

Нестандартные результаты в стандартных задачах

А.М.Зубков

МИАН, 16.01.2014

1. Двусторонние неравенства для сумм $\sum_{m=0}^k C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$
2. Квадратичные формы и неравенства
3. Геометрическая интерпретация вероятностного тождества

Двусторонние неравенства для сумм $\sum_{m=0}^k C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

$S_{n,p}$ — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$,

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$\mathbf{P}\{S_n \leq k\} = \sum_{m=0}^k C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (k+1) C_n^{k+1} \int_p^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt.$$

Теорема Муавра–Лапласа, 1730–1812. Если $p = \text{const}$, то при любом фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{np(1-p)}\right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq np + x\sqrt{np(1-p)}\} = \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Теорема ([С. Н. Бернштейн](#), Изв. АН СССР, 1943).

$$\mathbf{P}\{m_0 \leq S_{n,p} < m_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-u^2} du,$$

где m_0, m_1 — целые, z_k — корень уравнения $z_k \sqrt{2np(1-p)} + \frac{1-2p}{3} z_k^2 = m_k - np + \alpha_k$ при некотором $\alpha_k \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ и $np(1-p) \geq 62,5$, $0 \leq z_0 < z_1 \leq \sqrt{2np(1-p)}$.

Аналогичный результат: [W.Feller](#), Ann. Math. Statist., 1945

Уточнение (Akahira, Takahashi, J. Japan Stat. Soc., 2001). Если

$p = \text{const}, n \rightarrow \infty, x = \frac{k+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}, \text{ то}$

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} = \Phi_2(x) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\Phi_2(x) = \Phi(x) - \frac{1-2p}{6\sqrt{np(1-p)}} (x^2-1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} -$$

$$- \frac{3(1-6p(1-p))(x^3-3x)+(1-2p)^2(x^5-10x^3+15x)-3x}{72np(1-p)} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Асимптотические разложения в центральной предельной теореме:

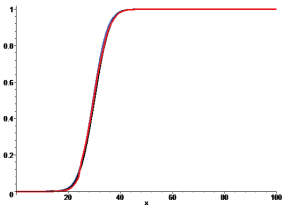
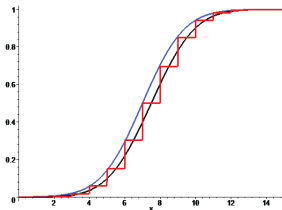
Если случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы и имеют одно и то же распределение, содержащее абсолютно непрерывную компоненту, и $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$, $\mathbf{M}|X_1|^r < \infty$ для некоторого целого $r \geq 3$, то

$$(1+|x|)^r \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} - \Phi(x) - \sum_{k=1}^{[r]-2} \frac{Q_k(x)}{n^{k/2}} \right| = o(n^{-(r-2)/2}),$$

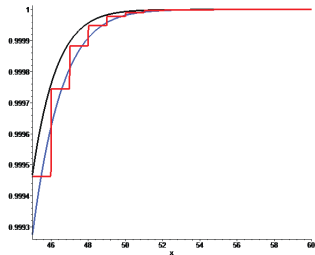
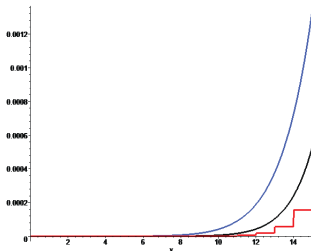
где

$$Q_k(x) = -\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \geq 0 \\ m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k}} H_{k-2s-1}(x) \prod_{j=1}^k \frac{1}{m_j!} \left(\frac{\gamma_{j+2}}{(j+2)!} \right)^{m_j},$$

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2}, \quad s = m_1 + \dots + m_k, \quad \gamma_j = \left. \frac{d^j}{dt^j} \mathbf{M} e^{itX_1} \right|_{t=0}.$$

