Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва

Институт математики Китайской академии наук, Пекин

А.Г.Сергеев, Щаньюй Чжоу

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ И ГИПОТЕЗА О РАСШИРЕННОЙ ТРУБЕ БУДУЩЕГО

Владимиров - 90   Москва 2013

Области голоморфности, инвариантные относительно действия компактных групп

Рассмотрим область голоморфности $\boldsymbol{D}$ в $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$, инвариантную относительно действия компактной группы Ли $\boldsymbol{G}$ голоморфными преобразованиями $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$. Ее *комплексификацией* называется область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$, получаемая из $\boldsymbol{D}$ действием комплексифицированной группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$.

Поставим следующий вопрос: когда комплексифицированная область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ совпадает с оболочкой голоморфности области $\boldsymbol{D}$ относительно $\boldsymbol{G}$-инвариантных голоморфных функций? Иными словами, когда можно построить для любой точки границы $\boldsymbol{\partial D}$ голоморфную функцию в $\boldsymbol{D}$, инвариантную относительно действия группы $\boldsymbol{G}$ и не продолжающуюся голоморфно ни в какую окрестность этой точки?

Оказывается, что ключевую роль в ответе на этот вопрос играет условие орбитальной выпуклости области $\boldsymbol{D}$, которое налагает ограничения на поведение орбит однопараметрических подгрупп комплексифицированной группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$.

А именно, рассмотрим орбиты указанного типа, проходящие через заданную точку области $\boldsymbol{D}$. Так как $\boldsymbol{D}$ инвариантна относительно группы $\boldsymbol{G}$, то среди них наибольший интерес представляют орбиты, выходящие в направлениях, "нормальных" к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $\boldsymbol{G}$. Иными словами, речь идет об орбитах однопараметрических подгрупп, порожденных векторами $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{i}\mathfrak{g}$. Для них условие орбитальной выпуклости означает, что такая орбита, раз покинув область $\boldsymbol{D}$, не может снова туда вернуться.

Более формально, G-инвариантная область D называется *орбитально выпуклой*, если для любой точки $x \in D$ и любого вектора $v \in i\mathfrak{g}$ из включения $\exp v \cdot x \in D$ следует, что $\exp(tv) \cdot x \in D$ при всех $0 \leq t \leq 1$.

Для областей голоморфности, удовлетворяющих условию орбитальной выпуклости, справедлив следующий результат, доказанный в статье Сергеева и Хайнцнера, обозначаемой далее [Ser-Hei].

Теорема о голоморфном продолжении.

Пусть $\boldsymbol{D}$ – орбитально выпуклая область голоморфности в $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$, инвариантная относительно голоморфного действия компактной группы Ли $\boldsymbol{G}$. Тогда любая $\boldsymbol{G}$-инвариантная голоморфная функция в $\boldsymbol{D}$ продолжается до $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантной голоморфной функции в области $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$. Область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ является областью голоморфности.

Более того, если пространство голоморфных $\boldsymbol{G}$-инвариантных функций в $\boldsymbol{D}$ не сводится к константам, то $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ совпадает с оболочкой голоморфности области $\boldsymbol{D}$ относительно $\boldsymbol{G}$-инвариантных голоморфных функций.

Теорема о голоморфном продолжении остается справедливой, если заменить в ней области $\boldsymbol{D}$ на произвольные $\boldsymbol{G}$-инвариантные орбитально выпуклые области в комплексных пространствах $\boldsymbol{X}$ с голоморфным действием группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, а вместо голоморфных функций брать $\boldsymbol{G}$-эквивариантные голоморфные отображения $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{Y}$ в произвольные комплексные пространства $\boldsymbol{Y}$ с голоморфным $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-действием.

Более того, условие орбитальной выпуклости является необходимым для выполнения указанного свойства голоморфного продолжения в указанном расширенном толковании.

