КВАНТОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

А.А. Славнов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН.

В теории поля постулируется, что элементарная частица описывается полем, которое при каждом x принадлежит представлению полупростой компактной группы Ли, т.е., если $\omega(x)$- функция со значениями в калибровочной группе Ω

$$\psi(x) \to \psi^{\omega}(x) = \Gamma[\omega(x)]\psi(x) \tag{1}$$

Полевые конфигурации $\psi(x), A_\mu(x)$ и $\Gamma[\omega(x)]\psi(x), A_\mu^{\omega}(x)$ описывают одну и ту же физическую ситуацию. Этот постулат называется принципом относительности в зарядовом пространстве. Аналогичный постулат используется для Абелевой группы $U(1)$, описывающей электромагнитное поле.

Здесь поле $A_\mu(x)$ на физическом языке называется калибровочным полем,и описывает параллельный перенос в зарядовом пространстве, а с точки зрения математики - это связность в главном расслоении. При калибровочных преобразованиях (1) оно преобразуется следующим образом

$$A_\mu(x) \to A_\mu^\omega(x) = \omega(x) A_\mu(x) \omega^{-1}(x) + \partial_\mu \omega(x) \omega^{-1}(x) \tag{2}$$

Принцип относительности в зарядовом пространстве позволяет однозначно вводить взаимодействие путем замены обычной производной в свободном Лагранжиане на ковариантную производную

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - g\Gamma(A_\mu) \tag{3}$$

Свободный лагранжиан поля $A_\mu(x)$ равен квадрату тензора кривизны

$$L_0 = \frac{1}{8} Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \tag{4}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu A_\nu] \tag{5}$$

Как видно из формул (4, 5), калибровочное поле является безмассовым что в течение длительного времени препятствовало его использованию в моделях слабых взаимодействий, которые являются короткодействующими, т.е. соответствующими обмену массивной частицей.

В работах П.Хиггса и Ф.Англера и П.Брута было показано, как можно ввести массу векторного поля, сохраняя калибровочную инвариантность. Соответствующий Лагранжиан для группы $U(1)$ имеет вид

$$L = (D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^*\varphi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (6)$$

Потенциал

$$-m^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^*\varphi)^2 \qquad (7)$$

неустойчив и генерирует спонтанное нарушение глобальной симметрии, ответственной за сохранение заряда полей φ. С формальной точки зрения поля φ приобретают в таком потенциале мнимую массу. Для того, чтобы строить теорию возмущений по константе связи, необходимо предварительно сделать сдвиг полей φ на константу $\varphi \to \varphi + C$. Ясно, что сдвиг полей на константу (т.е. по сути дела замена переменных) не может нарушить калибровочную инвариантность теории, однако явный вид преобразований изменится.

Если до замены калибровочное преобразование поля φ было фазовым преобразованием, то после замены калибровочное преобразование поля φ включает сдвиг на произвольную функцию

$$\varphi(x) \to \exp\{i\alpha(x)\}\varphi(x) - C(\exp\{i\alpha(x)\} - 1) \tag{8}$$

Поле φ после сдвига при калибровочном преобразовании меняется на произвольную функцию, и наряду с векторным полем A_μ тоже становится калибровочным полем. При сдвиге поля φ на константу член $(D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi)$ генерирует массу векторного поля.

Основная заслуга Хиггса и Англера и Брута состоит в том, что они показали, как можно ввести массу векторного поля не нарушая калибровочной инвариантности.

Квантование модели Хиггса проводится обычно в так называемой унитарной калибровке, в которой спектр модели состоит лишь из физических возбуждений- трех поляризаций массивного векторного поля и одного массивного скаляра. В этой калибровке в каждом порядке теории возмущений появляются новые типы контрчленов.

Однако благодаря калибровочной инвариантности, на массовой поверхности эти контрчлены не дают вклада и конечность теории обеспечивается перенормировкой параметров исходного классического лагранжиана. В перенормируемой калибровке спектр теории обязательно содержит нефизические возбуждения, например временные фотоны с отрицательной энергией, однако благодаря калибровочной инвариантности они не возникают в наблюдаемых состояниях.