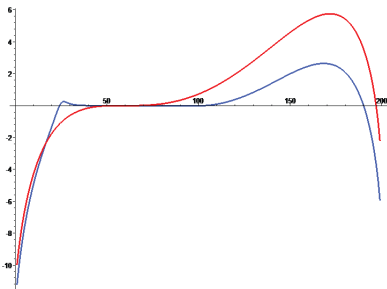
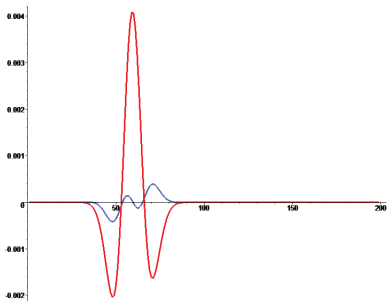


$\mathbf{P}\{S_{15,0.5} \leq x\}, \quad \mathbf{P}\{S_{100,0.3} \leq x\}$ (красный),
 $\Phi(\cdot)$ (черный), $\Phi_2(\cdot)$ (синий)



$$B(x) = \mathbf{P}\{S_{200,0.3} \leq x\},$$

$$\Phi^*(x) = \Phi\left(\frac{x-0.3 \cdot 200}{\sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right), \quad \Phi_2^*(x) = \Phi_2\left(\frac{x-0.3 \cdot 200}{\sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right)$$



$B(x) - \Phi^*(x)$ (красный)

$B(x) - \Phi_2^*(x)$ (синий)

$\log_{10} \frac{\min\{B(x), 1-B(x)\}}{\min\{\Phi^*(x), 1-\Phi^*(x)\}}$ (красный)

$\log_{10} \frac{\min\{B(x), 1-B(x)\}}{\min\{\Phi_2^*(x), 1-\Phi_2^*(x)\}}$ (синий)

Примеры неравенств для биномиальных распределений
([Chernoff H.](#) Ann. Math. Statist., 1952):

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \geq an\} \leq \left(\frac{a}{p}\right)^{an} \left(\frac{1-a}{1-p}\right)^{(1-a)n}, \quad p < a < 1,$$

Теорема ([Slud E.](#) Annals of Probability, 1977) Если $0 \leq p \leq \frac{1}{4}$,
 $np \leq k \leq n$ или если $np \leq k \leq n(1-p)$, то

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \geq k\} \geq 1 - \Phi \left\{ \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}.$$

[Telgarsky M.](#) arXiv:0911.2077: Если $0 < p \leq \frac{1}{2}$, то

$$e^{-\frac{9n+10}{3(n+1)(12n+13)}} \frac{(4p(1-p))^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi(n+1)}} \leq \mathbf{P}\{S_{n,p} \geq \frac{n}{2}\} \leq \frac{(4p(1-p))^{\frac{n+1}{2}}}{2}.$$

В статье

[Alfers D., Dinges H.](#) A normal approximation for Beta and Gamma tail probabilities. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, v. 65, p. 399–420.

использованы подходы из

[Peizer D.B., Pratt J.W.](#) A normal approximation for binomial, F , beta and other common related tail probabilities (part I). — J. Amer. Statist. Assoc., no. 63, 1968, p. 1416-1456.

[Pratt J.W.](#) A normal approximation for binomial, F , beta and other common related tail probabilities (part II). — J. Amer. Statist. Assoc., no. 63, 1968, p. 1457-1483.

$$\frac{1}{2} A^2(\alpha, p) = \alpha \ln \frac{\alpha}{p} + (1 - \alpha) \ln \frac{1 - \alpha}{1 - p}$$

$$x + (1 - x) \ln(1 - x) = x^2 \left(\frac{1}{2} + h(x) \right)$$

$$\pi(\alpha, p) = 2ph \left(1 - \frac{1 - \alpha}{1 - p} \right) + 2(1 - p)h \left(1 - \frac{\alpha}{p} \right)$$

These crude estimates give us some information about a certain classical approximation (de Moivre-Laplace).

Proposition. *Let X be binomially distributed with*

$$\mathcal{E}X = n \cdot p, \quad \text{var } X = n \cdot p(1-p);$$

and let Z be standard normally distributed. Put $\alpha = \frac{k}{n}$.

a) *In the domain $\frac{\pi(\alpha, p)}{\alpha - p} \leq 0$ we have*

$$\mathcal{P}_i(X \geq k) \geq \mathcal{P}_i(Z \geq \sqrt{n} A(\alpha, p)) \geq \mathcal{P}_i\left(Z \geq \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (26')$$

b) *In the domain $\frac{\pi(\alpha, p)}{\alpha - p} \geq 0$*

$$\mathcal{P}_i(X \leq k) \geq \mathcal{P}_i(Z \geq \sqrt{n} A(\alpha, p)) \geq \mathcal{P}_i\left(Z \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (26'')$$

(compare Fig. 2 and [23]).