Точнее, справедлив следующий результат, доказанный Хайнцнером:

Теорема

Для того, чтобы $G_{\mathbb{C}}$-инвариантная область $\Omega \subset X$ являлась голоморфным расширением области D (т.е. чтобы любое G-эквивариантное голоморфное отображение $D \to Y$ в произвольное комплексное пространство Y с голоморфным $G_{\mathbb{C}}$-действием продолжалось до $G_{\mathbb{C}}$-эквивариантного голоморфного отображения $\Omega \to Y$) необходимо, чтобы область D была орбитально выпуклой.

На самом деле, для справедливости теоремы о голоморфном продолжении достаточно выполнения более слабого условия орбитальной связности области D, формулируемого следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть комплексное пространство с голоморфным действием группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ и $\boldsymbol{x}$ – произвольная точка в $\boldsymbol{X}$. Обозначим через $\boldsymbol{b_x}$ орбитальное отображение

$$\boldsymbol{b_x} : \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{b_x} : \boldsymbol{g} \longmapsto \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Тогда $\boldsymbol{G}$-инвариантная область $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{X}$ называется *орбитально связной*, если прообраз

$$\boldsymbol{b_x^{-1}(D) = \{g \in G}_{\mathbb{C}} \boldsymbol{: \ g \cdot x \in D\}}$$

области $\boldsymbol{D}$ при орбитальном отображении связен для любого $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$.

Пользуясь полярным разложением группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ нетрудно показать, что из орбитальной выпуклости области $\boldsymbol{D}$ следует ее орбитальная связность, т.е. условие орбитальной связности $\boldsymbol{D}$ слабее ее орбитальной выпуклости.

Теорема о голоморфном продолжении остается справедливой для орбитально связных областей. Отсюда следует, в частности, что комплексификация $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ $\boldsymbol{G}$-инвариантной орбитально связной области голоморфности $\boldsymbol{D}$ является ее голоморфным расширением, а потому ввиду сформулированного выше обращения теоремы о голоморфном продолжении область $\boldsymbol{D}$ должна быть орбитально выпуклой.

Чжоу получил обобщение теоремы о голоморфном продолжении на случай орбитально связных, но не голоморфно выпуклых областей $\boldsymbol{D}$. А именно:

Теорема

Если $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}$-инвариантная орбитально связная область на комплексном многообразии Штейна $\boldsymbol{X}$ с голоморфным действием группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, то ее оболочка голоморфности $\boldsymbol{E(D)}$ однолистна и орбитально выпукла тогда и только тогда, когда однолистна оболочка голоморфности $\boldsymbol{E(D_{\mathbb{C}})}$.

В этом случае, $\boldsymbol{E(D_{\mathbb{C}}) = G_{\mathbb{C}} \cdot E(D)}$.

Приведенные результаты демонстрируют важность понятий орбитальной выпуклости и орбитальной связности для решения задач о голоморфном продолжении.

Инвариантная лемма Картана

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть многообразие Штейна и $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ – связная комплексная редуктивная группа Ли, действующая на $\boldsymbol{X}$ голоморфными отображениями. Так как $\boldsymbol{G}$ редуктивна, она является комплексификацией компактной группы Ли $\boldsymbol{G}$. Кроме этой вещественной формы, обозначим через $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ произвольную связную замкнутую подгруппу $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, являющуюся вещественной формой $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$.

Пусть $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная штейнова область, т.е. голоморфно выпуклое связное открытое подмножество в $\boldsymbol{X}$. Напомним, что *комплексификацией* $\boldsymbol{D}$ называется область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$ в $\boldsymbol{X}$, полученная из $\boldsymbol{D}$ действием комплексифицированной группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$. Спрашивается, когда комплексификация $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ также является штейновой?

Предположим, как и выше, что область $\boldsymbol{D}$ является орбитально связной (или орбитально выпуклой). Если бы группа $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ была компактной, то согласно теореме о голоморфном продолжении ее комплексификация $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ была бы штейновой. Доказательство этой теоремы, приведенное в статье [Ser-Hei], опирается на инвариантную версию леммы Картана о голоморфном продолжении, имеющую самостоятельный интерес.

