Г. К. Каменев

Оптимальные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

56 конференция МФТИ

30 ноября 2013 г.

Аппроксимация многогранниками выпуклых компактных тел

$$\mathbb{E}^d \quad \rho \quad \mathscr{C} \quad \mathscr{P}$$

$$\delta(C_1,C_2) := \max\{\sup\{\rho(x, C_2): x\in C_1\}, \sup\{\rho(x, C_1): x\in C_2\}\}$$

Задача полиэдральной аппроксимации:

для $C\in\mathscr{C}$ и $0\le\delta^*$ найти $P\in\mathscr{P}$ из некоторого класса: $\delta(P, C)\le\delta^*$.

Задача оптимальной полиэдральной аппроксимации
поиск *Многогранника Наилучшей Аппроксимации* (МНА):

для $C\in\mathscr{C}$ найти $P\in\mathscr{P}$ из некоторого класса: $\delta(P, C) \to \min$

Основные обзоры

1. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
2. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37

Классификация ЗАДАЧ полиэдральной аппроксимации

Для любого ВКТ существует многогранник, отклонение которого не превышает заданное [*Минковский*, 1903].

Способы задания аппроксимируемых тел:

– характеристической функцией;

– через опорную или дистанционную (калибровочную) функции

$$g(u, C) := \max \{\langle u, x\rangle : x \in C\};$$

$$g^*(x, C) := \min \{\lambda \geq 0 : x \in \lambda C\} \ (C \in \mathscr{C}_0 := \{C \subset \mathscr{C} : \{0\} \in \operatorname{int} C\});$$

– другими, более сложными способами, например, возможностью построения проекции внешней точки на границу аппроксимируемого тела.

Требования к аппроксимирующим многогранникам:

- вписанные, описанные $\mathscr{P}^i(C)$, $\mathscr{P}^c(C)$
- ограничение по числу вершин $m^t(P)$
- ограничение по числу гиперграней $m^f(P)$
- ограничение по максимальному числу i-граней $m_i(P)$ или норме f-вектора

Типичные классы аппроксимирующих многогранников:

$$\mathscr{P}^i{}_m(C) := \{P \in \mathscr{P}^i(C) : m^t(P) \leq m\},$$

$$\mathscr{P}^c{}_m(C) := \{P \in \mathscr{P}^c(C) : m^f(P) \leq m\}.$$

Многогранники наилучшей аппроксимации (МНА)

Многогранник наилучшей аппроксимации (Best Approximating Polytop) $\Pi_m \in \mathscr{P}_m(C)$:

$$\delta(C, \Pi_m) = \delta(C, \mathscr{P}_m(C))$$

Гладкий случай:

$k(x)>0$, $C \in \mathscr{C}^3$ [*Schneider*, 1981, 1987], $C \in \mathscr{C}^2$ [*Gruber*, 1993] и $k(x) \geq 0$ [*Böröczky K.Jr.*, 2000]:

$$\lim_{m\to\infty} \delta(C, \mathscr{P}_m) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(x)>0$ – кривизна Гаусса-Кронекера,

ϑ_d – плотность покрытия $\mathbb{E}^d$ единичными шарами,

π_d – объем единичного шара.

МНА, негладкий случай

[*Dudley*, 1974] и [*Бронштейн и Иванов*, 1975]:

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d}}{m^{2/(d-1)}}.$$

Schneider and Wieacker [1981]:

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \underset{m\to\infty}{\overset{\text{упрощенно}}{\ge}} \frac{1}{m^{2/\dim \exp^* C}},$$

$\exp^* C$ – множество дальних точек (экспонированных точек границы, в которых существует касающаяся внешняя сфера), dim – размерность Хаусдорфа.

МНА для гладких тел:

$$C \in \mathscr{C}_+^2 \Rightarrow \exp^* C \equiv \partial C \Rightarrow \dim \exp^* C = \dim C = d\text{-}1$$

МНА для многогранников:

$$C \in \mathscr{P} \Rightarrow \exp^* C \text{ конечно} \Rightarrow \dim \exp^* C = 0$$

Одна из самых *сложных, нерешенных задач* – для $P \in \mathscr{P}$ дать оценку для

$$\delta(P, \Pi_{m(P)\text{-}1}) = \delta(P, \mathscr{P}_{m(P)\text{-}1}(P)).$$

МНА, граница со счетным множеством вершин

Если у $C \in \mathscr{C}$ граница со счетным числом вершин, то dim exp* C = 0 и оценки имеют вид

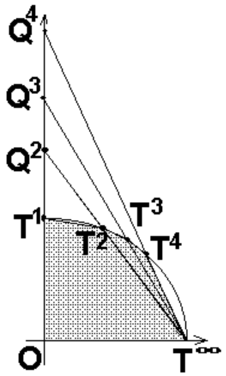
$$0 \le \delta(C, \mathscr{P}_m(C)) \le \frac{\text{const}_{C,d}}{m^{2/(d-1)}}.$$

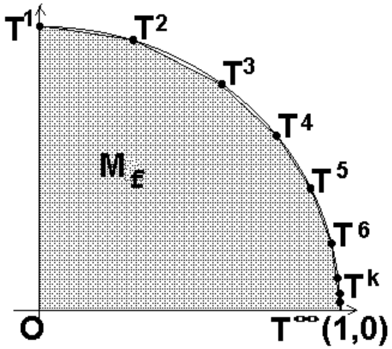
d=2 [*Каменев*, 2000]:

$$\frac{1}{m^{2/\overline{\dim}\, Z(\text{ext}\, C)}} \underset{m\to\infty}{\overset{\text{упрощенно}}{\le}} \delta(C, \mathscr{P}_m(C))$$

где $s(p)$ – средний вектор единичных внешних нормалей в точке $p \in \partial C$, Z: $\partial C \to \partial(C+B)$, $Z(p) := p + s(p)$, $\overline{\dim}$ – верхняя метрическая размерность.