Let us reformulate our results (22'') and (26'') in order to make them more easily comparable with similar results in the literature, in particular with a result (listed as (27) below) of Peizer and Pratt [20], whose accuracy has been well confirmed numerically. (Compare also Molenaar [16], p. 101.)

$$\mathcal{P}_i(X \leq k) \geq \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \left[1 + \pi\left(\frac{k}{n}, p\right)\right]^{1/2}\right); \quad (26'')$$

$$\mathcal{P}_i(X \leq k) \sim \Phi\left(\frac{(k+1-(n+1)p)}{\sqrt{(n+1)pq}} \left[1 + \pi\left(\frac{k+1}{n+1}, p\right)\right]^{1/2}\right); \quad (22'')$$

$$\mathcal{P}_i(X \leq k) \sim \Phi\left(\frac{(k+(2/3)-(n+(1/3))p)}{\sqrt{n+(1/6)pq}} \left[1 + \pi\left(\frac{k+(1/2)}{n}, p\right)\right]^{1/2}\right) \quad (27)$$

or more generally

Bailey D.H., Borwein J.M. Experimental mathematics: examples, methods and implications

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx = \frac{\pi}{2},$$

.....

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\sin(x/13)}{x/13} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_8 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\sin(x/15)}{x/15} dx =$$

$$= \frac{467807924713440738696537864469}{93561584944064090731052175000} \pi \approx 0.499999999992646 \pi$$

$$H(x, p) = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1-x}{1-p},$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ если } x \neq 0, \operatorname{sgn}(0) = 0,$$

$\{C_{n,p}(k)\}_{k=0}^{n+1}$ — монотонно возрастающие по k последовательности:

$$C_{n,p}(0) = 0, C_{n,p}(n+1) = 1,$$

$$C_{n,p}(k) = \Phi \left(\operatorname{sgn} \left(\frac{k}{n} - p \right) \sqrt{2nH \left(\frac{k}{n}, p \right)} \right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Теорема. Если $k = 0, 1, \dots, n$ и $0 < p < 1$, то

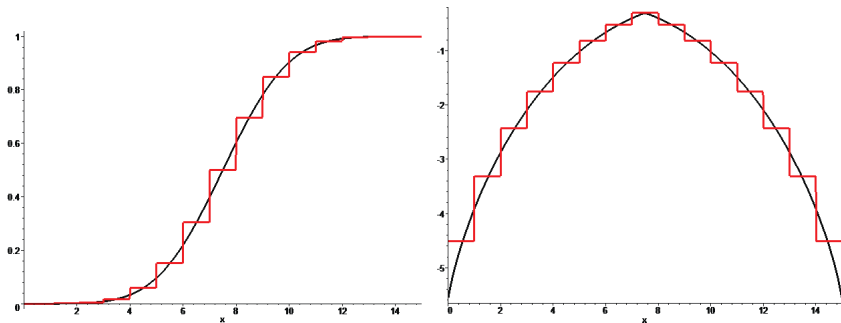
$$C_{n,p}(k) < \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} < C_{n,p}(k+1).$$

Иначе говоря:

$$\dots < \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k-1\} < C_{n,p}(k) < \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} <$$

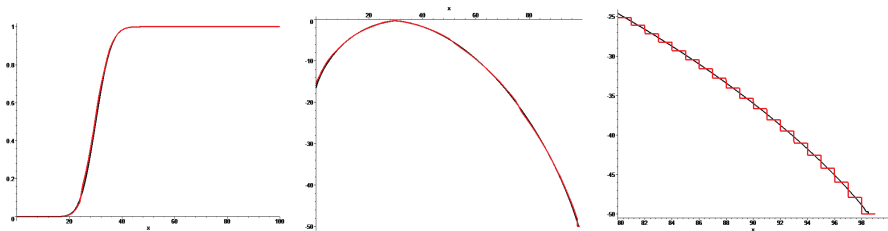
$$< C_{n,p}(k+1) < \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k+1\} < C_{n,p}(k+2) < \dots$$

[Зубков А. М., Серов А. А.](#) Полное доказательство универсальных неравенств для функции распределения биномиального закона. — Теория вероятностей и ее применения, 2012, т. 57, № 3, с. 597–602.



