Обзор научных работ члена-корреспондента РАН действительного члена Академии криптографии РФ Б. А. Севастьянова

А. М. Зубков

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Москва 2013

Ветвящиеся процессы с дискретным временем (поколения). Частицы каждого поколения независимо друг от друга и от предыстории порождают потомков, образующих следующее поколение.
Распределение совокупности потомков соответствует типу частицы.

Модель предложена Гальтоном и Ватсоном в 1873 г.
Р.А.Фишер (1930 г.) — модель размножения гена в популяции.

Процессы с одним типом частиц: $\mu(n)$ — число частиц в n-м поколении; $a = \mathbf{M}\{\mu(1)|\mu(0) = 1\}$ — среднее число потомков одной частицы. Докритические ($a < 1$), надкритические ($a > 1$) и критические ($a = 1$) процессы.

А.Н.Колмогоров. К решению одной биологической задачи. — Изв. НИИ математики и механики Томского университета, 1938, т.2, вып.1, с.7–12: вывод асимптотических формул для вероятности невырождения процессов с одним типом частиц если $n \to \infty$, то
$\mathbf{P}\{\mu(n) > 0\} \sim Ca^n$ при $a < 1$,
$\mathbf{P}\{\mu(n) > 0\} \sim \frac{2}{n\mathbf{M}\{\mu(1)^{[2]}|\mu(0)=1\}}$ при $a = 1$.

Термин «ветвящийся случайный процесс» впервые появился в работе
А.Н.Колмогоров, Н.А.Дмитриев. Ветвящиеся случайные процессы. — Доклады АН СССР, 1947, т.LVI, № 1, с.7–10: ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц; вывод рекуррентных уравнений для производящих функций совместных распределений частиц разных типов в n-м поколении.

А.Н.Колмогоров, Б.А.Севастьянов. Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов. — Доклады АН СССР, 1947, т.LVI, № 8, с. 783–786: Процессы с несколькими типами частиц (типы — цепь Маркова с финальными классами); вывод системы уравнений для предельного распределения чисел частиц финальных классов. Процесс с 2 типами частиц T_1 и T_2:
$\mathbf{P}\{T_1 \to 2T_1\} = \mathbf{P}\{T_1 \to T_2\} = \frac{1}{2}\,,\ \mathbf{P}\{T_2 \to T_2\} = 1.$
Если ζ_n — итоговое число частиц типа T_2, когда процесс начинается с n частиц типа T_1, то ζ_n/n^2 при $n \to \infty$ слабо сходится к распределению с явно выписанной характеристической функцией (распределению Бореля–Таннера).

А.М.Яглом. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. — Доклады АН СССР, 1947, т.LVI, № 8, с. 783–786: Процессы с одним типом частиц; $\mu(n)$ — число частиц в n-м поколении; $f(s) = \mathbf{M}\{s^{\mu(1)}|\mu(0)=1\}$ — производящая функция числа потомков одной частицы.

Если $a = f'(1) < 1$, то существуют $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mu(n)=k|\mu(n)>0\} = p_k^*$, $\sum_{k\geqslant 1} p_k^* = 1$.

Если $a > 1,\ f''(1) = b > a(a-1),\ f'''(1) < \infty$, то существует непрерывный зависящий от $f(s)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu(n)}{\mathbf{M}\{\mu(n)|\mu(n)>0\}} < y \middle| \mu(n) > 0\right\}.$$

Если $a = 1,\ b = f''(1) \neq 0,\ f'''(1) < \infty$, то $\mathbf{M}\{\mu(n)|\mu(n)>0\} \sim \frac{bn}{2}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu(n)}{\mathbf{M}\{\mu(n)|\mu(n)>0\}} < y \middle| \mu(n) > 0\right\} = 1 - e^{-y},\ y > 0.$$

Следующие публикации:

Ветвящиеся случайные процессы. - Вестник МГУ, 1948, № 3, с. 13 - 34.

К теории ветвящихся случайных процессов. - Доклады АН СССР, 1948, т. LIX, № 8, с. 1407 - 1410.

Теория ветвящихся случайных процессов. - Успехи матем. наук, 1951, т. VI, вып. 6, с. 47 - 99.

Ветвящиеся случайные процессы. - Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1951, 79 с.

Темы последующих работ по теории ветвящихся процессов и непосредственные ученики, их продолжавшие:

переходные явления (схема серий процессов, сходящихся к критическим), В.А.Ватутин, О.В.Вьюгин, Е.Е.Дьяконова, Г.Д.Макаров, В.П.Чистяков

ветвящиеся процессы с иммиграцией, В.А.Ватутин, Е.Е.Дьяконова, А.М.Зубков, Г.Д.Макаров, В.П.Чистяков, Н.М.Янев

ветвящиеся процессы с диффузией частиц, В.А.Ватутин, П.И.Майстер

ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста, В.А.Ватутин, А.Л.Якымив, P.Jagers

условия регулярности ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, В.А.Ватутин, С.А.Гришечкин

регулируемые ветвящиеся процессы (в том числе ограниченные сверху или снизу), А.М.Зубков, Н.М.Янев

ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц (новые частицы порождаются группами существующих), А.В.Калинкин

ветвящиеся процессы и случайные отображения конечных множеств, В.Ф.Колчин, Г.Д.Макаров

Ветвящиеся процессы. - Докторская диссертация: Матем. ин-т им. В.А.Стеклова АН СССР, 1968.

