Теория 2-усеченных кубов и приложения к комбинаторике флаговых многогранников

В.М. Бухштабер, В.Д. Володин

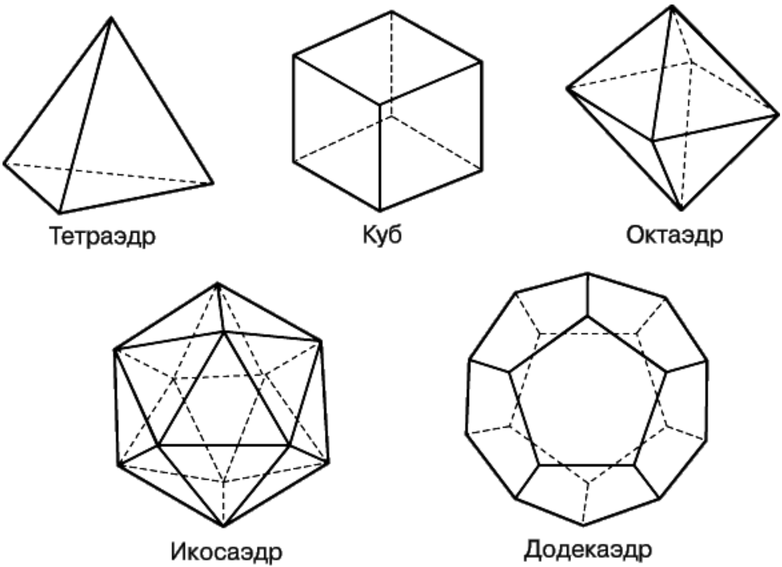
МИАН им. В.А. Стеклова,
20 ноября 2013.

Простые и симплициальные многогранники

Выпуклый n-многогранник P называется *простым*, если каждая его вершина принадлежат ровно n гиперграням.

Двойственный класс выпуклых многогранников - *симплициальные* многогранники (все собственные грани симплексы).

Платоновы тела

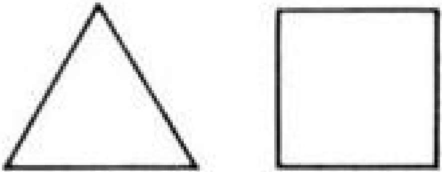


Простые многогранники - классический объект выпуклой геометрии и перечислительной комбинаторики. Они играют важную роль в современных исследованиях по:

- алгебраической геометрии
- симплектической геометрии
- теории особенностей
- торической геометрии
- торической топологии

Флаговые простые многогранники

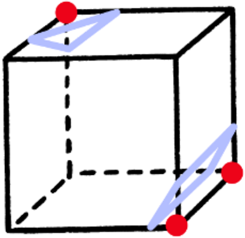
Простой многогранник P называется *флаговым*, если любой набор его попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение.



Не флаговый Флаговый

Срезка грани

Срезка грани $G \subset P$ является многогранником, полученным в результате параллельного сдвига некоторой ее опорной гиперплоскости внутрь многогранника.



Операцию срезки грани коразмерности 2 будем называть *2-усечением*.

2-усеченные кубы

Многогранник, полученный из куба последовательностью 2-усечений будем называть *2-усеченным кубом*.

Предложение

Каждый 2-усеченный куб является флаговым простым многогранником.

Операция срезки грани коразмерности более двух переводит любой многогранник в не флаговый.

Флаговые нестоэдры

В работах Е.-М. Фейхтнер, Б. Штурмфельс и А. Постникова введено понятие *производящего множества* как структуры на некоторой системе B подмножеств множества $\{1, \dots, n+1\}$. Каждому подмножеству $S \in B$ канонически сопоставляется симплекс в $\Delta_S \in \mathbb{R}^{n+1}$ и доказывается, что сумма Минковского всех симплексов $\Delta_S, S \in B$ является простым многогранником, позже названным *нестоэдром*. Терминология восходит к работам К. де Кончини и К. Прочези о *топологии дополнения конфигурации подпространств* в $\mathbb{R}^n$.

Теорема (В.Володин, 2010)

Флаговые нестоэдры являются 2-усеченными кубами.

Граф-ассоциэры

Граф без петель и кратных ребер называется *простым*. Система множеств вершин связных подграфов простого графа образует производящее множество. Такие производящие множества называют *графическими*, а соответствующие нестоэдры называются *граф-ассоциэдрами*. Они являются флаговыми многогранниками.