Напомним ее формулировку:

Если $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}$-инвариантная штейнова область в многообразии Штейна $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{A}$ – ее $\boldsymbol{G}$-инвариантное аналитическое подмножество, то любая $\boldsymbol{G}$-инвариантная аналитическая функция $\boldsymbol{f}$ на $\boldsymbol{A}$ продолжается до голоморфной $\boldsymbol{G}$-инвариантной функции $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{D}$.

В случае компактной группы Ли $\boldsymbol{G}$ указанная инвариантная версия немедленно вытекает из обычной леммы Картана. Именно, пользуясь этой леммой, продолжаем $\boldsymbol{f}$ до голоморфной функции $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ в $\boldsymbol{D}$, усредняя которую по группе $\boldsymbol{G}$ получаем искомое продолжение $\boldsymbol{F}$.

Спрашивается, можно ли в инвариантной лемме Картана заменить компактную группу $\boldsymbol{G}$ на некомпактную группу $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный и нетрудно построить соответствующие контпримеры. Однако пример расширенной трубы будущего, который мы разберем позже, показывает, что при некоторых дополнительных условиях указанная лемма все же должна выполняться и для некомпактных групп.

Вообще, оказывается, что вопрос о справедливости инвариантной леммы Картана в заданной $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантной штейновой области $\boldsymbol{D}$ тесно связан с проблемой голоморфной выпуклости ее комплексификации $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$. Прежде, чем перейти к обсуждению этой связи, приведем несколько необходимых фактов из геометрической теории инвариантов.

Введем на многообразии X следующее отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ для всех голоморфных функций f, инвариантных относительно группы $G_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\pi : X \to X/\sim$ естественную проекцию и наделим $X/\sim$ структурным пучком.

Более подробно, назовем *категорным фактором* $X//G_{\mathbb{C}}$ хаусдорфово топологическое пространство $X/\sim$, снабженное структурным пучком $\mathcal{O}(X//G_{\mathbb{C}})$, который определяется следующим образом: алгебра $\mathcal{O}(X//G_{\mathbb{C}})(U)$ для произвольного открытого подмножества $U \subset X/\sim$ состоит из непрерывных комплекснозначных функций на U, которые поднимаются посредством отображения π до голоморфных $G_{\mathbb{C}}$-инвариантных функций на $\pi^{-1}(U)$.

Назовем подмножество $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{X}$ *насыщенным*, если

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\pi}^{-1}\left(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{E})\right).$$

В случае, когда $\boldsymbol{X}$ – штейново пространство, а группа $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ редуктивна, пространство $\boldsymbol{X}//\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ также является штейновым, а проекция $\boldsymbol{\pi}$ – голоморфным открытым отображением (этот результат доказан в работах Луны и Сноу). Более того, каждый слой $\boldsymbol{\pi}$ связен и содержит единственную замкнутую орбиту.

Вернемся к вопросу о справедливости инвариантной леммы Картана в следующей формулировке.

Инвариантная лемма Картана

Пусть $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная штейнова область в многообразии Штейна $\boldsymbol{X}$ с голоморфным действием группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$. Если $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантное аналитическое подмножество в $\boldsymbol{D}$, то любая $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная аналитическая функция $\boldsymbol{f}$ на $\boldsymbol{A}$ продолжается до голоморфной $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантной функции $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{D}$.

Следующая теорема показывает, что вопрос о справедливости указанной леммы в области $\boldsymbol{D}$ эквивалентен вопросу о штейновости комплексификации $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$.

Теорема (Чжоу)

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть многообразие Штейна с голоморфным действием комплексной группы Ли $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ и $\boldsymbol{D}$ – $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная орбитально связная штейнова область в $\boldsymbol{X}$, комплексификация $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ которой насыщена. Для того, чтобы инвариантная лемма Картана выполнялась в области $\boldsymbol{D}$ необходимо и достаточно, чтобы ее комплексификация $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ была штейновой.

Идея доказательства.

Необходимость. Допустим, что в $\boldsymbol{D}$ выполняется инвариантная лемма Картана. Так как область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$ насыщена, то множество $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}})$ открыто в $\boldsymbol{X}//\,\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$.

