несколько раз, мы получаем (A.9). ■

Доказательство оценки (A.10). Пусть $l \geq 3$. Используя (2.4), заметим, что:

$$\begin{aligned} \|\vec{\eta}\| = O(n^{-1}), \quad \|\vec{\nu}\| = O(n^{-1}), \\ \delta = \vec{\eta}^T \vec{\phi} = \vec{\eta}^T A \vec{\theta} = \vec{\nu}^T \vec{\theta}. \end{aligned} \tag{A.39}$$

Используя (A.3), (A.8) с $T \equiv 0$, $p = 1$ и $\varepsilon'' = 0$, мы получаем, что:

$$\sum_{k_1 \in \text{ supp } \vec{d}'} \eta_{k_1} < \phi_{k_1} \delta^{l-1} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} >_r = O(n^{-2+3(s+1)\varepsilon}) < 1 > . \tag{A.40}$$

Для $k_1 \notin \operatorname{supp} \vec{d}'$, используя (A.7), мы получаем, что:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_l \\ k_1 \notin \{k_2, \dots, k_l\} \cup \operatorname{supp} \vec{d}'}} \eta_{k_1} \nu_{k_2} \dots \nu_{k_l} < \phi_{k_1} \theta_{k_2} \dots \theta_{k_n} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} >_r = \\ = O(\exp(-c_5 n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.41}$$

Ипользуя вновь (A.3) и (A.8) с $T \equiv 0$, $p = 1$ и $\varepsilon'' = 0$, мы получаем, что:

$$\sum_{k_1 \notin \text{ supp } \vec{d}'} \eta_{k_1} \nu_{k_1} < \phi_{k_1} \theta_{k_1} \delta^{l-2} \theta_1^{d'_1} \dots \theta_n^{d'_n} >_r = O(n^{-2+3(s+1)\varepsilon}) < 1 > . \tag{A.42}$$

Комбинируя (A.40) - (A.42), мы получаем (A.10). ■

Теперь мы готовы перейти к доказательству оценок Леммы 4.

Доказательство оценки (2.38). Используя (A.3) и (A.8) с $T \equiv 0$, $p = 1$, $\varepsilon'' = 0$, мы заметим, что для любого $l = 1, 2, \dots, d_k$

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} >_r = < \phi_k^l \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_{k-1}^{d_{k-1}} \theta_k^{d_k - l} \theta_{k+1}^{d_{k+1}} \dots \theta_n^{d_n} >_r + \\ + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.43}$$

Рассмотрим случай, когда все d_j, $j = 1, 2, \dots, n$, являются четными. Используя (A.3) и несколько раз (A.43) и (A.4) с $T \equiv 0$, $p = 1$, $\varepsilon'' = 0$, мы получаем, что:

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} >_r = \kappa_{d_1/2} \kappa_{d_2/2} \dots \kappa_{d_n/2} < 1 >_r + \\ + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon+\varepsilon'}) < 1 >_r + O\left(\exp(-c_5 n^{2\varepsilon})\right) < 1 > = \\ = \chi^0(\theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n}) < 1 > + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.44}$$

Отметим также, что если d_j — нечетное для некоторого $j = 1, 2, \dots, n$, тогда:

$$< \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} >_r = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < 1 > . \tag{A.45}$$

Теперь рассмотрим второй случай. Без потери общности мы можем считать, что d_1 — нечетное. Подставим

$$\theta_1^{d_1} = (\phi_1 + \delta)^{d_1} = \phi_1^{d_1} + d_1\phi_1^{d_1-1}\delta + \ldots + \delta^{d_1}. \tag{A.46}$$

Комбинируя (A.2), (A.5), (A.7), (A.10) и используя $\delta^l = \left(\vec{\nu}^T\vec{\theta}\right)^l$, мы получаем, что:

- для четных l:

$$< \phi_1^{d_1-l}\delta^l\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r = O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >, \tag{A.47}$$