Пример: класс $\mathscr{M}$ со сколь угодно быстрой сходимостью





$(0, n^{\lambda})$, n=0,1,…, $\lambda > 0$

$$M_\lambda = \text{conv}\{O, B, \{T^n\}_{n=1}^{\infty}\},\ \overline{\dim}\, Z(\text{ext}\, M_\lambda) \le \frac{1}{\lambda+1}$$

$$\frac{\text{const}_1}{m^{2\lambda+2}} \underset{m\to\infty}{\le} \delta(M_\lambda, \mathscr{P}_m(M_\lambda)) \underset{m\to\infty}{\le} \frac{\text{const}_2}{m^{2\lambda+2}}$$

Классификация МЕТОДОВ полиэдральной аппроксимации (МПА)

МПА:

- теоретические (теоремы существования)
- практические (алгоритм построения)

Практические МПА:

- неадаптивные (passive) (на основе априорной информация)
- адаптивные (active) (информация на каждом шаге)

Дополнительные требования об оптимальности при построении аппроксимации с нужной точностью:

- ◊ по *времени* процесса аппроксимации
- ◊ по *сложности описания* аппроксимирующих многогранников (числу вершин, граней или гиперграней)
- ◊ по *объему информации* об аппроксимируемом множестве (числу вычислений опорной и/или дистанционной функции)

Классификация МПА по оптимальности

Эффективность аппроксимации для $C\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}(C)$:

$$\eta(P) := \frac{\delta(C, \mathscr{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C, P)}$$

Асимптотическая эффективность для $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ из $\mathscr{A}(C)$, сходящейся к $C\in\mathscr{C}$:

$$\underline{\eta}(\mathrm{F}) = \liminf_{n\to\infty} \eta(P^n).$$

МПА:

- ✓ оптимальные (построение МНА): $\eta(P) = 1$
- ✓ асимптотически-оптимальные: $\underline{\eta}(\mathrm{F}) = 1$
- ✓ асимптотически-эффективные: $\underline{\eta}(\mathrm{F}) > 0$
- ✓ оптимальные по <известному> порядку: $\delta(C, P^n) \le \mathrm{const} / m(P^n)^{2/(d-1)}$

Оптимальные МПА – *неизвестны*.

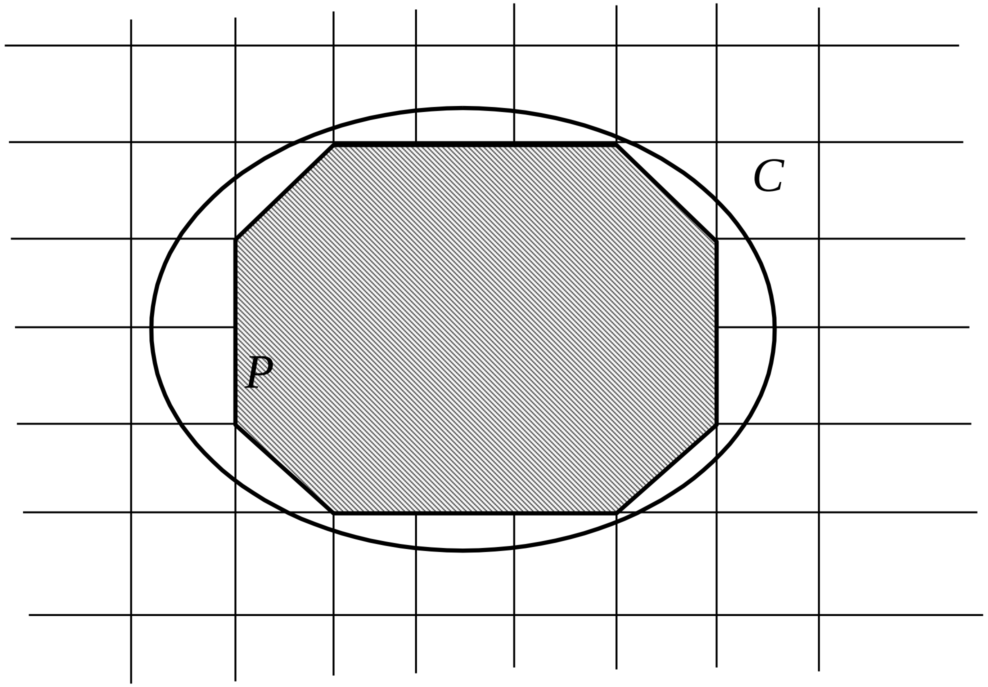
Асимптотически-оптимальные – только для гладких тел *теоретические* (требуется строить оптимальные покрытия поверхности ВКТ в метрике II кв. формы).

Асимптотически-эффективные – только для <кусочно> гладких тел *неадаптивные* и *адаптивные хаусдорфовы*.

Оптимальные по порядку: – *адаптивные хаусдорфовы*.

МПА: метод Минковского

Minkowski H. Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447-496.



Множество задано характеристической функцией

$$\delta \sim 1/n^{1/d} \; (\delta \sim 1/n^{1/(d\text{-}1)}) \qquad m^t(P) \sim 1/n^{1/(d\text{-}1)}$$

МПА: сетевые неадаптивные

Опорное полупространства $L(u, C) := \{x \in \mathbb{E}^d\colon \langle u, x\rangle \le g(u, C)\}$.

Множество точек касания $T(u,C) := \{p \in \partial C\colon \langle u, p\rangle = g(u, C)\}$.

Пусть для определенного типа ε-сети M_n на $S^{d\text{-}1}$ мощности n известна *оценка*

$$\delta_n := \sup\,\{\delta(P^e{}_n, C)\colon C \in \mathscr{C}^*\},\ \delta_n := \sup\,\{\delta(P^i{}_n, C)\colon C \in \mathscr{C}^*\},$$

$P^e{}_n := \cap\, L(u, C)\{u \in M_n\}$, $\quad P^e{}_n := \operatorname{conv}\,\{p \in T(u,C)\colon u \in M_n\}$.