Слева: Графики функции распределения $\text{Bin}(15, 0.5)(x)$ (красный) и $C_{15,0.5}(x)$ (черный).

Справа: Графики $\log_{10} \min\{\text{Bin}(15, 0.5)(x), 1 - \text{Bin}(15, 0.5)(x)\}$ и $\log_{10} \min\{C_{15,0.5}(x), 1 - C_{15,0.5}(x)\}$.



Слева: Графики функции распределения $\text{Bin}(100, 0.3)(x)$ и $C_{100,0.3}(x)$.

В центре и справа: Графики $\log_{10} \min\{\text{Bin}(100, 0.3)(x), 1 - \text{Bin}(100, 0.3)(x)\}$ (красный) и $\log_{10} \min\{C_{100,0.3}(x), 1 - C_{100,0.3}(x)\}$ (черный).

«Идеи носятся в воздухе»

В [Reiczigel J., Rejto L., Tusnády G.](#) A sharpening of Tusnády's inequality. arXiv 1110.3627 высказана гипотеза о справедливости неравенства для $p = \frac{1}{2}$ и четного n .

В [Györfi L., Harremoës P., Tusnády G.](#) Some refinements of large deviation tail probabilities. arXiv 1205.1005 получена похожая асимптотика в области сверхбольших уклонений:

Если $p < \mu < 1$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \geq n\mu\} = \Phi\left(-\sqrt{2nH\left(\frac{\lceil n\mu \rceil - c(n,\mu)}{n}, p\right)}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $c(n, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{\ln\left(\frac{2H(\mu/n, p)}{(\mu-p)^2} p(1-p)\right)}{2 \ln \frac{\mu(1-p)}{p(1-\mu)}}.$

Ссылка на работу [Alfers D., Dinges H.](#) нет, как и в других публикациях других авторов.

Схема доказательства

$$\mathbf{P}\{S_{n,1} \leq k\} = 0 \text{ при } k < n,$$

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} = (k+1)C_n^{k+1} \int_p^1 z^k (1-z)^{n-k-1} dz \text{ при } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть T_n — остаточный член в формуле Стирлинга:

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{T_n}$$

$$\mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} = e^{T_n - T_{k+1} - T_{n-k-1}} \sqrt{\frac{n^{\frac{k+1}{n}}}{2\pi(1 - \frac{k+1}{n})}} \int_p^1 e^{-nH(\frac{k+1}{n}, z)} \frac{dz}{z}.$$

$$a(z) = \text{sign}\left(\frac{k+1}{n} - z\right) \sqrt{2H\left(\frac{k+1}{n}, z\right)}, \quad \alpha = \frac{k+1}{n}$$

$$a(z) = \text{sign}\left(\frac{k+1}{n} - z\right) \sqrt{2H\left(\frac{k+1}{n}, z\right)}, \quad \alpha = \frac{k+1}{n}$$

$$\begin{aligned} \delta(p) &= \mathbf{P}\{S_{n,p} \leq k\} - \Phi(a(p)\sqrt{n}) = \\ &= e^{T_n - T_{k+1} - T_{n-k-1}} \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi(1-\alpha)}} \int_p^1 e^{-n\frac{a^2(z)}{2}} \frac{dz}{z} - \Phi(a(p)\sqrt{n}), \quad p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Если $0 \leq k < n-1$, то $\delta(0) = \delta(1) = 0$,

$$\delta'(p) = -\frac{1}{p} \varphi(a(p)\sqrt{n}) \sqrt{n} \left(e^{S_n^{k+1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{(p-\alpha)^2}{2(1-p)^2 H(\alpha, p)}} \right),$$