Калибровочно инвариантное действие описывает систему со связями.

$$A = \int d^4x[p\dot{q} - H(p,q) + \lambda^a C^a] \tag{9}$$

Л.Д.Фаддеев и В.Н.Попов и независимо,Б.Де Витт показали, как редуцировать калибровочно инвариантное действие к гамильтоновой системе H^* путем явного решения связей и наложения подходящих условий калибровки. $H(p,q) \to H^*(p^*,q^*)$. Те же методы применяются для анализа систем с спонтанно нарушенной симметрией, реализующих неэквивалентное представление канонических перестановочных соотношений. (т'Хоофт)

Для неабелевой группы в кулоновской калибровке поле A_i^ε должно удовлетворять условию $\partial_i A_i^\varepsilon = 0$.

$$\triangle \varepsilon^a + igt^{abc}\partial_i(A_i^b \varepsilon^c) = 0 \qquad (10)$$

Это уравнение имеет решения для полей, обращающихся в ноль на пространственной бесконечности. Выбор представителя в классе калибровочно эквивалентных конфигураций неоднозначен.

Это не сказывается на построении теории возмущений по константе связи. В рамках теории возмущений уравнение (10)имеет только тривиальные решения и неоднозначность отсутствует.

В теории поля рассматриваются два класса калибровок: дифференциальные и алгебраические калибровки.

Дифференциальные калибровки включают дифференциальный оператор. Примером алгебраических калибровок является гамильтонова калибровка $A_0 = 0$. Дифференциальные калибровки не являются однозначными. Алгебраические калибровки также имеют ряд существенных недостатков, в частности, отсутствие явной инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Проблему неоднозначности можно обойти, используя альтернативную формулировку теории Янга-Миллса. Теория Янга-Миллса эквивалентна модели, описываемой Лагранжианом

$$\tilde{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + (D_\mu\tilde{\phi})^*(D_\mu\tilde{\phi}) - (D_\mu\tilde{\phi}_1)^*(D_\mu\tilde{\phi}_1) + (D_\mu e)^*(D_\mu b) + (D_\mu b)^*(D_\mu e) \tag{11}$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \hat{\mu}; \quad \tilde{\phi}_1 = \phi_1 + \hat{\mu}; \quad \hat{\mu} = (0, \mu\sqrt{2}g^{-1}) \tag{12}$$

Здесь $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}_1$-коммутирующие духовые поля. Духовые поля b, e принадлежат алгебре Грассмана. Заметим, что в отличие от модели Хиггса, поле A_μ остается безмассовым.

Здесь ϕ и ϕ_1-двухкомпонентные комплексные дублеты, параметризованные эрмитовыми компонентами

$$\phi = (\frac{i\phi^1 + \phi^2}{\sqrt{2}}, \frac{\phi^0 - i\phi^3}{\sqrt{2}}) \qquad (13)$$

Лагранжиан (12) помимо калибровочной инвариантности обладает суперсимметрией

$$\delta\phi(x) = i\epsilon b(x); \quad \delta\phi_1(x) = -i\epsilon b(x)$$
$$\delta e(x) = \epsilon[\phi(x) + \phi_1(x)]; \quad \delta b(x) = 0. \qquad (14)$$

This symmetry is crucial for equivalence of the theory, described by (12) to the original one.

Новый Лагранжиан также калибровочно инвариантен. Однако глобальная $SU(2)$ инвариантность спонтанно нарушена.

При калибровочном преобразовании поля ϕ^a сдвигаются на произвольную функцию, что позволяет наложить калибровочное условие $\phi^a = \phi_1^a$. Калибровка $\phi^a = \phi_1^a$ является алгебраической и не приводит к неоднозначности при каноническом квантовании. В то же время она явно релятивистски инвариантна и может с равным успехом быть использована как в теории возмущений так и вне ее.

Необходимо доказать, что матричные элементы всех калибровочно инвариантных операторов не содержат вклада нефизических компонент. Доказательство основано на калибровочной инвариантности и суперсимметрии теории, которые приводят к существованию сохраняющегося нильпотентного заряда $\widehat{Q}$. Состояния, в которые нефизические компоненты не дают вклада выделяются условием $\widehat{Q}|\Phi >= 0$. Поскольку заряд $\widehat{Q}$ сохраняется, это условие инвариантно относительно динамики (Славнов).