Счетные линейные порядки и их алгоритмическая сложность

Фролов Андрей Николаевич

Казанский федеральный университет

21 ноября 2013

Введение

Определение

Пара (A, R) называется (строгим) линейным порядком, если $R \subseteq A^2$ является

1) антирефлексивным, т.е. $(\forall x \in A)[\neg x <_R x]$,
2) антисимметричным, т.е. $(\forall x, y \in A)[x <_R y \to \neg y <_R x]$,
3) транзитивным, т.е. $(\forall x, y, z \in A)[x <_R y \,\&\, y <_R z \to x <_R z]$,
4) $(\forall x, y \in A)[x <_R y \vee x = y \vee y <_R x]$.

Где $x <_R y$ означает $(x, y) \in R$.

Определение

Счетный или конечный линейный порядок $(A, <_R)$ называется вычислимым (X-вычислимым), если множество A и отношение порядка $<_R$ являются вычислимыми (X-вычислимыми).

Введение

Определение

Для любого линейного порядка L говорим, что элементы x и y находятся в одном *блоке* и пишем $x \sim_L y$, если
1) либо $x \leq_L y$ и интервал $[x, y]_L = \{z \mid x \leq_L z \leq_L y\}$ конечен,
2) либо $y <_L x$ и интервал $[y, x]_L = \{z \mid y \leq_L z \leq_L x\}$ конечен.

Определение

Множество $[x]_L = \{y \mid y \sim_L x\}$ называется *блоком*.

Введение

* Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков.
* Описание достаточных (и необходимых) условий вычислимой представимости линейных порядков.
* Описание тьюринговых степеней представимости (т.е. спектров) линейных порядков.

Литература

Downey R. *Computability theory and linear orders* // In: Ershov, Yu. L., Goncharov, S. S., Nerode, A., Remmel, J. B. (eds.) Handbook of Recursive Mathematics, 1998. V. 138 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, chapter 14. Elsevier.

Литература

Downey R., Remmel J. *Questions in Computable Algebra and Combinatorics* // Wellington, N.Z.: School of Mathematical and Computing Sciences, Victoria University of Wellington, 2000.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Определение

Бинарное отношение S_L линейного порядка L называется отношением соседства, если

$$S_L(x,y) = (x <_L y) \,\&\, (\forall z)[\neg(x <_L z <_L y)].$$

Теорема (М. Мозес [1983, 1984])

Линейный порядок имеет представление, Σ_1- и Π_1-формулы которого являются равномерно вычислимыми, (т.е. порядок имеет 1-разрешимое представление) тогда и только тогда когда, он имеет вычислимое представление, у которого отношение соседства также вычислимо.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Теорема (В. Дзгоев, С. Гончаров [1980], Дж. Реммел [1981])

Вычислимый линейный порядок содержит лишь конечное число пар соседних элементов тогда и только тогда, когда каждая его вычислимая копия также и *вычислимо* изоморфна ему (т.е. линейный порядок является вычислимо категоричным).

Теорема (С. Гончаров [1973])

Существует вычислимый линейный порядок L, отношение соседства которого невычислимо ни в каком вычислимом представлении L.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Определение

Спектром отношения соседства вычислимого линейного порядка L называется класс

$$DgSp_L(S) = \{\deg_T(S_R) \mid R \cong L \,\&\, R \text{ вычислим}\}.$$

Фундаментальная проблема (Р. Доуни и Дж. Реммел [2000])

Описать спектр отношения соседства.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Замечание

Пусть L – вычислимый линейный порядок такой, что S_L конечен, то $DgSp_L(S) = \{\mathbf{0}\}$.

Теорема (Р. Доуни и М. Мозес [1982])

Существует вычислимый линейный порядок L такой, что $DgSp_L(S) = \{\mathbf{0}'\}$.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Вопросы (Р. Доуни, Дж. Реммел [2000])

1) Существует ли вычислимый линейный порядок, спектр отношения соседства которого одноэлементный или хотя бы конечен и отличен от $\{\mathbf{0}\}$ и $\{\mathbf{0}'\}$?
2) Верно ли, что спектр отношения соседства вычислимого линейного порядка либо тривиален ($DgSp_L(S) = \{\mathbf{0}\}$), либо содержит $\{\mathbf{0}'\}$?

Вопрос (А. Фролов, В. Харизанова, Дж. Чаб [2009])

Является ли спектр отношения соседства вычислимого нетривиального линейного порядка замкнутым наверх в классе вычислимо перечислимых степеней?