уменьшаемое в скобках от p не зависит, а вычитаемое монотонно по p и

$$\lim_{p \downarrow 0} \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2 H(\alpha, p)} = 0, \quad \lim_{p \uparrow 1} \frac{(p-\alpha)^2}{(1-p)^2 H(\alpha, p)} = \infty.$$

Квадратичные формы и неравенства

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

Если $A_1, \dots, A_N \subset \Omega$ — события (измеримые подмножества Ω), и $X(\omega) = \mathbb{I}(\omega \in A_1) + \dots + \mathbb{I}(\omega \in A_N)$ — число «одновременно» происходящих событий, то справедлива формула включения-исключения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_1 \cup \dots \cup A_N\} &= \mathbf{P}\{X \geq 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} = \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \mathbf{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \mathbf{M}X^{[k]} \end{aligned}$$

$$x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \mathbf{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = \frac{1}{k!} \mathbf{M}X^{[k]}$$

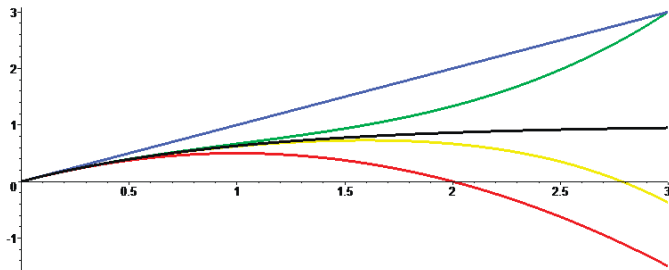
Неравенства Бонферрони

$$\sum_{k=1}^{2r} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \mathbf{M}X^{[k]} \leq \mathbf{P}\{X \geq 1\} \leq \sum_{k=1}^{2r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \mathbf{M}X^{[k]}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Пример: $\mathbf{P}\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m \geq 0$.

Тогда $\mathbf{M}X^{[k]} = \lambda^k, \mathbf{P}\{X > 0\} = 1 - e^{-\lambda}$

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \mathbf{P}\{X \geq 1\} = 1 - e^{-\lambda} \leq \sum_{k=1}^{2r-1} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k!}$$



Galambos J., Simonelli I. Bonferroni-type Inequalities with Applications.
— Springer, 1996, 270 pp.

При любых $n \geq 2$ и $2 \leq k < n$

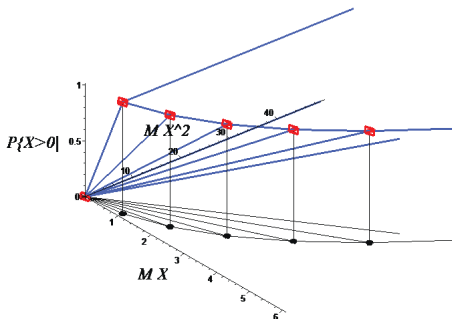
$$\mathbf{P}\{X \geq 1\} \leq \mathbf{M}X - \frac{2k-1}{C_{k+1}^2} \frac{\mathbf{M}X^{[2]}}{2} + \frac{2k-1}{C_{k+1}^3} \frac{\mathbf{M}X^{[3]}}{6}$$

Если $\mathbf{P}\{0 \leq X \leq n\} = 1$, то

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2r} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \mathbf{M}X^{[k]} + \frac{1}{n(2r)!} \mathbf{M}X^{[2r+1]} \leq \mathbf{P}\{X \geq 1\} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{2r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \mathbf{M}X^{[k]} - \frac{1}{n(2r-1)!} \mathbf{M}X^{[2r]}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Почти все неравенства — линейные функции от некоторых $\mathbf{M}X^{[k]}$
или $\mathbf{P}\{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\}$

$$\mathbf{M}X^{[k]} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X = m\}m^{[k]}, \quad \mathbf{P}\{X \geq 1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X = m\}\mathbb{I}(m \geq 1)$$



[Kwerel S.M.](#) Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events... — J. Appl. Probability, 1975, V.12, P. 612–619
 Верхние и нижние оценки — линейные комбинации моментов с коэффициентами, кусочно-непрерывно зависящими от моментов