Покажем, что $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{D})$ голоморфно выпукло в $\boldsymbol{X}//\,\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$. Для этого достаточно построить для любой точки $\boldsymbol{y}$ границы $\boldsymbol{\partial\pi}(\boldsymbol{D})$ голоморфную функцию, имеющую пик в этой точке.

Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in \pi(D)$, сходящуюся к y. Множества $A_n := \pi^{-1}(y_n) \cap D$ являются $G_{\mathbb{R}}$-инвариантными аналитическими подмножествами в D, причем $A_k \cap A_l = \emptyset$ при $k \neq l$. Объединение $A = \bigcup_n A_n$ также является $G_{\mathbb{R}}$-инвариантным аналитическим подмножеством D, поэтому по инвариантной лемме Картана найдется $G_{\mathbb{R}}$-инвариантная голоморфная функция f в D такая, что $f|_{A_n} = n$. Так как область D орбитально связна, эту функцию можно продолжить до голоморфной $G_{\mathbb{C}}$-инвариантной функции F в $D_{\mathbb{C}}$. Построенная функция определяет голоморфную в $\pi(D)$ функцию $\widetilde{F}$, которая имеет пик в точке y. Следовательно, область $\pi(D)$ штейнова. Ввиду насыщенности $D_{\mathbb{C}}$, отсюда следует, что и область $D_{\mathbb{C}} = \pi^{-1}(\pi(D))$ штейнова.

Достаточность. Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантное аналитическое подмножество в $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{f}$ – произвольная $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная аналитическая функция на $\boldsymbol{A}$. Докажем сначала, что она продолжается до $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантной аналитической функции $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ на аналитическом множестве $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} := \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{A}$.

Это утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 1

Множество $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{A}$ является аналитическим подмножеством в $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$ и множество $\boldsymbol{A}$ орбитально связно в $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$.

Выведем сначала из сформулированной леммы нужное нам утверждение.

Для этого продолжим $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантную аналитическую функцию $\boldsymbol{f}$, заданную на множестве $\boldsymbol{A}$, до $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантной аналитической функции на $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$, полагая ее равной константе вдоль $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-орбит точек из $\boldsymbol{A}$. Условие орбитальной выпуклости гарантирует корректность этого определения.

Утверждение леммы 1, в свою очередь, вытекает из еще одной леммы.

Лемма 2

Пусть $\boldsymbol{X}$ – комплексное пространство и $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ – комплексная связная группа Ли, голоморфно действующая на $\boldsymbol{X}$. Предположим, что $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная орбитально связная область в $\boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{A}$ – ее $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантное аналитическое подмножество. Тогда $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} \cap \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}$.

Выведем отсюда утверждение леммы 1. Из леммы 2 следует, что для любого элемента $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ имеет место равенство $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} \cap \boldsymbol{g}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{A}$, откуда вытекает, что $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} \cap \boldsymbol{g}\boldsymbol{D}$ является аналитическим подмножеством в $\boldsymbol{g}\boldsymbol{D}$. Так как множества $\boldsymbol{g}\boldsymbol{D}$ с произвольными $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ образуют открытое покрытие множества $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$, то $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$ является аналитическим подмножеством в $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$. Кроме того, множество $\boldsymbol{A}$ орбитально связно в $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$ ввиду связности множеств $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}^{-1}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}^{-1}(\boldsymbol{D})$ для любого $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$. Это доказывает лемму 1.

Покажем теперь, что достаточность условий теоремы вытекает из леммы 1.

Так как группа $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ редуктивна, то она обладает компактной вещественной формой $\boldsymbol{G}$. Очевидно, что штейнова область $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$ и ее аналитическое подмножество $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{A}$ инвариантны относительно этой подгруппы.

Пусть $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ есть продолжение исходной функции $\boldsymbol{f}$ до $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантной аналитической функции на аналитическом множестве $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$, полученное с помощью леммы 1. К функции $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ применимо утверждение инвариантной версии леммы Картана для компактной группы $\boldsymbol{G}$. Согласно этой версии функция $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ допускает продолжение до $\boldsymbol{G}$-инвариантной голоморфной функции $\boldsymbol{F}$ в области $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$.

