

ТЕОРЕМА ХААГА И ТРИВИАЛЬНОСТЬ ГАУССОВЫХ МЕР

А.И. Кириллов

Российский фонд фундаментальных исследований

Как следует строить бесконечномерный анализ, если на бесконечномерных пространствах нет аналогов меры Лебега?

Одни математики используют гауссовы меры, например, меру Винера. Другие предпочитают не уточнять меру, предполагая только, что она обладает определенными свойствами.

В любом случае нужно, чтобы была справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_X g(x) f'_h(x) d\mu(x) = - \int_X g'_h(x) f(x) d\mu(x) - \int_X g(x) f(x) \beta_h(x) d\mu(x). \quad (1)$$

Здесь $\beta_h(x)$ — т.н. логарифмическая производная меры μ по направлению h . Это название оправдано тем, что если (разумеется, только в конечномерном случае) $d\mu(x) = \rho(x)dx$, то $\beta_h(x) = \partial_h \ln \rho(x)$.

Мера μ , для которой справедлива формула (1), называется дифференцируемой по направлению h . Все направления, по которым мера μ дифференцируема, образуют подпространство $\mathcal{D}(\mu) \subset X$. Если размерность пространства X бесконечна, не может быть, что $\mathcal{D}(\mu) = X$. Может быть только, что $\mathcal{D}(\mu)$ всюду плотно в X . Представляют интерес только меры с такими пространствами дифференцируемости. Гауссовы меры относятся к этому классу. Для них

$$\beta_h(x) = -\langle \hat{C}^{-1}x, h \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\hat{C}$ — ковариационный оператор меры μ , т.е. такой оператор $\hat{C} : X^* \mapsto X$, что

$$\int_X \langle h_1, x \rangle \langle h_2, x \rangle d\mu(x) = \langle h_1, \hat{C} h_2 \rangle. \quad (3)$$

Гауссовы меры характерны тем, что

$$\int_X e^{i\langle h, x \rangle} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\langle h, \hat{C} h \rangle + i\langle h, a \rangle} \quad (4)$$

Здесь слева стоит т.н. характеристический функционал меры μ . Он однозначно определяет меру. Очевидно, что гауссовы меры определяются своими характеристическими функционалами очень просто. Этим

они привлекают многих исследователей. Цель данного сообщения — показать, что в если размерность пространства X бесконечна, то пространство $L^2(X, \mu)$, где μ гауссова или абсолютно непрерывна относительно гауссовой непригодно для построения физически нетривиальных моделей.

1. Теорема Хаага

Обсудим каноническую модель скалярного квантового поля φ . Обозначим гильбертово пространство его состояний символом $\mathcal{H}$. Для любого ненулевого вектора $\Omega \in \mathcal{H}$ отображение

$$q \in X^* \mapsto \langle \Omega, e^{i\varphi(q)} \Omega \rangle \quad (5)$$

обладает всеми свойствами характеристического функционала некоторой вероятностной меры. По теореме Бохнера или подходящему ее обобщению, на борелевском σ -кольце измеримых подмножеств пространства X определена такая мера μ , что

$$\forall q \in X^* \quad \langle \Omega, e^{i\varphi(q)} \Omega \rangle = \int_X e^{i\langle q, x \rangle} d\mu(x). \quad (6)$$

Таким образом исходное пространство состояний ставится в изоморфизм с пространством $L^2(X, \mu)$. При этом образом оператора

$$\hat{U}(q) = e^{i\varphi(q)} \quad (7)$$

является оператор умножения на

$$e^{i\langle q, x \rangle}. \quad (8)$$

В канонической модели вместе с φ фигурирует сопряженная наблюдаемая ψ (импульс). Образом оператора

$$\hat{V}(p) = e^{i\psi(p)} \quad (9)$$

является оператор

$$\hat{V}(p)\Psi(x) = a(p, x)\Psi(x + p). \quad (10)$$

Здесь $a(p, x) = \hat{V}(p)1$.