Следствие

Граф-ассоциэры являются 2-усеченными кубами.

Обобщенные ассоциэдры

В работе С.Фомина и А.Зелевинского введен класс *обобщенных ассоциэдров*, многогранников, соответствующих *конечной системе корней* (или *диаграмме Дынкина*). Обобщенные ассоциэдры серии A комбинаторно эквивалентны многогранникам Сташефа, а обобщенные ассоциэдры серий B и C комбинаторно эквивалентны многогранникам Ботта-Таубса. Многогранники Сташефа и Ботта-Таубса являются граф-ассоциэдрами, а обобщенные ассоциэдры серии D не являются нестоэдрами.

Теорема (М.Горский, 2011)

Обобщенные ассоциэдры серии D являются 2-усеченными кубами.

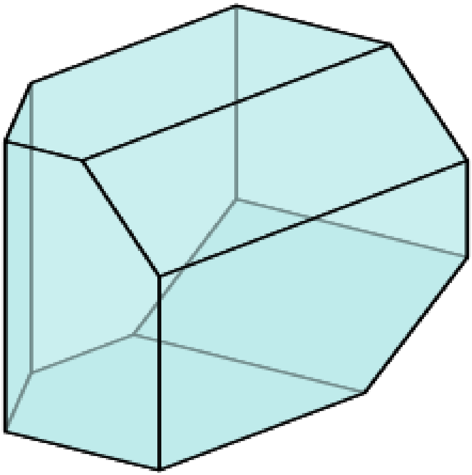
Граф-кубиэдры

В работе С. Девадоса, Т. Хита и В. Виписмакула введен класс *граф-кубиэдров* . Эти многогранники связаны с разбиениями *пространств модулей ориентированных поверхностей с отмеченными точками*. Граф-кубиэдры по определению получаются при помощи графического производящего множества из куба срезкой граней (произвольной размерности).

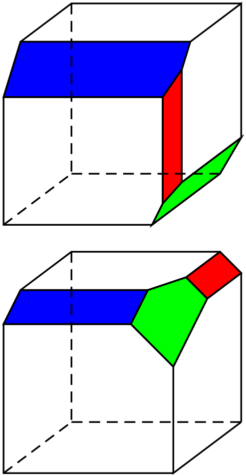
Теорема (В.Бухштабер-В.Володин, 2012)

Граф-кубиэдры являются 2-усеченными кубами.

Многогранники Сташефа как 2-усеченные кубы



Многогранники Сташефа как 2-усеченные кубы



Аффинно не эквивалентные реализации

Перечисляющие полиномы

Пусть f_i - количество i-мерных граней n-многогранника P.

f-вектор: $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$.

F-полином:

$$F(P)(\alpha, t) = \alpha^n + f_{n-1}\alpha^{n-1}t + \dots + f_1\alpha t^{n-1} + f_0 t^n = \sum_{G \subseteq P} \alpha^{\dim G} t^{\operatorname{codim} G}.$$

Обозначим через dP несвязное объединение гиперграней многогранника P.

Лемма (В.Бухштабер)

Для простого многогранника P верно $F(dP) = \frac{\partial}{\partial t} F(P)$.

Перечисляющие полиномы

H-полином:

$$H(P)(\alpha, t) = F(P)(\alpha - t, t) = h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1}t + \cdots + h_{n-1}\alpha t^{n-1} + h_n t^n.$$

h-вектор: $(h_0, \ldots, h_n)$.

Теорема (М.Ден - Д.Соммервилль, 1927)

Для любого простого n-многогогранника $h_i = h_{n-i}$.

Из формулы $F(dP) = \frac{\partial}{\partial t} F(P)$ вытекает, что теорема Дена-Соммервилля является следствием формулы Эйлера-Пуанкаре.

