Синкевич Г.И. Эволюция понятия числовой прямой / Г.И. Синкевич // Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» 24-29 марта, Цахкадзор, 2014. – т. I. – с. 450–455.

# Эволюция понятия числовой прямой.

Галина Ивановна Синкевич,
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2-я Красноармейская ул., д. 4, 190005, Санкт-Петербург, Россия.
+79213434388, galina.sinkevich@gmail.com

Abstract. The notation of number line was formed in XX c. We consider the generation of this conception in works by M. Stiefel (1544), Galilei (1633), Euler (1748), Lambert (1766), Bolzano (1830-1834), Meray (1872), Cantor (1872), Dedekind (1872), Heine (1872) and Weiestrass (1861-1885).

Числовая прямая – абстрактное понятие, сформировавшееся в начале XX века, её следует отличать от телесной прямой и геометрической прямой. Телесная прямая, или отрезок – образ, возникший в античности. Геометрическая прямая, или ось, как понятие формируется в период с XVI по XVIII век в математическом анализе. Понятие прямой или кривой как геометрического места точек возникает в XVII веке в первых работах по математическому анализу [1].

Числовая прямая как концепт сформировалась в работах Кантора и Дедекинда, но сам термин, сначала «числовая шкала», затем «числовая прямая», употребляется с 1912 года: «Thus, the positive and negative numbers together form a complete scale extending in both direction from zero»[2].

Предвосхищением понятия числовой кривой можно считать континуум – философское понятие непрерывного или длительного. История его начинается в античности (Зенон, Аристотель), Средние века (Боэций), начало Нового времени (Ж. Буридан, Т. Брадвардин), затем Лейбниц.

В античности числа представлялись как совокупность натуральных и рациональных положительных чисел, образующих шкалу. Иррациональные числа $\pi$ и $\sqrt{2}$ определялись приближениями. В основе рассуждения лежал метод исчерпываний Евдокса, оценки делались с избытком и с недостатком. Техника приближений достигла высот в работах Архимеда, позже в работах математиков стран Востока. В состав чисел очень долго не входил ноль. Отрицательные числа, хоть и получались иногда при решении задач (например у Диофанта), не считались полноправными числами, в редких случаях им давалась коммерческая интерпретация долга. При решении уравнений до начала Нового времени разыскивались лишь положительные корни.

Иррациональные числа традиционно от Евклида понимались как неизвлекаемые корни.

Иррациональные числа назывались surdi (глухие) – например, у Ньютона; или ложные. Мнимые числа, появившиеся впервые в 1545 году у Кардано, назывались софистическими.

Впервые отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и положительные числа, как числа, большие нуля, определил Михаэль Штифель (1487–1567). У него же ноль, а также дробные и иррациональные величины названы числами. Штифель пишет, как целые, рациональные и иррациональные числа относительно друг друга.

Обратимся к книге Штифеля 1544 года «Обобщённая арифметика» [3]. Штифель устанавливает, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и иррациональных чисел. Он рассматривает единичный отрезок (2,3) и располагает в нём бесконечные последовательности

$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{5}{6}, 2\frac{1}{7}, 2\frac{3}{7}, \ldots$ и

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{13}, \sqrt[3]{14}, \sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{17}, \sqrt[3]{18}, \sqrt[3]{19}, \sqrt[3]{20},$$

$$\sqrt[3]{21}, \sqrt[3]{22}, \sqrt[3]{23}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[3]{26}, \sqrt[4]{17}, \sqrt[4]{18}, \sqrt[4]{19}, \sqrt[4]{20}, \sqrt[4]{21}, \sqrt[4]{22}, \sqrt[4]{23}, \sqrt[4]{24}, \sqrt[4]{26}, \ldots$$ [3, с.104].

Подробнее см. [4].

В 1596 г. Людольф ван Цейлен (Лудольф ван Кёлен, Ludolph van Ceulen, 1539–1610), в традициях немецкого расчётолюбия и следуя Архимеду, сочинения которого стали известны в Европе в середине XVI века, вычислил число $\pi$ с 35 десятичными знаками, и до конца XIX века число $\pi$ имело название «число Людольфа».

В отличие от Штифеля, Г. Галилей (1564 – 1642) обладал чувством связи между математикой и физикой, все его рассуждения сопровождаются примерами из оптики, механики и т.п. Линия понимается как результат движения.

В1633 году, в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», Галилей рассуждает о распределении чисел: «Если я теперь спрошу вас, сколько квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень имеет свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата.

