Тогда система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= 10(\tilde{u}_y - u_x), \\ \dot{\tilde{u}}_y &= 28.01u_x - \tilde{u}_y - 10u_x u_z, \\ \dot{u}_z &= 10u_x\tilde{u}_y - \frac{8}{3}u_z. \end{aligned} \tag{3}$$

Делая в (3) замену $u_x(t) = x(t)/10$, $\tilde{u}_y(t) = y(t)/10$ и $u_z(t) = z(t)/10$, получим систему Лоренца. Поскольку все решения системы (1) ограничены

$$|x(t)| \leqslant R_L,\ |y(t)| \leqslant R_L,\ |z(t)| \leqslant R_L,$$

где $R_L \approx 74.4$ [4, с. 185], то из введенной замены следует, абсолютная величина напряжения не превысит величины 7.44 В, что предусматривается документацией [3]. Значение E можно выбрать равным 1.5 В.

Точность представленной модели определяется погрешностями реальных емкостей и сопротивлений, а также частотными характеристиками интеграторов и умножителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. №2. P. 130-141.

2. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.

3. *Texas Instruments Incorporated [SBFS017A].* MPY634: Wide Bandwidth Precision Analog Multiplier (Data Sheet). http://www.ti.com/lit/ds/symlink/mpy634.pdf. 2011. 15 p.

4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: ЛИБРОКОМ, 2009.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект №11-07-00098).

Pchelintsev A.N. ABOUT MODELING OF DYNAMICS OF THE LORENZ SYSTEM

The modeling of the dynamics of the Lorenz system with the processes occurring in the circuit at the classic values of the parameters of the system is considered.

Key words: Lorenz system; the analog multiplier; integrator.

УДК 519.673

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА ПРИ НЕКОТОРОМ СООТНОШЕНИИ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

© А.Н. Пчелинцев

Ключевые слова: система Лоренца; периодическое решение; критерий Бендиксона.
Показывается отсутствие периодических решений в динамической системе Лоренца при некотором соотношении ее параметров.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ, r и b – некоторые положительные числа, параметры системы [1].

Докажем, что если $b=2\sigma$, то в системе (1) нет периодических решений (исключая, конечно, положения равновесия).

Сделаем замену

$$z = u + \frac{x^2}{b}, \tag{2}$$

где u – некоторая функция от t. Продифференцируем (2), получим

$$\dot{z} = \dot{u} + \frac{2x}{b}\dot{x}. \tag{3}$$

В левую часть выражения (3) подставим правую часть третьего уравнения системы (1), а в правую часть (3) – правую часть первого уравнения системы (1), учитывая, что $b=2\sigma$. Получим

$$-bz = \dot{u} - x^2. \tag{4}$$

Вместо z в (4) подставим выражение (2), откуда имеем уравнение

$$\dot{u} = -bu,$$

решением которого является функция

$$u(t) = u_0 e^{-bt}, \tag{5}$$

где u_0 – произвольная постоянная.

Теперь во второе уравнение системы (1) подставим вместо z выражение (2). При этом выразим y из первого уравнения системы (1). Получим

$$y = x + \frac{\dot{x}}{\sigma}, \tag{6}$$

и

$$\dot{y} = rx - y - x\left(u + \frac{x^2}{2\sigma}\right). \tag{7}$$

Подставив (5) и (6) в (7), имеем

$$\ddot{x} + (\sigma+1)\dot{x} - \sigma(r-1)x + \frac{x^3}{2} = -\sigma u_0 e^{-bt} x. \tag{8}$$

Рассмотрим неавтономный случай, когда $u_0 \neq 0$ в уравнении (8). Предположим, что в этом случае уравнение (8) имеет периодическое решение с периодом T. Так как производная периодической функции с периодом T есть периодическая функция с периодом T, то левая часть уравнения (8) является периодической функцией с периодом T. Однако правая часть уравнения (8) непериодична, т. к. e^{-bt} не является периодической функцией. Получили противоречие.

Таким образом, при $u_0 \neq 0$ уравнение (8) не имеет периодических решений.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_0=0$. Имеем автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}+(\sigma+1)\dot{x}-\sigma(r-1)x+\frac{x^3}{2}=0,$$

у которого по критерию Бендиксона [2, с. 142-143] нет периодических решений, что и доказывает их отсутствие в системе Лоренца при $b=2\sigma$.

Заметим, что в этом случае параметр r может принимать любые значения. Тогда при достаточно больших его значениях в системе Лоренца также будут отсутствовать периодические решения, что кажется весьма неочевидным, поскольку параметр r пропорционален разности температур между нижним и верхним слоем жидкости при свободной конвекции. При увеличении градиента температуры в слое должны возникнуть в жидкости конвективные валы, а здесь жидкость со временем приходит в стационарное состояние (ламинарный режим). Скорее всего, это объясняется тем, что система Лоренца достаточно грубо описывает данный процесс, хотя при других соотношениях между σ и b (r принимает достаточно большое значение) в системе (1) наблюдается устойчивый предельный цикл [3, с. 291-294].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. №2. P. 130-141.

2. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: ЛИБРОКОМ, 2009.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект №11-07-00098).

Pchelintsev A.N. EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS IN THE LORENZ SYSTEM FOR CERTAIN RELATIONS OF ITS PARAMETERS

The absence of periodic solutions dynamic Lorenz system for some ratio of parameters is shown.

Key words: Lorenz system; periodic solution; Bendixson criterion.

УДК 519.651, 517.518.823

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© **В.И. Родионов**

Ключевые слова: интерполяция; аппроксимирующий сплайн; многочлены Чебышева.
Предлагаемый метод построения разностных схем основан на минимизации функционала невязки, заданного в пространстве специальных многомерных сплайнов произвольной степени. Эффективность метода показана на примере простейшего уравнения Лапласа.

Работа продолжает исследования [1–5]. Краевая задача для простейшего уравнения Лапласа $u_{tt}+u_{\xi\xi}=0$ с непрерывно сопряженными граничными условиями

$$u(0,\xi)=\phi_0(\xi),\ u(1,\xi)=\phi_1(\xi),\ \xi\in[0,1],\quad u(t,0)=\rho_0(t),\ u(t,1)=\rho_1(t),\ t\in[0,1],$$

распадается на сумму двух задач с непрерывно сопряженными граничными условиями

$$u^1(0,\xi)=\phi_0^1(\xi),\ u^1(1,\xi)=\phi_1^1(\xi),\ \xi\in[0,1],\quad u^1(t,0)=\rho_0^1(t),\ u^1(t,1)=\rho_1^1(t),\ t\in[0,1],$$