$g_0 = 1$, $g_i = h_i - h_{i-1}$ при $i = 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$
g-вектор:

$$(g_0, \ldots, g_{[\frac{n}{2}]}).$$

γ-векторы

Согласно соотношениям Дена-Соммервилля:

$$H(P)(\alpha, t) = H(P)(t, \alpha)$$

Следовательно,

$$H(P) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \gamma_i (\alpha t)^i (\alpha + t)^{n-2i}.$$

γ-полином:

$$\gamma(P)(\tau) = \gamma_0 + \gamma_1 \tau + \dots + \gamma_{[\frac{n}{2}]} \tau^{[\frac{n}{2}]}.$$

γ-вектор:

$$(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{[\frac{n}{2}]}).$$

Теорема (В.Бухштабер, 2008)

Существуют неотрицательные целые числа A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}:

- $g_i = \sum A_{ij}\gamma_j$
- $h_i = \sum B_{ij}g_j$
- $f_i = \sum C_{ij}h_j$

Следствие. Пусть P_1 и P_2 - простые многогранники, тогда:

$$\gamma_i(P_1) \le \gamma_i(P_2),\ i = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$$

$$\Downarrow$$

$$g_i(P_1) \le g_i(P_2),\ i = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$$

$$\Downarrow$$

$$h_i(P_1) \le h_i(P_2),\ i = 0, \dots, n$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(P_1) \le f_i(P_2),\ i = 0, \dots, n-1$$

Гипотеза Гала

Теорема (Р.Стенли, 1980)

Пусть P простой многогранник, тогда $g_i \geq 0$.

Гипотеза (С.Гал, 2005)

Пусть P флаговый простой многогранник, тогда $\gamma_i \geq 0$.

Существуют не флаговые простые многогранники с $\gamma_i \geq 0$.

- С.Гал, Э.Нево, Т.Петерсен, Б.Теннер, А.Постников, В.Райнер, Л.Виллиамс, Н.Ероховец, Э.Фенн, В.Володин доказали гипотезу в частных случаях.
- Гипотеза Гала верна для всех 2-усеченных кубов.

Гипотеза Черни-Дэвиса и гипотеза Хопфа

Гипотеза (Р.Черни-М.Дэвис, 1995)

Пусть P^{2n} флаговый простой $2n$-многогранник, тогда $(-1)^n \sum (-1)^i h_i \geq 0$.

Гипотеза (Х.Хопф)

Пусть M^{2q} - риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда $(-1)^q \chi(M^{2q}) \geq 0$.

- Гипотеза Черни-Дэвиса эквивалентна $\gamma_n(P) \geq 0$.
- Гипотеза Черни-Дэвиса тесно связана с гипотезой Хопфа для малых накрытий над флаговыми простыми многогранниками.

γ-векторы флаговых многогранников

Пусть K - симплициальный комплекс размерности d. Положим

$$f(K)(t) := 1 + f_0 t + \cdots + f_d t^{d+1}$$

Гипотеза (Э.Нево - Т.Петерсен, 2011)

Для любого флагового простого многогранника P существует симплициальный комплекс K_P, такой что $\gamma(P) = f(K_P)$.

В 2011 Э.Нево и Т.Петерсен доказали гипотезу для

- ассоциэдров (многогранников Сташефа),
- циклоэдров (многогранников Ботта-Таубса),
- пермутоэдров.

В 2012 Н.Айсбетт доказала гипотезу для

- флаговых нестоэдров

Теорема (В.Володин, 2012)

Для любого 2-усеченного куба P существует флаговый симплициальный комплекс K_P, такой что $f(K_P) = \gamma(P)$.

Следствие

Для любого 2-усеченного куба $0 \leq \gamma_i \leq \binom{\gamma_1}{i-1}, i > 1$.

Точные границы для семейств граф-ассоциэдров

Граф называется *двусвязным*, если он является связным и остается связным после удаления любой вершины.

Теорема

Пусть Γ_{n+1} *- связный граф на* $[n+1]$. *Тогда*

$$\gamma_i(As^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(Pe^n)$$

Теорема

Пусть Γ_{n+1} *- двусвязный граф на* $[n+1]$. *Тогда*

$$\gamma_i(Cy^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(Pe^n)$$

Теорема

Пусть Γ_{n+1} *- дерево на* $[n+1]$. *Тогда*

$$\gamma_i(As^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(St^n)$$

Торические многообразия над 2-усеченными кубами

Каждый 2-усеченный куб P^n является образом *отображения моментов симплектического многообразия* M_P^{2n} с *гамильтоновым действием компактного тора* T^n. Многообразие M_P^{2n} является неособым торическим многообразием.

Следующие два результата лежат в основе приложений теории 2-усеченных кубов в симплектической и торической геометрии.