Поскольку бесконечно много чисел вообще, бесконечно много квадратов, бесконечно много корней, то ни множество квадратов не меньше множества всех чисел, ни последнее не больше первого; в конечном выводе – свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеет места там, где дело идёт о бесконечности, и применимы только к конечным количествам» [5, с. 141].

Числа, которые рассматривались до XVIII века, были натуральными, рациональными и иррациональными (как неизвлекаемые корни – Кёстнер [6]), то есть алгебраические иррациональные. Предположение том, что число π иррационально, высказывали арабские учёные, начиная с XI века [7, с. 176].

В 1748 году во «Введении в анализ бесконечно малых» Эйлер, говоря о тангенсах углов, меньших $30^0$, употребляет термин «слишком иррациональный» (nimis sunt irrationals) [8, с. 120]. Там же он высказывает предположение, что кроме иррациональных алгебраических чисел (то есть получаемых в результате решения алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами) существуют ещё и трансцендентные иррациональные числа, получаемые в результате трансцендентных вычислений, например, логарифмирования. Заметим, что обозначения π и *e* закрепились после выхода в свет «Введения анализа бесконечно малых» Эйлера, хотя π встречалось у разных математиков с начала XVIII века. Символ π восходит к греческому περι-– вокруг, около; либо περι-μετρον – периметр, окружность; либо περι-φέρεια – окружность, дуга.

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) в работе 1766 года, опубликованной в 1770 году [9], в русском переводе [10, с. 121–143], доказал иррациональность чисел π и *e*. Его рассуждение дополнил Лежандр в 1794 году (лемма Лежандра)[10, с. 145–155, 11]. Этим вопросом занимался и Фурье (1815 г.).

В 1769 году Лагранж в «Мемуаре о решении числовых уравнений» определил иррациональные числа как определяемые бесконечной непрерывной дробью.

В 1821 г. О. Коши определил иррациональные числа как пределы сходящихся последовательностей, но не определил порядок и операции над ними [12].

В 1830-е годы Бернард Больцано делает попытку построить теорию действительного числа в рукописи «Учение о величинах» (Größenlehre). Больцано использует метод исчерпываний, а также понятия, сформулированные им в 1817 г. о точной верхней и нижней границах и критерий сходимости последовательности[1]. Он вводит понятие измеримого числа, отношения «равно», «больше», «меньше», утверждает плотность (pantachisch) множества вещественных чисел. Больцано вводит бесконечно большие и бесконечно малые числа. Если бы его рукопись была опубликована и получила признание современников, возможно, мы имели бы дело с другим, нестандартным математическим анализом. Вспомним, что говорил Путнам о возникновении языка эпсилон – дельта: «Если бы Вейерштрасс не обосновал метод эпсилон–дельта, пришлось бы актуализировать бесконечно малые, как это случилось с мнимыми числами. Мы же

[1] Этот критерий носит имя Коши, хотя у Больцано он сформулирован в 1817, а у Коши в 1821 году.

постепенно расширяем систему вещественных чисел, всем известны работы Абрахама Робинсона» [13]. Возможно, что отношение к числам, как к изменяющимся величинам, началось с утверждения Лейбница, что $\lim\frac{\Delta}{\Delta}=\frac{dy}{dx}$. У Больцано наравне с постоянными числами существуют и переменные числа, как измеримые, так и неизмеримые. Предел, или граница таких чисел, тоже может быть переменной величиной. «Если переменное, но измеримое число $Y$ остаётся постоянно больше переменного, но измеримого $X$, и кроме того, у $Y$ нет наименьшего значения, а у $X$ наибольшего, то существует по меньшей мере одно измеримое число $A$, которое постоянно лежит между границами $X$ и $Y$.

Если, далее, разность $Y - X$ не может бесконечно убывать, то таких чисел, лежащих между $X$ и $Y$, бесконечно много.

Если же эта разность бесконечно убывает, то существует только одно-единственное такое число. Если, наконец, разность $Y - X$ бесконечно убывает и либо $X$ имеет наибольшее, либо $Y$ наименьшее значение, то не существует никакого измеримого числа, лежащего постоянно между $X$ и $Y$»[14, с. 525]. Здесь уже есть предвосхищение понятия сечения, которое появится у Дедекинда в 1872 году. Но в 1830 году ещё не было известно о существовании трансцендентных чисел. Больцано был в большей степени философом, его гениальная математическая прозорливость не опиралась на профессиональную деятельность, хотя его философский подход к пониманию непрерывности сформировал направление развития концепции числа и непрерывности. Вынужденное отстранение от преподавания, отсутствие научного общения и научной литературы не позволило его идеям воплотиться в самостоятельную теорию, но его идеи вошли в теорию функций и теорию множеств.