Оказывается, что мера μ квазиинвариантна и ее множитель квазиинвариантности $d\mu_p/d\mu$ равен $|a(p, x)|^2$, т.е.

$$\int_X \Psi(x) d\mu(x) = \int_X \Psi(x + p) d\mu_p(x) = \int_X \Psi(x + p) |a(p, x)|^2 d\mu(x) \quad (11)$$

Более того, мера μ является дифференцируемой и нетрудно проверить, что генераторами полугрупп $\hat{U}(q)$ и $\hat{V}(p)$ в пространстве $L^2(X, \mu)$ являются операторы умножения на $\langle q, x \rangle$ и $-i\partial_p - i\beta_p(x)/2$. Здесь $\beta_p(x)$ — логарифмическая производная меры μ .

Поскольку логарифмическая производная гауссовой меры — линейная функция, оператор уничтожения частиц, получающийся из $\langle q, x \rangle$ и $-i\partial_p - i\beta_p(x)/2$, пропорционален ∂_p . Поэтому состояние без частиц представлено в пространстве $L^2(X, \mu)$ функцией, тождественно равной единице. Она, конечно, эвклидово инвариантна. В общем случае это утверждение называется теоремой Хаага:

В эвклидово инвариантной канонической модели состояние без частиц эвклидово инвариантно.

С другой стороны, эвклидово инвариантное состояние — это основное состояние. Оно не эволюционирует. Поэтому гамильтониан должен отображать это состояние в нулевой. Но нет гамильтонианов, кроме гамильтонианов свободных полей, которые отображали бы состояние без частиц в нулевой вектор.

Вывод: в пространстве $L^2(X, \mu)$ с гауссовой мерой канонически можно реализовать только модель свободного поля.

Это утверждение остается справедливым и в отношении мер, абсолютно непрерывных относительно гауссовых.

Хааг одним из первых обнаружил и другой факт: каноническая динамика квантовой системы полностью определяется ее основным состоянием. Араки выразил эту идею в математической форме. Потом ее развивали. Теперь можно утверждать, что справедливо равенство

$$\langle \Phi, \widehat{H} \Psi \rangle = \sum_k \int_X \partial_k \bar{\Phi}(x) \partial_k \Psi(x) d\mu(x). \quad (12)$$

Очевидно, что если мера μ гауссова, то гамильтониан квадратичен, т.е. получается модель обобщенного свободного поля.

2. Какие функциональные пространства нужны для реализации моделей квантовых полей?

Формула (12) подсказывает, что для построения нетривиальных моделей нужно использовать меру, не являющуюся гауссовой и даже не абсолютно непрерывную относительно гауссовой. Но у таких мер неизвестны характеристические функционалы. Как же их определять? Есть два родственных способа.

Первый состоит в использовании локальных инвариантов (Малля-вэн). Например, логарифмической производной (Авербух, Смолянов, Фомин). Используем броуновское движение со сносом в пространстве X

$$d\xi_h(t) = \beta_h(\xi(t))dt + dw_h(t) \quad (13)$$

Нужно привыкнуть писать вместо

$$\int_X f(x)d\mu(x) \quad (14)$$

что-нибудь типа

$$E(f(\xi(t))) = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(\xi(t))) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(\xi(t)))dt \dots \quad (15)$$

Второй способ состоит в использовании пространств, оснащающих, например, $L^2(S'(\mathbb{R}^n), \gamma)$. Здесь γ — гауссова мера с характеристическим функционалом

$$q \in S(\mathbb{R}^n) \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|q\|^2} \quad (16)$$

Это — так называемый White noise analysis (Hida, Albeverio, Potthoff, Roeckner, Streit).

Используя то, что оснащения пространства $L^2(S'(\mathbb{R}^n), \gamma)$ хорошо изучены, удалось доказать, что к распределениям относятся

- 1 дифференцируемые меры,
- 2 производящие функционалы S -матрицы
- 3 производящие функционалы функций Швингера.

Адамар и учебник Владимирова