По теореме единственности для голоморфных функций полученная функция $\boldsymbol{F}$ будет на самом деле инвариантна и относительно комплексифицированной группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, а ее сужение на $\boldsymbol{D}$ даст нам искомое голоморфное продолжение исходной функции $\boldsymbol{f}$ до голоморфной $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантной функции в $\boldsymbol{D}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема сводит задачу о голоморфной выпуклости комплексификаций инвариантных областей голоморфности к другой, возможно даже более принципиальной проблеме в теории инвариантных областей голоморфности — инвариантной версии леммы Картана.

Эта лемма тесно связана с еще одной важной задачей этой теории — а именно, задачей построения инвариантных компактификаций инвариантных областей голоморфности.

Иными словами, речь идет о построении компактификации $\widehat{\boldsymbol{D}}$ $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантной штейновой области $\boldsymbol{D}$ на многообразии Штейна $\boldsymbol{X}$ с голоморфным действием вещественной группы Ли $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Требуется, чтобы указанная компактификация $\widehat{\boldsymbol{D}}$ также была инвариантна относительно действия $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Проблема сводится к построению инвариантных замыканий некомпактных орбит.

Принцип минимума и расширенная труба будущего

Как отмечалось выше, доказательство теоремы о голоморфном продолжении в случае компактных групп основано на инвариантной версии леммы Картана. Так как эта лемма, вообще говоря, неверна для некомпактных групп, приходится искать другой путь доказательства голоморфной выпуклости комплексифицированных областей $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$.

Пусть $\boldsymbol{X}$ есть многообразие Штейна и $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ – связная комплексная группа Ли, действующая голоморфно на $\boldsymbol{X}$. Обозначим через $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ вещественную форму группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$. Пусть $\boldsymbol{D}$ есть $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная штейнова область в $\boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$ – ее комплексификация.

Можно попытаться построить $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантную определяющую функцию области $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$, предполагая, что исходная область $\boldsymbol{D}$ задана с помощью $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантной плюрисубгармонической функции $\boldsymbol{\varphi}$. Иными словами, $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) < \infty\}$, причем $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \to \infty$, когда $\boldsymbol{x}$ приближается к границе области $\boldsymbol{D}$.

Спрашивается, можно ли продолжить эту функцию до $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантной определяющей функции на $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$?

Мы видели, что для голоморфных функций такое продолжение возможно, если область $\boldsymbol{D}$ орбитально связна. К сожалению, указанный результат не распространяется на плюрисубгармонические функции, поскольку доказательство теоремы о голоморфном продолжении использует теорему единственности для голоморфных функций, которая, как известно, не имеет места для плюрисубгармонических функций.

Однако, имеется другой метод, позволяющий строить $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$-инвариантные определяющие функции областей $\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}$, исходя из $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантных плюрисубгармонических определяющих функций областей $\boldsymbol{D}$. Это т.н. принцип минимума Кисельмана–Лёба, к формулировке которого мы переходим.

Введем правое действие группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ на многообразии $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, полагая

$$(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}) \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \quad ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}), \boldsymbol{h}) \longmapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{gh}).$$

Рассмотрим естественные проекции

$$\boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}/\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}, \quad \boldsymbol{p} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \boldsymbol{X}.$$

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ – область в $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, инвариантная относительно действия группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Тогда всякая $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная вещественнозначная функция $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$ определяет естественным образом $\boldsymbol{C}^{\infty}$-гладкую функцию $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\chi g})$ на множестве $\dot{\boldsymbol{\Omega}} := (\mathrm{id} \times \chi)(\boldsymbol{\Omega})$, где
$\mathrm{id} \times \chi : \ \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \to \boldsymbol{X} \times (\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}/\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}})$.