Понятие и теорию трансцендентных чисел с 1840 г. начинает строить Ж. Лиувилль. В 1844 году он опубликовал небольшую заметку в Comptes Rendus о том, что алгебраическое число невозможно приблизить рациональной дробью [15]. Его дальнейшие исследования составили теорию трансцендентных чисел. Трансцендентность числа $e$ в 1873 году доказал Эрмит [16], трансцендентность числа $\pi$ в 1882 году доказал Линдеман [17], его доказательство в 1885 году упростил Вейерштрасс [18].

Но теория действительного числа ещё не была создана. Нельзя было строго определить ноль, больше, меньше или равно нулю. Поэтому Вейерштрасс в своих лекциях по дифференциальному исчислению 1861 года, доказывает теорему «Непрерывная функция, у которой производная внутри определённых интервалов аргументов всюду равна нулю, сводится к константе»[19, с. 118].

В 1869 году теорию действительного числа построил французский математик Шарль Мере (1835-1911) [20]. На основании сходящихся последовательностей и введя отношение эквивалентности между ними, Мере вводит понятие неизмеримого числа как фиктивного предела: «Инварианта сходится к некоему фиктивному неизмеримому пределу, если она сходится к точке, не допускающей точное определение. Если несоизмеримые пределы двух сходящихся вариант равны, то эти варианты будут эквивалентны»[21, с. 2]. Мере определяет отношение сравнения и операции над неизмеримыми числами. Но его сложный язык, неудобные термины, его удалённость от математической жизни Парижа (Мере много лет жил в деревне и занимался виноградарством, потом преподавал в университете Дижона), категорическое неприятие или незнание достижений математики после Лагранжа ограничили его теорию. Он считал, что «разрывные функции, не имеющие производных, не интегрируемые никогда не встретятся, так что о них можно не беспокоиться. Не стоит обращаться к уравнению Лапласа, принципу Дирихле, потому что производные определяются, рассчитываются, перемешиваются в дифференциальные выражения так, как этого хотел Лагранж, то есть с помощью простых операций»[22]. Поэтому его теорию не приняли современники, хотя сейчас французы называют концепцию действительного числа концепцией Мере–Кантора.

Инициатива построения концепции действительного числа переходит к немецким математикам. В 1872 году выходят работы Э. Гейне «Лекции по теории функций» [23], Г. Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [24, с. 9–17] и Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» [25].

Э. Гейне как профессиональный математик и преподаватель, изложил теорию числа на языке фундаментальных последовательностей, введя отношение эквивалентности и порядка. Его изложение имеет много общего с теорией Кантора, в совместных беседах с которым она и создавалась. Методически он опережает своих коллег, до сих пор в матанализе понятие предела часто даётся на языке счётных последовательностей. Подробнее см. [26, 27].

Р. Дедекинд подошёл к определению числа как алгебраист, дав арифметическое определение числа. Дедекинд рассматривает свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел R, (числового корпуса – термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старается избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено как к одному, так и к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии. «Каждая точка *p* прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т.е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, – это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [25, с. 17–18].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Определение числа, данное Дедекиндом, до сих пор используется в курсах анализа как логически и категориально безупречное. Но, как заметил Кантор, в анализе невозможно пользоваться понятием числа как сечения. Как только рассматривается неупорядоченное множество, это определение бессильно.

Г. Кантор, как и Гейне, введя понятие числа на основании счётных фундаментальных последовательностей, идёт дальше Гейне: определяет понятие предельной точки, вводит иерархию предельных множеств. В работе 1874 года он доказывает счётность множества алгебраических иррациональных чисел, и несчётность множества действительных, а следовательно, и трансцендентных чисел в статье «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» [24, С. 18–21]. Теоретико-множественная терминология ещё не сложилась, понятие счётности появится у него позже, он говорит об взаимно однозначном соответствии, а вместо множества употребляет термин «совокупность». Кантор постулирует взаимно однозначное соответствие между числами и точками на прямой, он утверждает, что доказать это невозможно.

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность определения непрерывности через сечение. Его третья статья 1878 года «К учению о многообразиях» [24, С. 22–35] уже содержит понятия мощности и взаимно однозначного соответствия между многообразиями различной размерности. В этой же статье появляется понятие «второй мощности», то есть начинает формироваться гипотеза континуума. Подробнее см. [28]. Числовой континуум по Кантору – это совершенное связное множество.