Расширение класса случайных величин:

$$\{X : \mathbf{P}\{X \in \{0, 1, 2, \dots\}\} = 1\} \Rightarrow \{X : \mathbf{P}\{X \geq 0\} = 1\}$$

$$Q(z_0, \dots, z_r) = \mathbf{M}\mathbb{I}\{X > 0\}(z_0 + z_1 X + \dots + z_r X^r)^2 \geq 0$$

$$\mathbf{M}\mathbb{I}\{X > 0\}X^m = \begin{cases} \mathbf{P}\{X > 0\}, & m = 0, \\ \mathbf{M}X^m, & m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{P}\{X > 0\} & \mathbf{M}X & \mathbf{M}X^2 & \dots & \mathbf{M}X^{r-1} & \mathbf{M}X^r \\ \mathbf{M}X & \mathbf{M}X^2 & \mathbf{M}X^3 & \dots & \mathbf{M}X^r & \mathbf{M}X^{r+1} \\ \mathbf{M}X^2 & \mathbf{M}X^3 & \mathbf{M}X^4 & \dots & \mathbf{M}X^{r+1} & \mathbf{M}X^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}X^{r-1} & \mathbf{M}X^r & \mathbf{M}X^{r+1} & \dots & \mathbf{M}X^{2r-2} & \mathbf{M}X^{2r-1} \\ \mathbf{M}X^r & \mathbf{M}X^{r+1} & \mathbf{M}X^{r+2} & \dots & \mathbf{M}X^{2r-1} & \mathbf{M}X^{2r} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\mathbf{P}\{X > 0\}D(\mathbf{M}X^2, \dots, \mathbf{M}X^{2r}) + D(0, \mathbf{M}X, \mathbf{M}X^2, \dots, \mathbf{M}X^{2r}) \geq 0$$

$$\boxed{\mathbf{P}\{X > 0\} \geq -\frac{D(0, \mathbf{M}X, \mathbf{M}X^2, \dots, \mathbf{M}X^{2r})}{D(\mathbf{M}X^2, \dots, \mathbf{M}X^{2r})} \geq 0}$$

Расширение класса случайных величин:

$$\{X : \mathbf{P}\{X \in \{0, 1, 2, \dots\}\} = 1\} \Rightarrow \{X : \mathbf{P}\{X \in \{0\} \cup [1, \infty)\} = 1\}$$

$$Q_1(z_0, \dots, z_r) = \mathbf{M}\mathbb{I}\{X > 0\}(X - 1)(z_0 + z_1X + \dots + z_rX^r)^2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M}X - \mathbf{P}\{X > 0\} & \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}X & \dots & \mathbf{M}X^{r+1} - \mathbf{M}X^r \\ \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}X & \mathbf{M}X^3 - \mathbf{M}X^2 & \dots & \mathbf{M}X^{r+2} - \mathbf{M}X^{r+1} \\ \mathbf{M}X^3 - \mathbf{M}X^2 & \mathbf{M}X^4 - \mathbf{M}X^3 & \dots & \mathbf{M}X^{r+3} - \mathbf{M}X^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}X^r - \mathbf{M}X^{r-1} & \mathbf{M}X^{r+1} - \mathbf{M}X^r & \dots & \mathbf{M}X^{2r} - \mathbf{M}X^{2r-1} \\ \mathbf{M}X^{r+1} - \mathbf{M}X^r & \mathbf{M}X^{r+2} - \mathbf{M}X^{r+1} & \dots & \mathbf{M}X^{2r+1} - \mathbf{M}X^{2r} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\mathbf{P}\{X \geq 1\} \leq \mathbf{M}X + \frac{D(0, \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}X, \dots, \mathbf{M}X^{2r+1} - \mathbf{M}X^{2r})}{D(\mathbf{M}X^3 - \mathbf{M}X^2, \dots, \mathbf{M}X^{2r+1} - \mathbf{M}X^{2r})}$$

Зубков А. М. Неравенства для числа одновременно происходящих событий. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, вып. 4, с. 638–666.