Сетевой неадаптивный МПА

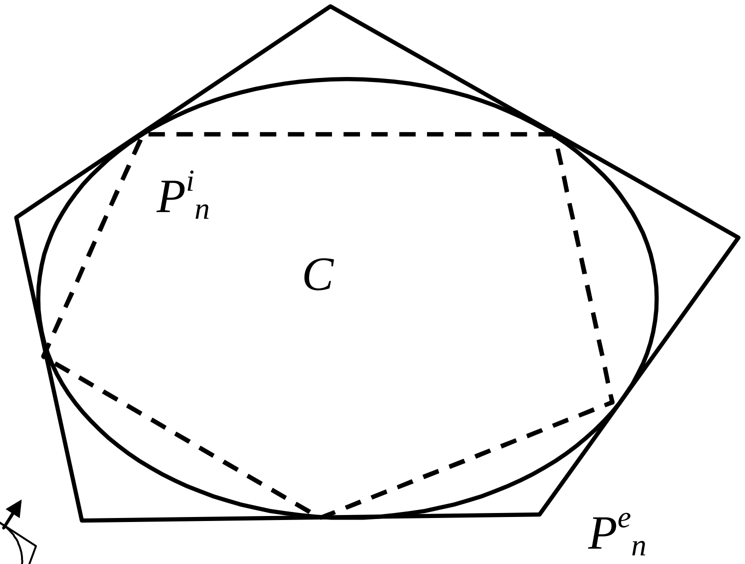
Для заданной точности δ^*:

– найти n^*: $\delta_{n^*} \le \delta^*$,

– построить M_{n^*},

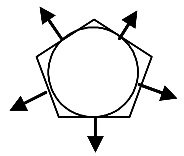
– построить в нужном виде $P^e{}_n$ или $P^i{}_n$.

$$n \sim \vartheta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}}.$$



Негладкие тела: $\delta(P_n, C) \le \mathrm{const}\ (\mathscr{C}^*)\ \varepsilon \sim n^{1/(d\text{-}1)}$.

Гладкие тела: $\delta(P_n, C) \le \mathrm{const}\ (\mathscr{C}^*)\ \varepsilon^2 \sim n^{2/(d\text{-}1)}$.



Оценки см. [*Васильев*, 1983], [*Половинкин и Балашов,* 2004].

МПА: сетевые адаптивные

Пусть $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, $\delta(C_1, C_2) := \max \{| g(u, C_1) - g(u, C_2) |: u \in S^{d-1}\}$.

Пусть $P \in \mathscr{P}$, и $M^f(P)$ – множество единичных внешних нормалей гиперграней

$$\delta_P(C_1, C_2) := \max \{| g(u, C_1) - g(u, C_2) |: u \in M^f(P)\}.$$

[Каменев, 1986]: $\delta(P, C)/\omega(P) \le \delta_P (P, C) \le \delta(P, C)$;

$C \in \mathscr{C}_+^2$, $P \in \mathscr{P}^i(C)$ *и* $\delta(P, C) < \rho_{\min}(C)$:

$$\delta(P, C) - \delta(P, C)^2/\rho_{\min}(C) \le \delta_P(P, C) \le \delta(P, C).$$

$\omega(\cdot)$ – асферичность, $\rho_{\min}(C)$ – минимальный радиус кривизны.

Сетевой адаптивный МПА

Для заданной точности δ^*:

$r := \infty$; $n := n_0$

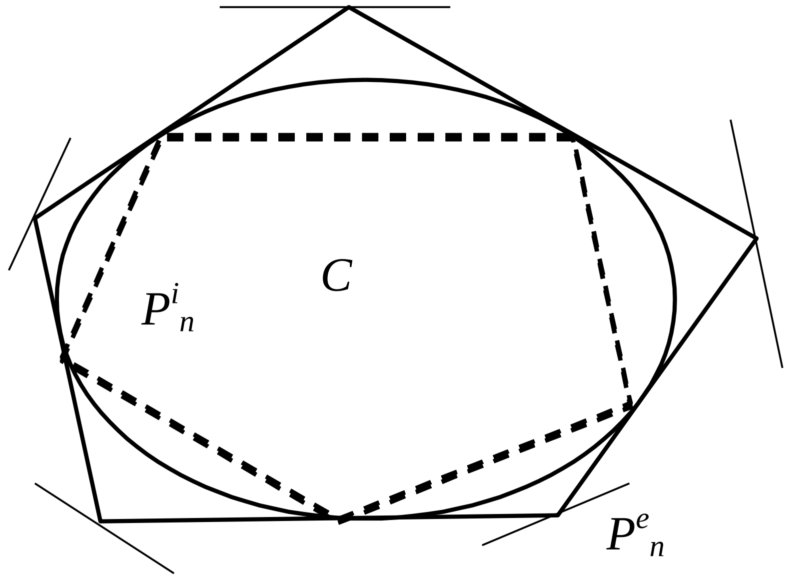
пока $r > \delta^*$ **повторять**

– $n := 2\,n$,

– построить M_n,

– построить P^e_n и P^i_n
  в виде пересечения полупространств,

– оценить $r := \delta(P^i_n, C)$ по $\delta_{P_n^i}(P_n^i, P_n^e)$.



МПА: адаптивные итерационные схемы

Схема восполнения:

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$.

Тогда (n+1)-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n \in \partial C$.

Шаг 2. Определяем $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$.

1) способ выбора $p_n \in \partial C$;

2) способ построения P^{n+1} в требуемом виде.