Принцип минимума Кисельмана–Лёба

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ есть область в $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$, инвариантная относительно действия группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ и имеющая связные слои относительно проекции $\boldsymbol{p}$. Предположим, что функция $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) функция $\boldsymbol{u}$ плюрисубгармонична в $\boldsymbol{\Omega}$;

(2) функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ строго плюрисубгармонична в каждой области $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{\Omega} \cap \boldsymbol{p}^{-1}(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ при $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$;

(3) функция $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ является функцией исчерпания для каждой области $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{x}} := \chi(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{x}})$ с $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Тогда функция $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g})$ является $\boldsymbol{C}^{\infty}$-гладкой плюрисубгармонической функцией на $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\Omega})$.

Напомним, что функция φ, задающая область $D = \{x \in X : \varphi(x) < \infty\}$, называется *функцией исчерпания* для области D, если все ее множества уровня $\{x \in X : \varphi(x) < c\}$, $c \in \mathbb{R}$, являются компактами в D.

Принцип минимума был открыт Кисельманом в случае, когда $X = \mathbb{C}^n$, $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m$, $G_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^m$. В приведенной форме он принадлежит Лёбу.

Покажем, как указанный принцип минимума можно применить к доказательству штейновости области $D_{\mathbb{C}}$, являющейся комплексификацией $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной штейновой области D.

Допустим, что группы $(\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}, \boldsymbol{G}_{\mathbb{R}})$ образуют *псевдовыпуклую пару*, т.е. на группе $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ существует $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$-инвариантная плюрисубгармоническая функция, являющаяся функцией исчерпания для $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}/\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Указанное условие выполняется, например, если группа $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ компактна или нильпотентна.

Рассмотрим отображение действия

$$\boldsymbol{\rho} : \ \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \boldsymbol{X}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) \longmapsto \boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{x}$$

и обозначим через $\boldsymbol{\Omega}$ область $\boldsymbol{\rho}^{-1}(\boldsymbol{D})$. Заметим, что $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$, и слои проекции $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{D}$ связны $\Longleftrightarrow$ область $\boldsymbol{D}$ орбитально связна.

Согласно Лебу, в области Ω существует $G_{\mathbb{R}}$-инвариантная плюрисубгармоническая функция исчерпания. Если, например, область D задается $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной плюрисубгармонической функцией исчерпания φ, то в качестве такой функции на Ω можно взять прообраз φ при отображении ρ.

Выберем в качестве функции u из принципа минимума функцию, равную сумме трех функций: упомянутой $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной плюрисубгармонической функции на Ω, $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной плюрисубгармонической функции на $G_{\mathbb{C}}$, существующей по определению псевдовыпуклой пары, и какой-либо $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной строго плюрисубгармонической функции исчерпания на X, существующей ввиду штейновости X.

По принципу минимума функция $v(x) = \inf_{g \in \Omega_x} u(x, g)$ является плюрисубгармонической функцией исчерпания на $p(\Omega) = G_{\mathbb{C}} \cdot D$, откуда следует, что область $D_{\mathbb{C}}$ штейнова.

Именно с помощью указанного подхода Чжоу удалось установить голоморфную выпуклость расширенной трубы будущего и, тем самым, доказать гипотезу о расширенной трубе будущего.

Напомним формулировку этой гипотезы.

Пусть $\boldsymbol{M}$ есть пространство Минковского, т.е. 4-мерное векторное пространство, наделенное метрикой Лоренца:
$\boldsymbol{u \cdot v = u_0 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3}$ для любых
$\boldsymbol{u = (u_0, u_1, u_2, u_3), v = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in M}$. Обозначим через $\boldsymbol{V_+}$ световой конус будущего:

$$\boldsymbol{V_+ = \{v \in M :\ v^2 = v \cdot v > 0, v_0 > 0\}.}$$

Группа Лоренца $\boldsymbol{L := \mathrm{O}(1,3)}$ является группой линейных преобразований $\boldsymbol{M}$, сохраняющих метрику Лоренца, а ее связная компонента единицы $\boldsymbol{L^0}$ сохраняет световой конус будущего $\boldsymbol{V_+}$.