- для нечетных $l \geq 3$:

$$\begin{aligned} &< \phi_1^{d_1-l}\delta^l\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r = \\ &= \kappa_{(d_1-l)/2} < \delta^l\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r + O\left(\exp(-c'n^{2\varepsilon})\right) < 1 >= \\ &\qquad = O(n^{-2+(3s+1)\varepsilon}) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.48}$$

Отметим также, что:

$$\begin{aligned} &d_1 < \phi_1^{d_1-1}\delta\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r = \\ &\quad = d_1\kappa_{(d_1-1)/2} < \delta\,\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r + O\left(\exp(-c_5n^{2\varepsilon})\right) < 1 >= \\ &= \kappa_{(d_1+1)/2} \sum_{1\neq k\in\,\mathrm{supp}\,\vec{d}} (A^{-1})_{1k} < \phi_k\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r + \\ &\qquad + O\left(\exp(-c_5n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.49}$$

Используя (A.43) и (A.44), (A.45) (с модифицированным $\vec{d}$), мы получаем, что:

$$< \phi_k\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r = \left(1 + O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon})\right)\chi^0(\theta_k\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}) < 1 > . \tag{A.50}$$

Так как $|\,\mathrm{supp}\,\vec{d}| \leq \|d\|_1 \leq 2s$, комбинируя (2.12), (2.32), (2.33), (A.46) - (A.50), находим, что:

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n} >_r = \chi_A^1(\theta_1^{d_1}\ \theta_2^{d_2}\ldots\theta_n^{d_n}) < 1 > + \\ &\qquad + O(n^{-2+(3s+1)\varepsilon}) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.51}$$

Используя (A.3), (A.44) и (A.51), мы получаем (2.38). ■

Доказательство оценок (2.39) - (2.40). Используя (2.26), заметим, что:

$$\left\| \frac{\partial (P+Q)}{\partial \vec{\theta}} \right\|_{\infty} = O(n^{-1/2+(s-1)\varepsilon}) \quad \text{для } \vec{\theta} \in U_n(rn^{\varepsilon}). \tag{A.52}$$

Используя (A.8) с $T = P + Q$, $p = 1/2$, $\varepsilon'' = (s-1)\varepsilon$, мы находим, что:

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = < \phi_k^j \theta_1^{d_1^{(j)}} \theta_2^{d_2^{(j)}} \dots \theta_n^{d_n^{(j)}} e^{P+Q} >_r + \\ &+ O(n^{-1/2+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O\left(\exp(-c' n^{2\varepsilon})\right) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.53}$$

Комбинируя (A.53) и (A.4), (A.6) с $T = P + Q$, $p = 1/2$, $\varepsilon'' = (s-1)\varepsilon$, мы получаем (2.39) и (2.40). ■

Доказательство оценки (2.41). Без потери общности положим $j = 1$. Используя (2.26), мы находим, что:

$$P^{(1)} + Q^{(1)} = O(n^{-1/2+s\varepsilon}) \quad \text{для } \vec{\theta} \in U_n(rn^{\varepsilon}). \tag{A.54}$$

Тогда

$$\begin{aligned} < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r &= < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r + \\ &+ < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(1)} + Q^{(1)}\right) e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r + \\ &+ O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r . \end{aligned} \tag{A.55}$$

Отметим также, что:

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(1)} + Q^{(1)}\right) e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r = \\ &= < \theta_1^{d_1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(1)} + Q^{(1)}\right) e^{P+Q} >_r + \\ &+ O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r . \end{aligned} \tag{A.56}$$

Используя (A.6) с $T = P + Q - P^{(1)} - Q^{(1)}$, $p = 1$, $\varepsilon'' = 0$ и (A.54), мы находим, что:

$$\begin{aligned} &< \phi_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r = \\ &\qquad = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q-R_{P^{(1)}}-R_{Q^{(1)}}} >_r + \\ &\qquad\qquad + O(\exp(-c_5 n^{2\epsilon})) < 1 >= \\ &\qquad = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.57}$$