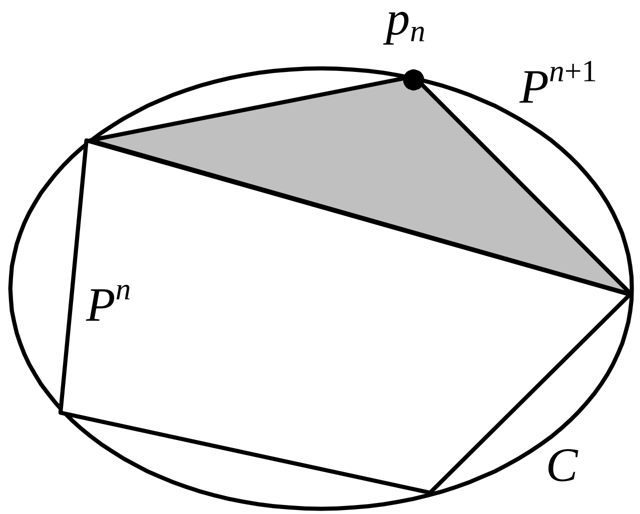


Схема восполнения:

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^e(C)$.

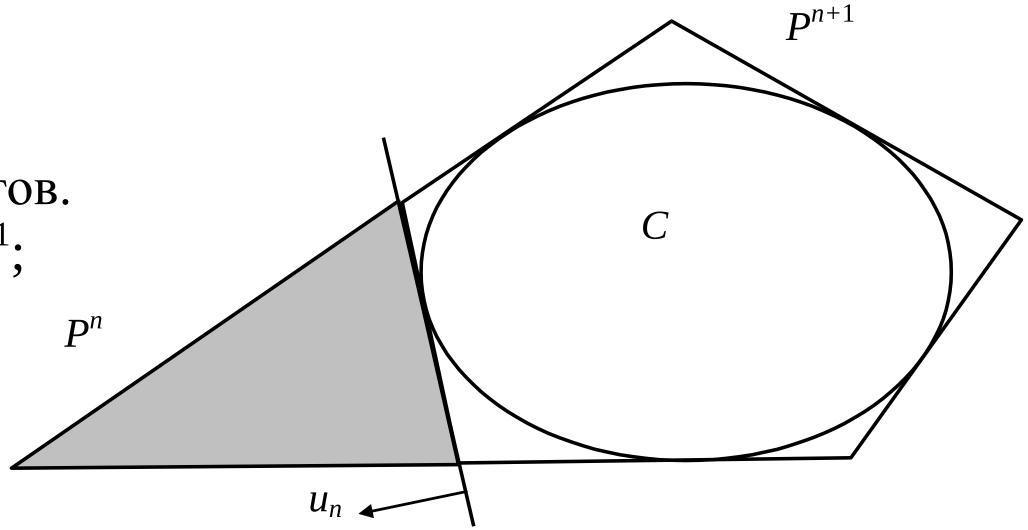
Тогда (n+1)-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается направление $u_n \in S^{d\text{-}1}$;

Шаг 2. Кладется $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

1)способ выбора $u_n \in S^{d\text{-}1}$;

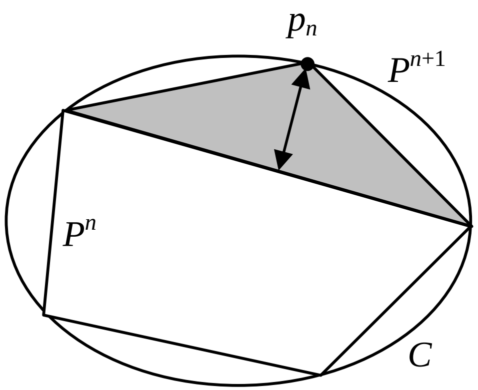
2) способ построения $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в требуемом виде.

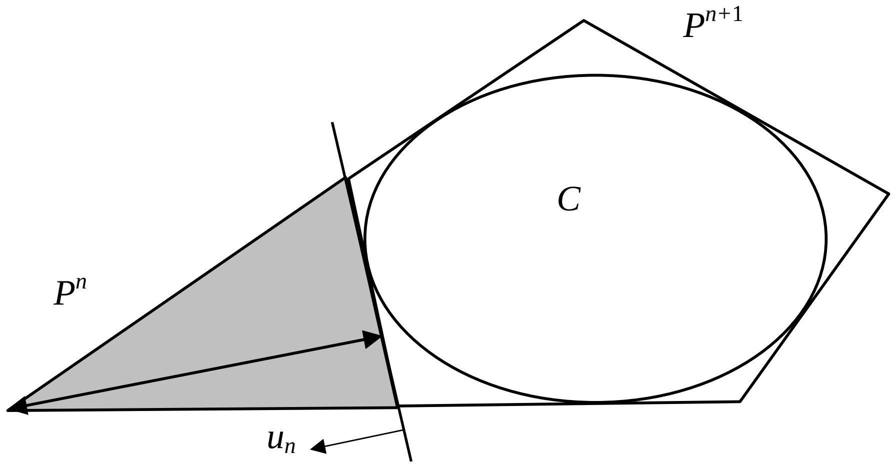


Хаусдорфовы адаптивные МПА

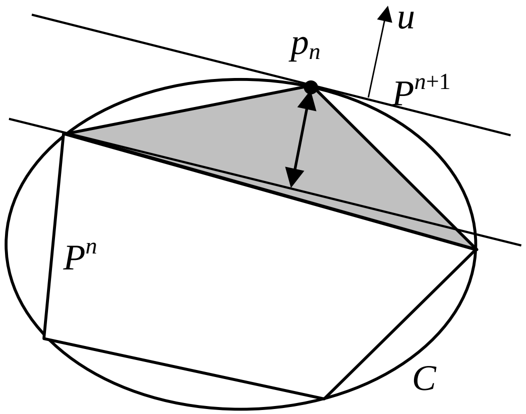
$H(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения), если $\exists\ \gamma > 0$: $\forall\ n = 0,1, \ldots$