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Теорема (А. Фролов, В. Харизанова, Дж. Чаб [2009])

Для каждой вычислимо перечислимой степени **a** существует вычислимый линейный порядок, спектр отношения соседства которого образует главный конус в вычислимо перечислимых степенях с вершиной **a**, т.е. $DgSp_L(S) = \{\mathbf{b} \in \Sigma_1^0 \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{b}\}$.

Литература

J. Chubb, A. Frolov, V. Harizanov *Degree spectra of successivities of linear orderings* // Archive for Mathematical Logic, 2009, 1 (48), p. 7-13.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Определение

Линейный порядок называется η-схожем, если он не содержит сегментов, упорядоченных по типу ω или ω^*. Другими словами, этот порядок имеет вид

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}} f(q), \text{ где } f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}/\{0\}.$$

Теорема (Г. Ву, Р. Доуни, Ш. Лемпп [2010])

Спектр отношения соседства вычислимого η-схожего линейного порядка либо тривиален, либо замкнут наверх в классе вычислимо перечислимых степеней.

I. Описание алгоритмических свойств вычислимых линейных порядков

Теорема (А. Фролов [2010])

Спектр отношения соседства вычислимого линейного порядка, не являющегося η-схожим замкнут наверх в классе вычислимо перечислимых степеней.

Следствие

Спектр отношения произвольного вычислимого линейного порядка либо тривиален, либо замкнут наверх в классе вычислимо перечислимых степеней.

Литература

А.Н. Фролов *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка* // Известия ВУЗов. Математика, 2010, 7 (54), с. 73-85.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Теорема (К. Джокуш, Р. Соар [1991])

Существует низкий линейный порядок, не имеющий вычислимого представления.

Теорема (Р. Доуни, М. Мозес [1989])

Каждый низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимое представление.

Определение

Линейный порядок называется *дискретным*, если каждый элемент имеет непосредственного соседа и слева, и справа.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Фундаментальная проблема (Р. Доуни [1998])

Описать порядковые типы линейных порядков, для которых из существования *низкого* представления следует существование вычислимого представления.

Определение

Множество X называется *низким*, если $X' \leq_T \emptyset'$.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Теорема (А. Фролов [2010] и, независимо, А. Монталбан [2009])

Линейный порядок имеет низкое представление тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление, отношение соседства которого также $\mathbf{0}'$-вычислимо.

Литература

А.Н. Фролов *Линейные порядки низкой степени* // Сибирский математический журнал, 2010, 5 (51), с. 1147-1162.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Определение

Линейный порядок называется k-квазидискретным, если каждый его блок либо бесконечен, либо имеет мощность не более k.

Теорема (А.Н. Фролов [2010])

Для любого натурального числа k каждый низкий k-квазидискретный линейный порядок имеет вычислимое представление.

Литература

А.Н. Фролов *Линейные порядки низкой степени* // Сибирский математический журнал, 2010, 5 (51), с. 1147-162.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Фундаментальная проблема (Р. Доуни [1998])

Описать порядковые типы линейных порядков, для которых из существования *низкого* представления следует существование вычислимого представления.

Проблема

Описать порядковые типы линейных порядков, для которых из существования *n-низкого* представления следует существование вычислимого представления.

Определение

Множество X называется *n-низким*, если $X^{(n)} \leq_T \emptyset^{(n)}$.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Теорема (А. Фролов [2012])

Линейный порядок имеет 2-низкое представление тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление R, у которого отношение соседства и следующие отношения также являются $\mathbf{0}''$-вычислимыми:

$P_R^+(x) = (\forall y >_R x)(\exists z)[y >_R z >_R x]$,
$P_R^-(x) = (\forall y <_R x)(\exists z)[y <_R z <_R x]$,
$Q_R(n, x, y) = (x <_R y)\,\&$

$$\neg(\exists x', y')[x \leq_R x' <_R y' \leq_R y \,\&\, |[x', y']_R| = n].$$

Литература

A. Frolov *Low linear orderings* // Journal of Logic and Computation, 2012, 4 (22), p. 745-754.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Теорема (П. Алаев, Дж. Тёрбер, А. Фролов [2009])

Каждый 2-низкий 1-квазидискретный линейный порядок имеет вычислимое представление.

Литература

П. Алаев, Дж. Тёрбер, А. Фролов *Вычислимость на линейных порядках, обогащённых предикатами* // Алгебра и Логика, 2009, 5 (48), с. 549-563.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Вопрос (А. Кэч, А. Монталбан [2009])

Верно ли, что каждый 2-низкий *разреженный* линейный порядок имеет вычислимую копию?

Определение

Линейный порядок называется *разреженным*, если он не содержит плотного подпорядка.

II. Описание достаточных условий вычислимой представимости

Теорема (А.Н. Фролов [2014])

Существует 2-низкий разреженный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления.