Библиография.


1. *De L'Hôpital*. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes / L'Hôpital de. – Paris. – 1696. – 181 p.
2. *Wells W*. First year algebra / W. Wells, W. W. Yart. – Boston. – 1912. – 325 p.
3. *Stifelio M*. Arithmetica Integra / M. Stifel. – Norimbergae. – MDXLIIII. – (1544 г.) – 327 p.
4. *Синкевич Г.И.* Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2013. - № 10. – С. 11–16.
5. *Галилей Г*. Избранные труды в двух томах. Т. 2. – М.: Наука. – 1964 г.
6. *Kaestner A.G*. Angfangsgründe der Analysis endlicher grössen / A.G. Kaestner. – Göttingen, 1794. – 590 s. – S. 198.
7. *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер о квадратуре круга / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1957 г. – X. – С. 159–210.
8. *Эйлер Л*. Введение в анализ бесконечно малых / Л. Эйлер. – М.: Физматгиз. – 1961ю – т. 1 – 315 с.
9. *Lambert I.H*. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen / I.H. Lambert // Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II. – Berlin. – 1770. – pp.140– 169. имеется русский перевод: О квадратуре круга (Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр). С приложением истории вопроса, составлен Ф. Рудио / перевод с немецкого под редакцией и с примечаниями академика С.Н. Бернштейна. 1-е издание 1911 Mathesis. – 176 с.; 2-е издание М.- Л.: Гостехиздат. – 1934 г. – 239 с.
10. О квадратуре круга (Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр). С приложением истории вопроса, составлен Ф. Рудио / перевод с немецкого под редакцией и с примечаниями академика С.Н. Бернштейна. 1-е издание 1911 Mathesis. – 176 с.; 2-е издание М.- Л.: Гостехиздат. – 1934 г. – 239 с.
11. *Legendre A.-M*. Eléments de géométrie. Note IV. Où l'on demontre que le rapport de la circonférence au diametre et son quarré sont des nombres irrationnels. – 1794.
12. *Cauchy A.-L*. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres. Ser. 2, t. 3. – p. 1–471.
13. *Putnam H*. What is mathematical truth? / H. Putnam. Proceedings of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston, Mass., 1974) // Historia Mathematica. – 1975. – 2. – No. 4. – P. 529–533.

14. *Рыхлик К*. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. – 1958 г. – XI. – С. 515–532.

15. *Liouville J.* Sur les nombres transcendants / L. Liouville // Comptes Rendus de l`Academie des Sciences. – 1844. – XVIII. – p. 883–885.

16. *Hermit Ch*. Sur les fonctions exponentielle / Ch. Hermit. Comptes Rendus de l`Academie des Sciences. – 1873. – 77. – p. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

17. *Lindemann F*. Über die Ludolph´sche Zahl / F. von Lindemann. – Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. Berlin. – 1882. – P. 679–682.

18. *Weierstrass K*. Zu Lindemann´s Abhandlung „Üeber die Ludolph´sche Zahle“ / K. Weierstrass // Berichte der Berliner Akademie. – 1885.

19. *Weierstrass K*. Differentialrechnung 1861. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. 1861 von H.A. Schwarz (Institut Mittag-Leffler). Extraits // Pierre Dugac. Eléments d’analyse de Karl Weierstrass. Archive for history of exact sciences. 1973, vol. 10. Number 1– 2. – p. 41–176. Appendice II.

20. Méray Ch. / Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat.– 1869. – (2) 4. – P. 280–289.

21. *Méray Ch*. Nouveau précis d’analyse infinitesimale / Ch. Méray. – Publication : F. Savy. XXIII – Paris: 1872. – 310 p.

22. *Синкевич Г.И*. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2012 г. – С. 180–185.

23. *Heine E*. Die Elemente der Functionenlehre / E. H. Heine // J. reine angew. Math. – 74 (1872). – S. 172–188.

24. Кантор Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – Москва, 1985. – 485 с.

25. *Дедекинд Р*. Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. Пер. с нем. С.О. Шатуновского. – Одесса, 1923. – 4 изд. – 44 с.

26. *Синкевич Г.И*. Генрих Эдуард Гейне. Теория функций //Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера/ СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 6 – 26.

27. *Гейне Э. Г*. Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 26 – 46.

28. *Синкевич Г.И*. Развитие понятия непрерывности в работах Дедекинда и Кантора / // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2013 г. – в печати.