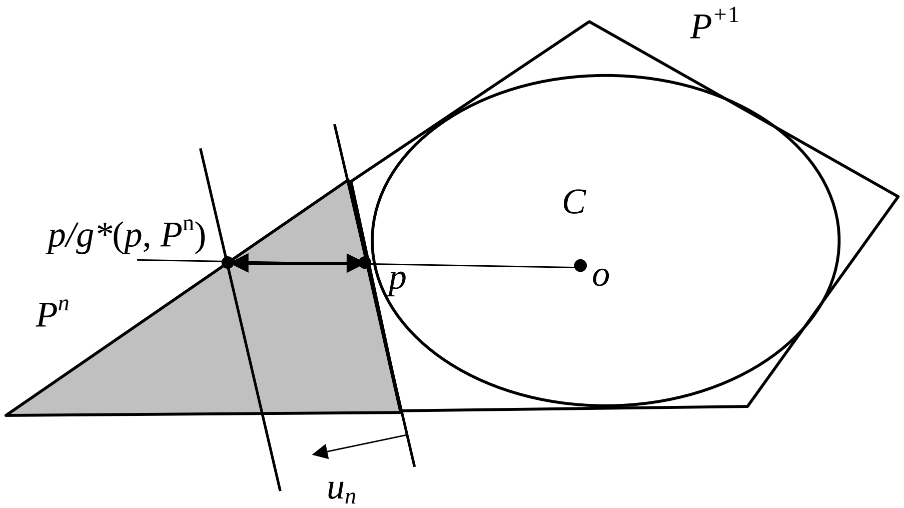
$$\delta(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\,\delta(P^n, C).$$





$H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения)





Метод «Уточнения Оценок» (УО)

[*Бушенков, Лотов* 1982], [*Бушенков* 1985], [*Каменев*, 1986, 1994]

Шаг 1. a). Найти

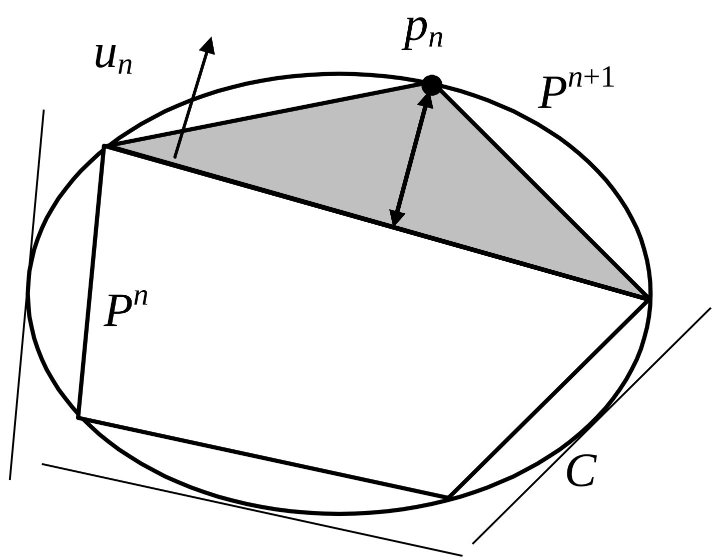
$$u_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}.$$

b). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

[*Каменев*, 1994**]**. Для $C \in \mathscr{C}$
УО асимптотически
$H_1(1/\omega(C), C)$-метод восполнения.

[*Каменев*, 1994**]**. Для $C \in \mathscr{C}^2$
УО асимптотически
$H_1(1, C)$-метод восполнения.



Метод «Уточнения Внешних Оценок» (УВО)

[*Каменев*, 2002]
Определим конус внешних единичных нормалей в граничной точке $p\in\partial C$:

$$S(p,C) := \{u\in S^{d-1}: <u, p> = g(u, C)\}.$$

Шаг 1. a). Найти

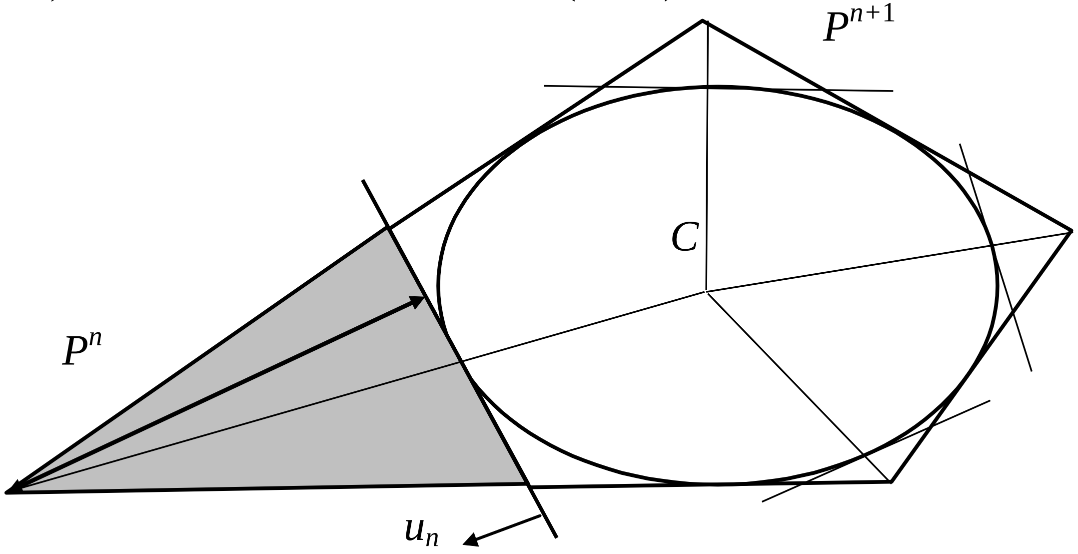
$$p_n := \arg\max \{g(u(p), p) - g(u(p), C): p\in M^t(P^n),$$
$$\text{где } u(p)\in S(p/g^*(p, C), C)\}.$$

b). Положить $\qquad u_n := u(p_n)\in S(p_n /g^*(p_n, C), C).$

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

[*Каменев***, 2002].** Для $C\in\mathscr{C}_0$
УВО асимптотически
$H_1(1/\omega_0(C), C)$-метод отсечения.

[*Каменев***, 2002].** Для $C\in\mathscr{C}_0^{\,2}$
УВО асимптотически
$H_1(1, C)$-метод отсечения.