Литература

A.N. Frolov *Scattered linear orderings with no computable presentation* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2014, 1, принято к печати.

III. Описание спектров линейных порядков

Определение

Спектром линейного порядка L называется класс $Sp(L) = \{\deg_T(R) \mid R \cong L\}$.

Фундаментальная проблема (Р. Доуни [1998], Р. Доуни и Дж. Реммел [2000])

Описать спектры линейных порядков.

Вопрос (Р. Доуни [1998])

Существует ли линейный порядок, спектр которого содержит в точности все ненулевые степени?

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller [2012])

Для каждого $n \geq 2$ существует линейный порядок, чей спектр содержит в точности все степени, не являющиеся n-низкими.

Литература

A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller, Spectra of high_n and nonlow_n degrees // Journal of Logic and Computation, 2012, 4 (22), p. 745-754.

III. Описание спектров линейных порядков

Определение

Ограниченным спектром или $\mathbf{0}'$-спектром линейного порядка L называется класс
$Sp^{\mathbf{0}'}(L) = \{\deg_T(R) \leq \mathbf{0}' \mid R \cong L\} = Sp(L) \cap \Delta^0_2$.

Теорема (Р. Миллер [2000])

Существует линейный порядок, чей $\mathbf{0}'$-спектр содержит в точности все ненулевые $\mathbf{0}'$-степени.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (Р. Миллер [2000])

Существует линейный порядок, чей $\mathbf{0}'$-спектр содержит в точности все $\mathbf{0}'$-степени, не являющиеся 0-низкими.

Теорема (А.Н. Фролов [2006])

Существует линейный порядок, чей $\mathbf{0}'$-спектр содержит в точности все $\mathbf{0}'$-степени, не являющиеся низкими (т.е. 1-низкими).

Литература

А.Н. Фролов Δ^0_2-*копии линейных порядков* // Алгебра и Логика, 2006, 3 (45), с. 69-75.

III. Описание спектров линейных порядков

Определение

Множество X называется *n-высоким*, если $\emptyset^{(n+1)} \leq_T X^{(n)}$.

Теорема (A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller [2012])

1) Для любого $n \geq 2$ существует линейный порядок, чей спектр содержит в точности все n-высокие степени. 2) Не существует такого линейного порядка, чей бы спектр содержал в точности все 0- или все 1-высокие степени.

Литература

A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller, Spectra of high$_n$ and nonlow$_n$ degrees // Journal of Logic and Computation, 2012, 4 (22), p. 745-754.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (А.Н. Фролов [2013])

1) Существует линейный порядок L, чей $\mathbf{0}'$-спектр содержит в точности все 0-высокие $\mathbf{0}'$-степени. Другими словами, $Sp^{\mathbf{0}'}(L) = \{\mathbf{0}'\}$.
2) Существует линейный порядок, чей $\mathbf{0}'$-спектр содержит в точности все 1-высокие $\mathbf{0}'$-степени.

Литература

А.Н. Фролов *Заметка о Δ^0_2-спектрах линейных порядках и спектрах отношения соседства на них* // Изв. вузов. Математика, 2013, 11, с. 74-78.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (А.Н. Фролов [2013])

Для любого $\mathbf{0}'$-вычислимого линейного порядка L существует вычислимый линейный порядок R такой, что

$$DgSp_R(S) = Sp^{\mathbf{0}'}(L) \cap \Sigma^0_1.$$

Литература

А.Н. Фролов *Заметка о Δ^0_2-спектрах линейных порядках и спектрах отношения соседства на них* // Изв. вузов. Математика, 2013, 11, с. 74-78.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (Р. Доуни, Дж. Найт [1992])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\eta + 2 + \eta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Теорема (Р. Ватник [1984])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\zeta \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Теорема (Дж. Найт, К. Эш [2000])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\omega \cdot L$ имеет вычислимое представление.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (А.Н. Фролов [2006, 2012])

Если τ – вычислимый линейный порядок без наибольшего или наименьшего элемента и L – $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок, то $\tau \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Следствие (Р. Доуни, Дж. Найт [1992])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\eta + 2 + \eta) \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Литература

А.Н. Фролов Δ^0_2-*копии линейных порядков* // Алгебра и Логика, 2006, 3 (45), с. 69-75.

III. Описание спектров линейных порядков

Теорема (А.Н. Фролов [2012])

Пусть τ – $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства, не имеющий ни наибольшего элемента, ни финального сегмента, являющегося сильно η-схожим. Если L – $\mathbf{0}''$-вычислимый линейный порядок, то $\tau \cdot L$ имеет низкое представление.