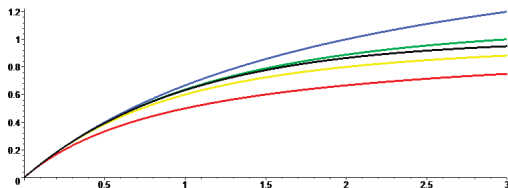
Пусть опять $\mathbf{P}\{X_\lambda = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m \geq 0$.

$$\mathbf{M}X_\lambda = \lambda, \quad \mathbf{M}X_\lambda^2 = \lambda^2 + \lambda, \quad \mathbf{M}X_\lambda^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathbf{M}X_\lambda^4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4, \quad \mathbf{M}X_\lambda^5 = \lambda + 15\lambda^2 + 25\lambda^3 + 10\lambda^4 + \lambda^5$$

$$1 - \frac{1}{1 + \lambda} \leq \mathbf{P}\{X_\lambda \geq 1\} = 1 - e^{-\lambda} \leq 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda/2}},$$

$$1 - \frac{1}{1 + \lambda + \lambda^2/2} \leq 1 - e^{-\lambda} \leq 1 - \frac{1}{1 + \lambda + \lambda^2/2 + \lambda^3/(6(1 - \lambda/3))}$$



$$1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{1 - 3/2}} = \frac{6}{5}$$

В расширенных классах случайных величин оценки неулучшаемы:
[Макрушин А. В.](#) Неулучшаемость моментных оценок. — Теория
 вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, вып.1, с. 159–166

Геометрическая интерпретация вероятностного тождества

Показательное распределение с параметром $\lambda \in (0, \infty)$:
имеет плотность распределения $p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ на $[0, \infty)$,
 $\mathbf{P}\{\xi \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, $\mathbf{P}\{\xi > x\} = e^{-\lambda x}$ ($x > 0$)

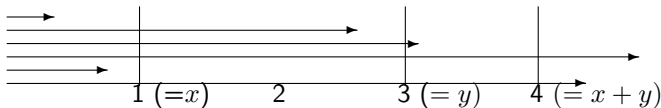
Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, $\mathbf{P}\{\xi_k > x\} = e^{-\lambda x}$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq x\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n}{n} \leq x\right\} \quad \forall x \geq 0$$

$$\mathbf{P}\left\{\min_{1 \leq k \leq m} \xi_k > x\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^m \{\xi_k > x\}\right\} = e^{-\lambda x m} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_m}{m} > x\right\}$$

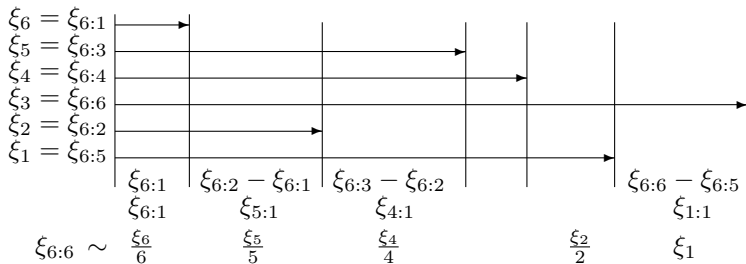
Свойство отсутствия последействия:

$$\mathbf{P}\{\xi > x + y \mid \xi > y\} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathbf{P}\{\xi > x\}.$$



$$\xi_1, \dots, \xi_n \Rightarrow \xi_{n:1} = \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq \xi_{n:2} \leq \dots \leq \xi_{n:n} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$$

— перенумерация $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, зависящая от их значений.



$\xi_{6:2} - \xi_{6:1}, \xi_{6:3} - \xi_{6:1}, \dots, \xi_{6:6} - \xi_{6:1}$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq 1 \right\} = \mathbf{P} \left\{ \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n}{n} \leq 1 \right\}$$

Плотность совместного распределения $\xi_1, \dots, \xi_n$ равна

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)}$$

$$\mathbf{P} \{ \max \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \leq 1 \} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n$$

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n}{n} \leq 1 \right\} = \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n \leq 1}} \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n$$