Свойства оптимальности хаусдорфовых МПА

В классе $\mathscr{C}^2$:

- H-методы *асимптотически-эффективны* по **числу граней всех размерностей**;
- асимптотическая эффективность $H_1(1, C)$-методов восполнения по числу вершин

$$\underline{\eta}(F) > 0.25$$

(т.е. точность не более, чем в 4 раза хуже точности МНА с тем же числом вершин).

В классе $\mathscr{C}$:

- ✓ H_1-методы восполнения (отсечения) *оптимальны по порядку* числа **вершин (гиперграней)**.

В классе $\mathscr{M}$ дисков со счетным числом вершин:

- ✓ $H_1(1, C)$-методы восполнения являются *асимптотически-эффективными*.

Скорость сходимости метода УО

$C \in \mathscr{C}$ (асимптотически) [*Каменев*, 1999]

$$\delta^H(P^n, C) \le a(C)\, m^t(P^n)^{2/(1\text{-}d)},$$

$$a(C) := 16R(C)\omega(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

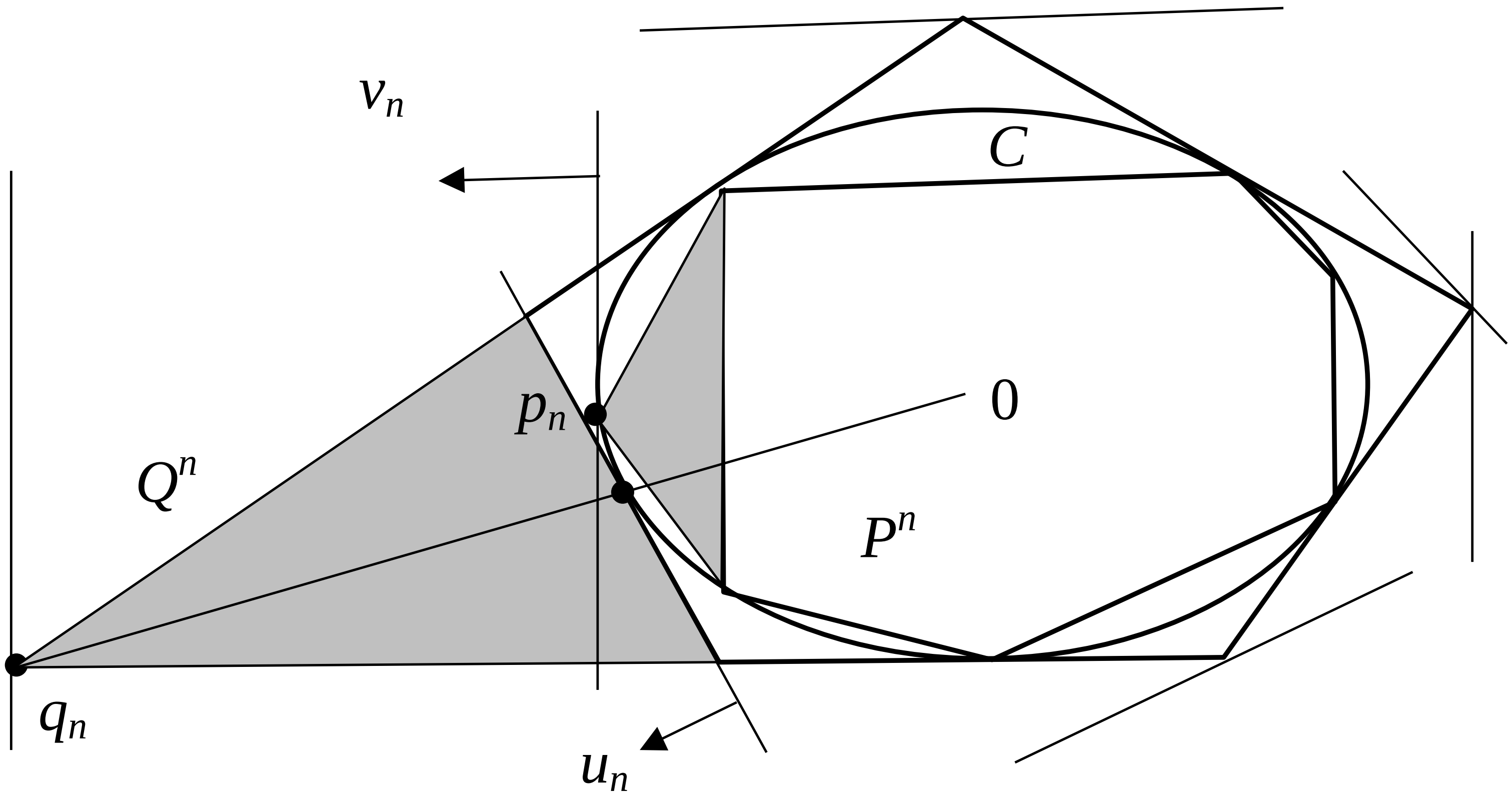
$C \in \mathscr{C}^2$ (асимптотически) [*Ефремов и Каменев*, 2002]

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta(C, P^n) m^t(P^n)^{2/(d-1)} \le 2\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \delta(C, P^n) m_i(P^n)^{\frac{2}{d-1}} \le 2a_i(d, C)\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}},\ i=1,\ldots\, d\text{-}1$$

$$a_i(d, C) := \mathbf{C}\left(\left(5\frac{\rho_{\max}(C)}{\rho_{\min}(C)}\right)^{d-1}, i\right)^{\frac{2}{d-1}}.$$