- $b_{2k}(M_P^{2n}) = h_k(P^n)$;
- $\sigma(M_P^{4n}) = (-1)^n \gamma_n(P^{2n})$.

Здесь $b_k(M)$ - k-е число Бетти многообразия M, а $\sigma(M)$ - его сигнатура.

Следствие

Пусть P^{2n} - 2-усеченный куб. Тогда

$$(-1)^n \sigma(M_P^{4n}) \geq 0.$$

Следствие

Пусть число гиперграней 2-усеченного куба P^{2n} менее $5n$. Тогда

$$\sigma(M_P^{4n}) = 0.$$

Малые накрытия 2-усеченных кубов

Для каждого 2-усеченного куба P^n определено *малое накрытие* M^n, гладкое многообразие с гладким действием группы $\mathbb{Z}_2^n$, такое что

$$P^n \simeq M^n/\mathbb{Z}_2^n.$$

Имеют место следующие результаты:

- $b_k^2(M_P^n) = h_k(P^n)$;
- $\chi(M_P^{2n}) = (-1)^n \gamma_n(P^{2n})$.

Здесь $b_k^2(M)$ - k-е число Бетти многообразия M для когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$, а $\chi(M)$ - его эйлерова характеристика.

Следствие

Пусть P^{2n} *- 2-усеченный куб. Тогда*

$$(-1)^n\chi(M^{2n}) \geq 0.$$

Следствие

Пусть число гиперграней 2-усеченного куба P^{2n} *менее* $5n$. *Тогда*

$$\chi(M^{2n}) = 0.$$

Список литературы

- В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН, 263, МАИК, М., 2008, 18–43.
- В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, *Точные верхние и нижние границы для нестоэдров*, Изв. РАН. Сер. матем., 75:6, 2011, 17-46.
- V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, *Combinatorial 2-truncated cubes and applications*, Associahedra, Tamari Lattices, and Related Structures, Tamari Memorial Festschrift, Progress in Mathematics, Birkhauser, Vol. 299, 2012, 161-186.

Список литературы

- В. Д. Володин, *Кубические реализации флаговых нестоэдров и доказательство гипотезы Гала для них*, УМН, 65:1(391), 2010, 183-184.
- В. Д. Володин, *Геометрическая реализация γ-векторов 2-усеченных кубов*, УМН, 67:3(405), 2012, 181-182.
- V. Volodin, *Combinatorics of flag simplicial 3-polytopes*, arXiv:1210.0398, 2013.

Необходимые понятия и конструкции

Сумма Минковского

Сумма Минковского подмножеств A и B пространства $\mathbb{R}^n$:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Если A и B - выпуклые многогранники, то $A + B$ - выпуклый многогранник.
Сумма Минковского простых многогранников в общем случае не является простым многогранником.

Нестоэдры - широкий класс простых многогранников, полученных как сумма Минковского симплексов.

Через $[n]$ обозначим $\{1, \dots, n\}$.

Определение

Набор B подмножеств $[n+1]$ называется *производящим множеством* на $[n+1]$, если:

1) $\{i\} \in B$ для всех $i \in [n+1]$;
2) Если $S_1, S_2 \in B$ и $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, тогда $S_1 \cup S_2 \in B$.

Производящее множество B на $[n+1]$ называется *связным*, если $[n+1] \in B$.

Пример. Производящие множества на $[3]$ (с точностью до перестановок $[3]$):

- $B = \{i\} \cup [3]$
- $B = \{i\} \cup \{1,2\} \cup [3]$
- $B = \{i\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup [3]$
- $B = \{i\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{2,3\} \cup [3] = 2^{[3]} \setminus \emptyset$

Графические производящие множества

Пусть Γ - простой граф на $[n+1]$.

Определение

Графическое производящее множество $B(\Gamma)$ на $[n+1]$ это множество непустых подмножеств $S \subseteq [n+1]$, для которых индуцированный подграф $\Gamma|_S$ на множестве S связен.

Графическое производящее множество $B(\Gamma)$ связно тогда и только тогда, когда Γ связен.