Ветвящиеся процессы. - М.: Наука, 1971, 436 с.

Ветвящиеся процессы (на японском языке).

Verzweigungsprozesse. Mathematische Lehrbucher und Monographien. Band 34. Akademie-Verlag, Berlin, 1974. xi+326 pp.

Асимптотика вероятности продолжения ограниченного снизу марковского критического ветвящегося процесса с непрерывным временем и бесконечной дисперсией. — Дискретная математика, 2006, т.18, вып.1, с.3–8.

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0\leqslant m\leqslant n}\mu(m)>r\Big|\mu(0)=m\right\}\sim(m-r)\mathbf{P}\left\{\mu(n)>0|\mu(0)=1\right\}$$

Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора. — Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда (Москва, июнь-июль 1956).

Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. — Теория вероятн. и ее примен. - 1957, т. II, вып. 1, с. 106 - 116.

Теорема. *Однородный по времени случайный марковский процесс имеет единственное стационарное распределение вероятностей, которое является эргодическим, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество C, распределение вероятностей R и такие числа $t_0, t_1 > 0$, $k > 0$, $K > 0$, что*
1) $kR(A) \leqslant P(x, t_1, A)$, *если* $x \in C$, $A \subseteq C$ *измеримо,*
2) $P_t(C) \geqslant 1 - \varepsilon$ *при любых* $t \geqslant t_0$ *и распределении* P_0,
3) $P_t(A) \leqslant KR(A) + \varepsilon$ *при любых* $t \geqslant t_0$, *распределении* P_0, *измеримом* $A \subseteq C$.

Для системы массового обслуживания типа $M|G|n$ стационарное распределение числа занятых линий и вероятность потери требования зависят только от интенсивности входного потока и от математического ожидания времени обслуживания, но не от вида G.

Проверка гипотезы о равновероятности в полиномиальной схеме по малой выборке.

Проверка гипотезы о неравновероятности с точностью до перенумерации исходов.

Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках (совм. с В.П.Чистяковым). — Теория вероятн. и ее примен. — 1964, т. IX, вып. 2, с. 223–237.

Предельные теоремы в одной схеме размещения частиц по ячейкам. — Теория вероятн. и ее примен. — 1966, т. XI, вып. 4, с. 696–700.

Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа пустых ящиков в классической задаче о дробинках. — Теория вероятн. и ее примен. - 1967, т. XII, вып. 1, с. 144–154.

Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен. — 1972, т. XVII, вып. 4, с. 733–738: рецепт применения метода моментов при доказательстве сходимости распределений сумм зависимых индикаторов к закону Пуассона.

Случайные размещения (совм. с В.Ф.Колчиным и В.П.Чистяковым). — М.: Наука, 1976, 224 с.

Random allocations (with V.F.Kolchin, V.P.Chistyakov). — J.Wiley & Sons, New York-Toronto, 1978. xi+262 pp.

Доверительные пределы для средней вероятности в схеме Пуассона. — Теория вероятн. и ее примен. — 1961, т. VI, вып. 2, с. 242 - 244.

Последовательный критерий хи-квадрат (совм. с В.К.Захаровым и О.В.Сармановым). - Матем. сб., 1969, т. 79, № 3, с. 444 - 460: формулы для преобразования Лапласа совместного распределения статистик Пирсона по увеличивающимся отрезкам выборки.

Случайные отображения и разбиения конечных множеств. — Теория вероятн. и ее примен. — 1972, т. XVII, вып. 1, с. 129 - 142.

Условное распределение выхода автоматов без памяти при заданных характеристиках входа. — Дискретн. матем., 1994, т. 6, № 1, с. 34–39.

О числе входных последовательностей, соответствующих выходной последовательности конечного автомата. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, № 1, с. 96–107.

Исследование вероятностной зависимости выхода автомата от некоторых характеристик входа. — Труды по дискретной математике. — 2000, т. 5, с. 219 - 226. Вход — случайная двоичная последовательность $\{x_t\}$, выход — двоичная последовательность $y_t = f_K(x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n-1})$, где f_K — неизвестная функция из известного большого класса. Проверка сложной гипотезы о существовании такой связи между последовательностями по условным распределениям y_t при фиксированном числе единиц в $x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n-1}$.

Распределение вероятностей перманентов случайных матриц с независимыми элементами в поле $GF(p)$. — Труды по дискретной математике. — 2000, т. 3, с. 235 - 248.

Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982, 255 с.

Теория вероятностей (совм. с В.К.Захаровым и В.П.Чистяковым). — М.: Наука, 1983, 160 с.
Probability Theory for Engineers (with V.K.Zaharov, V.P.Chistyakov). — New York: Optimization Software, 1987, 161 p.
Teoria de las probabilidades (with V.K.Zaharov, V.P.Chistyakov). — Moscow: Mir, 1985, 152 p.

Сборник задач по теории вероятностей (совм. с В.П.Чистяковым, А.М.Зубковым). — М.: Наука, 1980, 224 с. 2-е изд. — М.: Наука, 1989, 320 с. 3-е изд. — СпБ - М.: Лань, 2009 г., 320 с.
Problems in the Theory of Probability (with V.P.Chistyakov, A.M.Zubkov). — Moscow: Mir, 1985, 160 p.
Valoszinuseg-elmeleti Feladatok (with V.P.Chistyakov, A.M.Zubkov). — Budapest: Tankonyvkiado, 1987, 354 p.