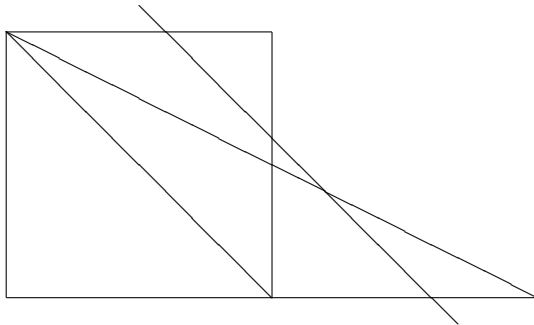
Первый интеграл — по кубу $C = [0, 1]^n$, второй — по симплексу S с вершинами в $0, \mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2, \dots, n\mathbf{e}_n$

Пусть $L_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = t\}$,

$C(t)$ и $S(t)$ — $(n-1)$ -мерные объемы пересечений $L_t \cap C$ и $L_t \cap S$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq 1\} &= \int_0^n C(t) \lambda^n e^{-\lambda t} dt = \\ &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n}{n} \leq 1\right\} = \int_0^n S(t) \lambda^n e^{-\lambda t} dt \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Значит, $C(t) \equiv S(t) \quad \forall t \geq 0$

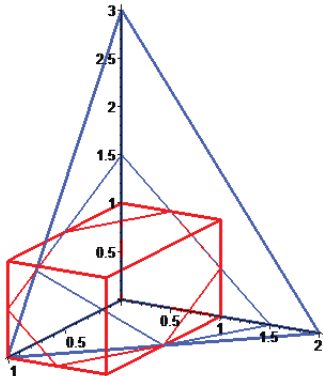
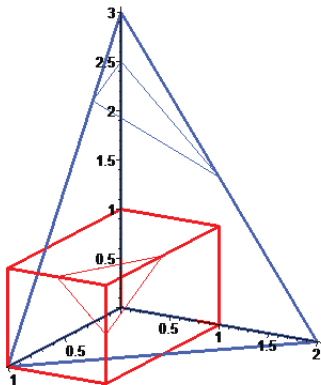


[Зубков А. М.](#) Вероятностное доказательство одной геометрической теоремы. — Матем. заметки, 1979, т. 26, № 6, с. 957–959

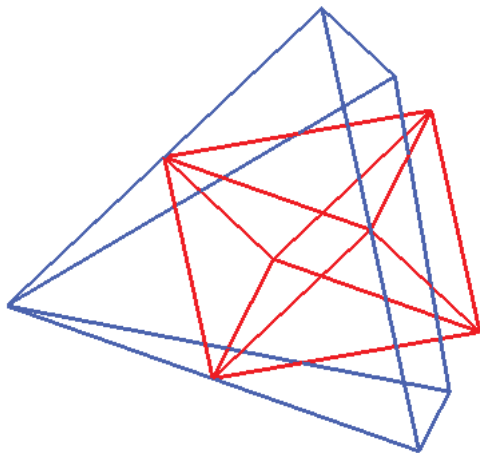
Сечения куба и тетраэдра плоскостями

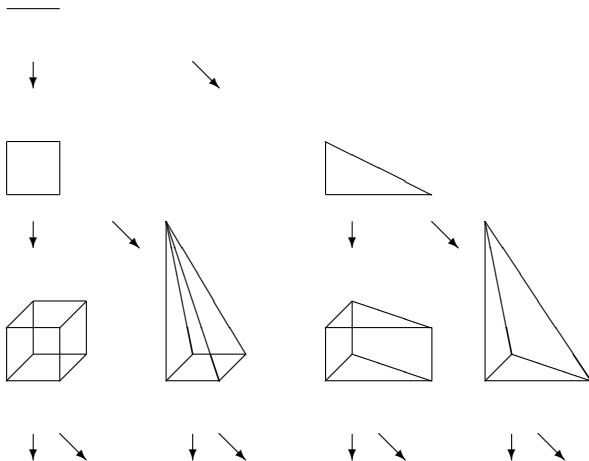
$$L_{2.5} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 2.5\} \text{ и}$$

$$L_{1.5} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1.5\}$$



Сечения 4-мерных куба и симплекса 3-мерной гиперплоскостью
 $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$





Малышев Ф. М. Семейство равновеликих n -мерных многогранников, удовлетворяющих принципу Кавальери. — Сдана в "Математические заметки"

Спасибо за внимание!