Самодвойственные оптимальные МПА

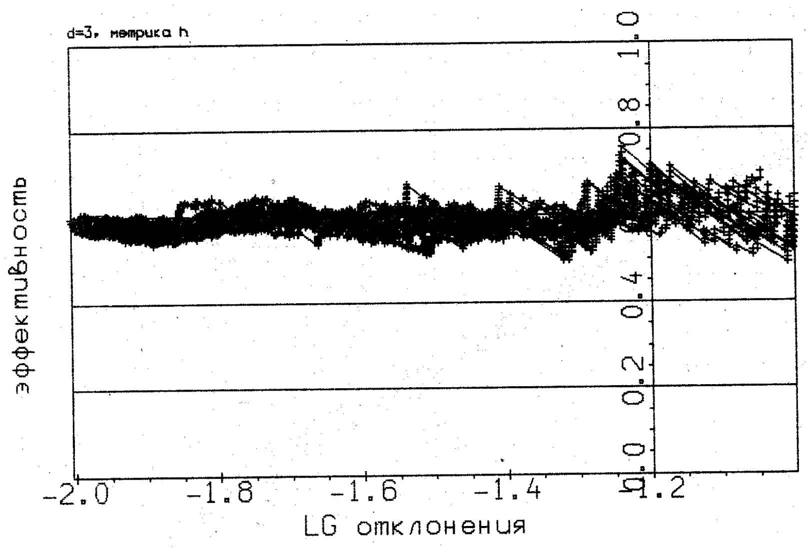


В классе $\mathscr{C}^2$: *асимптотически-эффективны* по **числу вершин внутреннего и гиперграней внешнего** многогранника и числу вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого тела;

В классе $\mathscr{C}$: *оптимальны по порядку* числа **вершин внутреннего и гиперграней внешнего** многогранника и числу вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого тела.

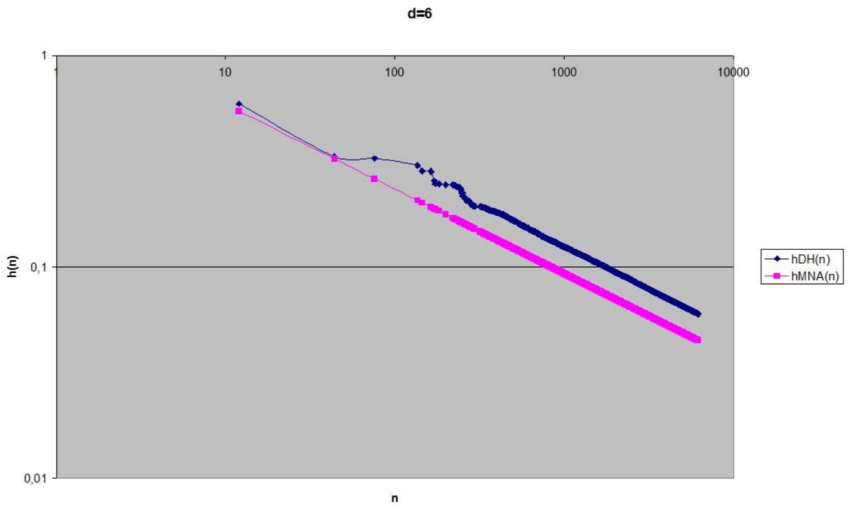
Результаты численных экспериментов с методом УО

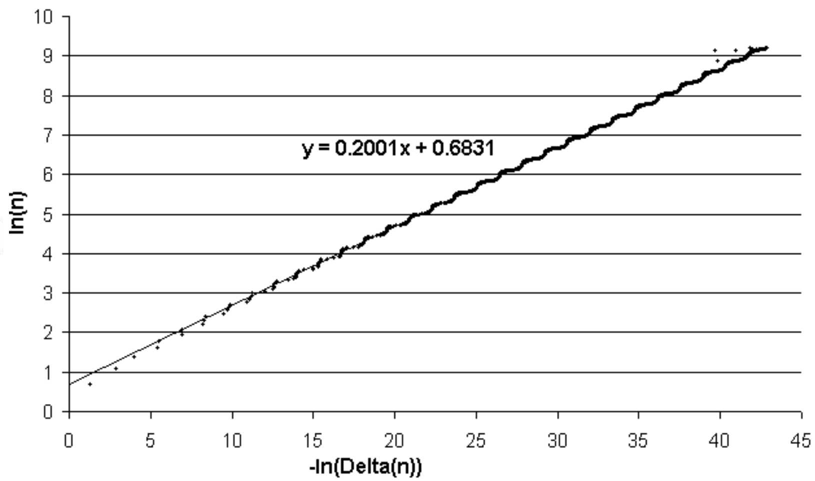
В классе эллипсоидов:



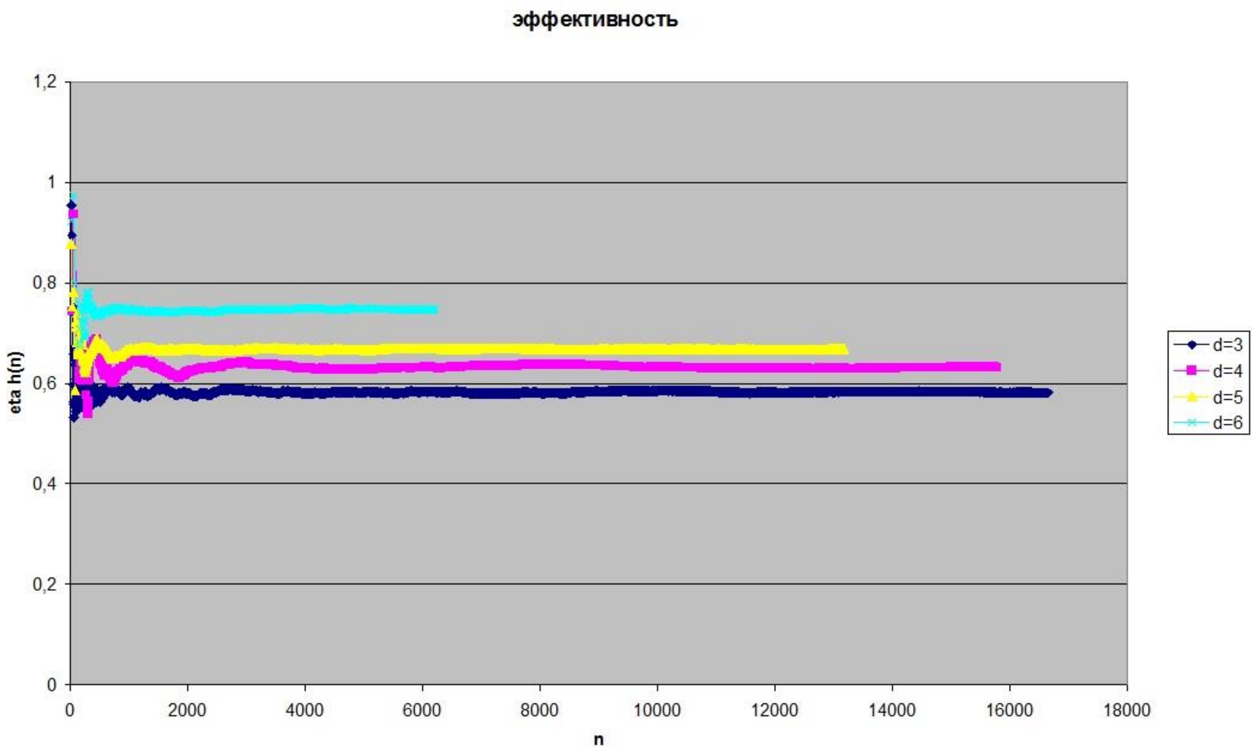
Шестимерный шар ($\delta \sim 1/n^{2/5}$):