Литература

А.Н. Фролов *Линейные порядки. Теоремы кодирования* // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки, 2012, 2 (154), с. 142-151.

III. Описание спектров линейных порядков

Следствие (Р. Ватник [1984])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\zeta \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Следствие (Дж. Найт, К. Эш [2000])

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $\omega \cdot L$ имеет вычислимое представление.

Следствие

Линейный порядок L имеет $\mathbf{0}''$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда $(\zeta + k + \zeta) \cdot L$ имеет вычислимое представление ($k \geq 1$).

Результаты работы

Фундаментальная проблема (Р. Доуни [1998], Дж. Реммел [2000])

Описать спектр отношения соседства.

Вопросы (Р. Доуни и М. Мозес [1982], Р. Доуни [1998], Дж. Реммел [2000])

1) Существует ли вычислимый линейный порядок, спектр отношения соседства которого одноэлементный или хотя бы конечен и отличен от $\{\mathbf{0}\}$ и $\{\mathbf{0}'\}$?
2) Верно ли, что спектр отношения соседства вычислимого линейного порядка либо тривиален ($DgSp_L(S) = \{\mathbf{0}\}$), либо содержит $\{\mathbf{0}'\}$?

Результаты работы

Фундаментальная проблема (Р. Доуни [1998])

Описать порядковые типы линейных порядков, для которых из существования *низкого* представления следует существование вычислимого представления.

Проблема

Описать порядковые типы линейных порядков, для которых из существования *n-низкого* представления следует существование вычислимого представления.

Вопрос (А. Кэч, А. Монталбан [2009])

Верно ли, что каждый 2-низкий *разреженный* линейный порядок имеет вычислимую копию?

Результаты работы

Фундаментальная проблема (Р. Доуни и Дж. Реммел [2000])

Описать спектры линейных порядков.

Вопрос (Р. Доуни [1998])

Существует ли линейный порядок, спектр которого содержит в точности все ненулевые степени?

Доклады на конференциях (Пленарные доклады)

1. *Вычислимые модели и нумерации*, Новосибирск, 2007, 6 - 11 августа.
2. *Algebra and Logic, Theory and Applications*, Красноярск, 2010, 19 - 27 июля.
3. *Мальцевские чтения*, Новосибирск, 2011, 11 - 14 октября.
4. *Современные проблемы алгебры и математической логики*, Казань, 2011, 22 сентября - 3 октября.
5. *Workshop on Computability Theory*, Барселона (Испания), 2011, 17 июля.
6. *Definability in Computable Structures*, Чикаго (США), 2012, 12-13 мая.

Доклады на конференциях

* *Мальцевские чтения*, Новосибирск, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010.
* *Logic Colloquium*, 2007 (Врацлав, Польша), 2009 (София, Болгария), 2011 (Барселона, Испания).
* *Вычислимость и Модели*, Усть-Каменогорск, Казахстан, 2009.

Публикации по теме диссертации (из списка ВАК)

1. А.Н. Фролов Δ^0_2-*копии линейных порядков* // Алгебра и Логика, 2006, 3 (45), с. 69-75.
2. J. Chubb, A. Frolov, V. Harizanov, Degree spectra of successivities of linear orderings // Archive for Mathematical Logic, 2009, 1 (48), 7-13.
3. A. Frolov, M. Zubkov, Increasing η-representable degrees // Mathematical Logic Quarterly, 2009, 6 (55), 633-636.
4. П. Алаев, Дж. Тёрбер, А. Фролов, Вычислимость на линейных порядках, обогащённых предикатами // Алгебра и Логика, 2009, 5 (48), 549-563.

Публикации по теме диссертации (из списка ВАК)

5. А.Н. Фролов *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка* // Известия ВУЗов. Математика, 2010, 7 (54), с. 73-85.
6. А.Н. Фролов *Линейные порядки низкой степени* // Сибирский математический журнал, 2010, 5 (51), с. 1147-162.
7. A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller, Spectra of high$_n$ and nonlow$_n$ degrees // Journal of Logic and Computation, 2012, 4 (22), p. 745-754.
8. A. Frolov *Low linear orderings* // Journal of Logic and Computation, 2012, 4 (22), p. 745-754.

Публикации по теме диссертации (из списка ВАК)

9. А.Н. Фролов *Линейные порядки. Теоремы кодирования* // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки, 2012, 2 (154), с. 142-151.
10. А.Н. Фролов *Заметка о Δ_2^0-спектрах линейных порядках и спектрах отношения соседства на них* // Изв. вузов. Математика, 2013, 11, с. 74-78.
11. A.N. Frolov *Scattered linear orderings with no computable presentation* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2014, 1, принято к печати.