Используя (A.9) с $T = P + Q - P^{(1)} - Q^{(1)}$, $p = 1/2$, $\varepsilon'' = (s-1)\varepsilon$, оценки (A.2), (A.52), (A.54) и

$$\delta = \delta_1 = \theta_1 - \phi_1 = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{1k}\phi_k - \phi_1, \tag{A.58}$$

мы получаем, что для $2 \leq l \leq d_1$

$$\begin{aligned} &< \delta^l \phi_1^{d_1-l}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r = \\ &\quad = O(n^{-1+5s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q-R_{P^{(1)}}-R_{Q^{(1)}}} >_r + \\ &\qquad\qquad + O(\exp(-c' n^{2\epsilon})) < 1 >= \\ &\quad = O(n^{-1+5s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.59}$$

Используя также (2.26) и несколько раз (A.8) с $T = P + Q - P^{(1)} - Q^{(1)}$, $p = 1/2$, $\varepsilon'' = (s-1)\varepsilon$, мы находим, что:

$$\begin{aligned} &< \delta\phi_1^{d_1-1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} \left(P^{(1)} + Q^{(1)}\right) e^{P+Q-P^{(1)}-Q^{(1)}} >_r = \\ &= O(n^{-1+5s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.60}$$

Комбинируя (A.55)-(A.60), мы получаем, что:

$$\begin{aligned} &< \theta_1^{d_1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = < d_1\delta\phi_1^{d_1-1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r + \\ &+ O(n^{-1+5s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \end{aligned} \tag{A.61}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} &< \phi_k\phi_1^{d_1-1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = \\ &\quad = < \phi_k\phi_1^{d_1-1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(k)}-Q^{(k)}} >_r + \\ &\qquad + < \phi_k\phi_1^{d_1-1}\theta_2^{d_2}\dots\theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)}\right) e^{P+Q-P^{(k)}-Q^{(k)}} >_r + \\ &\qquad + O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r \end{aligned} \tag{A.62}$$

и

$$< \phi_k \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)} \right) e^{P+Q-P^{(k)}-Q^{(k)}} >_r = \\ =< \phi_k \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)} \right) e^{P+Q} >_r + \\ + O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r . \qquad (A.63)$$

Используя (2.26), несколько раз (A.8) с $T = P + Q$, $p = 1/2$, $\varepsilon'' = (s-1)\varepsilon$, мы находим, что:

$$< \phi_k \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)} \right) e^{P+Q} >_r = \\ =< \theta_k \theta_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)} \right) e^{P+Q} >_r + \\ + O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O\left(\exp(-c' n^{2\varepsilon}) \right) < 1 > . \qquad (A.64)$$

Для $k \notin \operatorname{supp} \vec{d}$, используя (A.6) с $T = P + Q - P^{(1)} - Q^{(1)}$, $p = 1$ $\varepsilon'' = 0$, мы получаем, что:

$$< \phi_k \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(k)}-Q^{(k)}} >_r = \\ = O(n^{-1+(3s+1)\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \qquad (A.65)$$

Для $k \in \operatorname{supp} \vec{d}$, имеем:

$$< \phi_k \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q-P^{(k)}-Q^{(k)}} >_r = O(n^{2s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r . \qquad (A.66)$$

Комбинируя (2.12), (2.22), (A.58), (A.62) - (A.66), мы находим, что:

$$<\delta \phi_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} e^{P+Q} >_r = \\ = \sum_{k=2}^{n} (A^{-1})_{1k} < \theta_k \theta_1^{d_1-1} \theta_2^{d_2} \dots \theta_n^{d_n} \left(P^{(k)} + Q^{(k)} \right) e^{P+Q} >_r + \\ + O(n^{-1+4s\varepsilon}) < e^{R_P+R_Q} >_r + O(\exp(-c' n^{2\varepsilon})) < 1 > . \qquad (A.67)$$

Используя (A.61) и (A.67), мы получаем (2.41). ■