Обозначим через $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}$ комплексификацию пространства Минковского $\boldsymbol{M}$, совпадающую с 4-мерным комплексным векторным пространством $\mathbb{C}^{\mathbf{4}}$, и рассмотрим в этом пространстве трубчатую область

$$\boldsymbol{\tau}_{+} = \boldsymbol{M} + i\boldsymbol{V}_{+} = \{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{M}_{\mathbb{C}} : \ \boldsymbol{v}^{\mathbf{2}} > \mathbf{0}, \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}} > \mathbf{0}\},$$

называемую *трубой будущего.*

Действие группы Лоренца $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{M}$ продолжается комплексно-линейно до действия комплексифицированной группы Лоренца $\boldsymbol{L}_{\mathbb{C}} = \mathrm{O}(\mathbf{4}, \mathbb{C})$. Труба будущего $\boldsymbol{\tau}_{+}$, очевидно, инвариантна относительно указанного действия связной компоненты единицы $\boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}$ группы $\boldsymbol{L}$, но не инвариантна относительно действия ее комплексификации $\boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{C}}$. (Нетрудно показать, что образ $\boldsymbol{\tau}_{+}$ под действием $\boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{C}}$ совпадает со всем $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}$ за вычетом леви-плоской гиперповерхности.)

$\boldsymbol{N}$-*точечным аналогом* трубы будущего является область

$$\boldsymbol{\tau}_+^{\boldsymbol{N}} = \underbrace{\boldsymbol{\tau}_+ \times \ldots \times \boldsymbol{\tau}_+}_{\boldsymbol{N} \text{ раз}}$$

в пространстве $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{N}} = \mathbb{C}^{\boldsymbol{4N}}$. Продолжим действие комплексной группы Лоренца $\boldsymbol{L}_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}^{\boldsymbol{4N}}$ диагональным образом. Иными словами, действие элемента $\boldsymbol{\Lambda} \in \boldsymbol{L}_{\mathbb{C}}$ на вектор $(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{N}}) \in \boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{N}}$ задается формулой: $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{N}}) = (\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{N}})$.

Расширенной трубой будущего называется область

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{L}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{0}} \cdot \boldsymbol{\tau}_+^{\boldsymbol{N}}.$$

Гипотеза о расширенной трубе будущего утверждает, что $\boldsymbol{\tau}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{N}}$ является областью голоморфности в $\boldsymbol{M}_{\mathbb{C}}^{\boldsymbol{N}}$.

Гипотеза о расширенной трубе будущего была поставлена Уайтманом в середине прошлого века и долгое время находилась в центре внимания школ Уайтмана и Боголюбова, ее активным пропагандистом был Василий Сергеевич Владимиров. Именно благодаря ему, указанная гипотеза привлекла внимание математиков. Долгое время она не поддавалась их усилиям, пока в работе Чжоу не было получено ее полное решение на основе изложенных выше идей.

Этому результату предшествовало доказательство компактной версии гипотезы о расширенной трубе будущего в работе [Ser-Hei]. Указанная компактная версия была предложена В.С.Владимировым и получила название гипотезы о расширенном матричном круге.

Формулировка этой версии получается из приведенной выше формулировки гипотезы о расширенной трубе будущего, если:

(1) заменить трубу будущего матричным кругом, состоящим из комплексных $\mathbf{2 \times 2}$-матриц $\boldsymbol{Z}$, удовлетворяющих условию, что матрица $\boldsymbol{I - ZZ^*}$ положительно определена;

(2) заменить действие комплексной группы Лоренца $\boldsymbol{L}_{\mathbb{C}}$ действием группы $\boldsymbol{G}_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(\mathbf{2}, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(\mathbf{2}, \mathbb{C})$ на пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{2 \times 2}]$ комплексных $\mathbf{2 \times 2}$-матриц по правилу: элемент $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{C}}$ переводит матрицу $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{C}[\mathbf{2 \times 2}]$ в матрицу $\boldsymbol{AZB}^{\mathbf{-1}}$.

Доказательство в работе [Ser-Hei] было основано на упомянутой ранее теореме о голоморфном продолжении и не допускало распространения на случай гипотезы о расширенной трубе будущего.