$M_{1.5}$ ($\delta \sim 1/n^5$):





Эффективность метода УО при аппроксимации шаров



d	$\eta_{теор}$	$\eta_{экспер}$
3	0.33	0.58
4	0.39	0.63
5	0.42	0.67
6	0.46	0.75

Литература

1. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
2. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37.
3. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. – 310 pp. – ISBN 987-1-4020-7631-2.
4. *Половинкин Е.С., Балашев М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматоит, 2004. – 410 с.
5. *Каменев Г.К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N1. С. 136-152.
6. *Каменев Г.К.* Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. N4. С. 608-616.
7. *Каменев Г.К.* Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. N10. С. 1464-1474.
8. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
9. *Каменев Г.К.* Сопряженные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. N9. С.1351-1367.
10. *Каменев Г.К.* Самодвойственные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003 Т. 43, N8, С. 1123-1137.
11. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007. ¬– 230 с. – ISBN 5-201-09876-2. http://www.ccas.ru/kamenev/
12. *Каменев Г.К.* Теория двойственности оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N3. С. 397-417.
13. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N5. С. 35-50.
14. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2010. – 118 с. – ISBN 978-5-91601-043-5. http://www.ccas.ru/kamenev/
15. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Об оптимальном порядке роста числа вершин и гиперграней в классе хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011, Т. 51. N6. С. 1018-1031.
16. *Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Итеративный метод построения покрытий многомерной единичной сферы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N2. С. 181-194.

Дополнительные обозначения

$C\in\mathscr{C}$, $s>0$

$$\underline{a}^s(C):=\liminf_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s,$$

$$\overline{a}^s(C):=\limsup_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s.$$

Аппроксимационное число, Schneider and Wieacker [1981]:

$$\underline{\alpha}(C):=\inf\{s>0:\underline{a}^s(C)=0\}$$

$$\overline{\alpha}(C):=\inf\{s>0:\overline{a}^s(C)=0\}.$$

$$\underline{\alpha}(C)\le\overline{\alpha}(C),\ \alpha(C).$$

$$\overline{\alpha}(C)\le\frac{d-1}{2}.$$

$$C\in\mathscr{C}^2:\ \alpha(C)=(d-1)/2.$$

exp*C – *множество дальних точек*:

$$\underline{\alpha}(C)\ge\frac{1}{2}\dim\exp^* C$$

$\mathbb{R}$, ρ, $U\subset\mathbb{R}$, $D(U) := \sup\{\rho(x, y): x,y\in U\}$ ($D(\varnothing)=0$, $D(U)^0=1$). $A\subset\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} D(E_i)^s : A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in\mathbb{R}, D(E_i)\le\varepsilon\right\}.$$

s-размерная мера Хаусдорфа:

$$\mathbf{m}_s(A) := \sup_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A).$$

Размерность Хаусдорфа

$$\dim A := \sup\{s\ge 0: \mathbf{m}_s(A)>0\} = \sup\{s\ge 0: \mathbf{m}_s(A)=\infty\} =$$

$$= \inf\{s\ge 0: \mathbf{m}_s(A)<\infty\} = \inf\{s\ge 0: \mathbf{m}_s(A)=0\}.$$

$\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε-сети A.

$\mathfrak{H}(\varepsilon,A) := \log\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ – *относительная ε-энтропией A* (под log здесь и далее понимается $\log_2$).

Верхняя метрическая размерность

$$\overline{\mathrm{dm}}A := \limsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mathfrak{H}(\varepsilon, A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Плотность покрытия ϑ_d:

$\mathcal{K}$ – покрытие $\mathbb{E}^d$ единичными шарами

$$\vartheta_d := \inf_{\mathcal{K}} \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{V(B_R)} \sum_{x\in\mathcal{K}: B_R \cap B(x) \neq \varnothing} V(B(x)) \right\}$$

Плотность упаковки (укладки) δ_d:

$\mathcal{K}$ – упаковка (укладка) $\mathbb{E}^d$ единичными шарами

$$\delta_d := \sup_{\mathcal{K}} \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{V(B_R)} \sum_{x\in\mathcal{K}: B(x) \subset B_R} V(B(x)) \right\}$$

Известны $\vartheta_1 := 1$, $\delta_1 := 1$, $\vartheta_2 := 2\pi/\sqrt{27}$, $\delta_2 := \pi/\sqrt{12}$

Неконструктивные оценки при $d\to\infty$:

$d / (e\sqrt{e}) \le \vartheta_d \le d \ln d$ (Роджерс)

$d / (e2^{d-1}) \le \delta_d \le 1 / 2^{0.599d}$ (Минковский-Главка-Роджерс, Кабатянский и Левенштейн)