Нестоэдры

Пусть e_i - конечные точки базисных векторов $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение

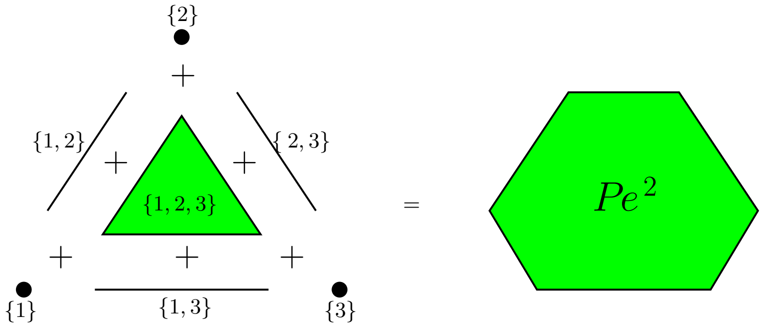
Нестоэдр P_B, соответствующий производящему множеству B:

$$P_B = \sum_{S \in B} \Delta^S, \text{ where } \Delta^S = \mathrm{conv}\{e_i, i \in S\}.$$

Если $B(\Gamma)$ - графическое производящее множество, то $P_{B(\Gamma)}$ называется *граф-ассоциэдром* и обозначается P_Γ.

Пример. Простейшее связное производящее множество состоит из одноточечных подмножеств и всего множества $\{1, \dots, n+1\}$. Соответствующий нестоэдр является симплексом.

Производящее множество $B = 2^{[3]} \setminus \emptyset = \{S \subseteq [3] : S \neq \emptyset\}$



Симплициальный комплекс K размерности d называется сбалансированным, если его хроматическое число равно $(d+1)$.

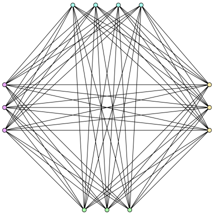
Теорема (Э.Фрохмадер, 2008)

Для любого флагового симплициального комплекса существует сбалансированный симплициальный комплекс с тем же f-вектором.

Граф Турана

Для данных натуральных чисел n и r положим $n = ar + b$. Выберем разбиение множества из n точек на r подмножеств, такое что одни из них содержат a элементов, а другие $(a+1)$ элементов.

Граф Турана $T(n, r)$ - это граф на n вершинах, соответствующий описанному выше разбиению. В этом графе две вершины соединены ребром, если они принадлежат разным подмножествам. Таким образом, получается полный r-дольный граф $K_{a,a,\ldots,a+1,a+1}$. Для $r \geq n$ имеем $T(n, r) = K_n$.



Обобщенная комбинаторная степень

Обозначим через $\binom{n}{k}_r$ число k-клик графа Турана $T(n, r)$.

Для натуральных чисел m, k, $r \geq k$ существует единственное разложение:

$$m = \binom{n_k}{k}_r + \cdots + \binom{n_{k-s}}{k-s}_{r-s},$$

где $n_{k-i} - [\frac{n_{k-i}}{r-i}] > n_{k-i-1}$ для $0 \leq i < s$ и $n_{k-s} \geq k - s > 0$.

Положим

$$m^{\langle k \rangle_r} := \binom{n_k}{k+1}_r + \cdots + \binom{n_{k-s}}{k-s+1}_{r-s}, m > 0; \quad 0^{\langle k \rangle_r} = 0$$

Неравенства Франкла-Фюреди-Калаи

Симплициальный комплекс K называется r-раскрашиваемым, если его хроматическое число не превосходит r.

Теорема (П.Франкл - З.Фюреди - Г.Калаи, 1988)

Целочисленный вектор $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ является f-вектором r-раскрашиваемого комплекса тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $f_i \geq 0$;
2. $f_i \leq f_{i-1}^{\langle i \rangle_r}, i > 0$;

Следствие

Пусть K - флаговый симплициальный комплекс размерности $(d-1)$. Тогда

1. $f_i \geq 0$;
2. $f_i \leq f_{i-1}^{\langle i \rangle_d}, i > 0$;

Границы γ-векторов 2-усеченных кубов

Следствие

Пусть P^n является 2-усеченным кубом. Тогда

1. $\gamma_i \geq 0$;
2. $\gamma_i \leq \gamma_{i-1}^{\langle i-1 \rangle_r}$, *где* $r = [\frac{n}{2}], i > 0$;

Следствие

Данные условия верны для γ-векторов флаговых нестоэдров, граф-ассоциэдров, граф-кубиэдров и обобщенных ассоциэдров.