О ПОТРАЕКТОРНО-ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Насыров Фарит Сагитович
д-р. физ.-мат. наук, профессор

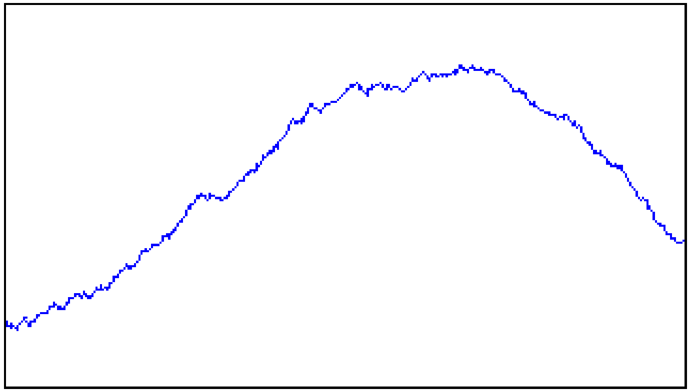
Исмагилов Нияз Салаватович
аспирант

Уфимский государственный
авиационный технический университет

Сведения из стохастического анализа

Стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) называется выражение вида

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (1)$$



гладкое движение + «шум»

b – коэффициент сноса;
σ – коэффициент диффузии;

Уравнение (1) интерпретируется в интегральном смысле

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \quad (2)$$

Стохастические интегралы Ито и Стратоновича связаны соотношением

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dW_s = \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s, X_s)\sigma'_x(s, X_s)ds. \quad (3)$$

Для $v(t,x) = \mathbf{E}_x h(X_t)$ справедливо прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(t, x)v(t, x)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[b(t, x)v(t, x)\right], \quad v(0, x) = h(x). \quad (4)$$

Стохастическая задача оптимального управления

Пусть задан одномерный стохастический управляемый процесс

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (5)$$

$X_t \in \mathbf{R}$ – фазовая координата $\quad u_t \in \mathrm{U} \subset \mathbf{R}$ – управляющая функция

Целью управления является минимизация функционала потерь

$$J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right] \to \inf_{u \in \mathcal{N}}. \quad (6)$$

Важное отличие стохастических задач – неупреждаемость решений.
$\mathcal{N}$ – множество неупреждающих процессов

Детерминированная задача	Стохастическая задача
Будущее известно	Будущее не известно
В момент t траектория процесса известна на всем отрезке $[0,T]$	В момент t траектория процесса известна только на отрезке $[0,\ t]$
Управление основано на всей траектории процесса: $x_{[0,T]}$	Управление основано на траектории процесса до момента t: $x_{[0,t]}$
Управление – любая измеримая функция	Управление – согласованная с потоком функция

Стохастический метод динамического программирования

- Представлен в работах
  - **Fleming, W.H., Soner H.M.** *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* - New York: springer, 2006.
  - **Fleming W.H., Rishel R.W.** *Deterministic and stochastic optimal control.* – New York: Springer, 1975.
  - **Крылов Н.В.** *Управляемые процессы диффузионного типа.* – М.:Наука,1977

- Функция выигрыша

$$V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{N}} \{J(s,y;u(\cdot))\} \quad s\in[0,T], \quad y\in\mathbf{R}. \qquad (7)$$

- Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$-V_t' = \inf_{u\in U}\left\{f(t,x,u) + V_x' b(t,x,u) + V_{xx}''\frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\right\}, \quad V(T,x)=g(x). \quad (8)$$

- Как решать?
  - из условия минимума получить $u = \mathbf{u}\,(t,x,V_x,V_{xx})$
  - найти решение $V = \mathbf{V}(t,\, x)$ задачи Коши

$$-V_t = f(t,x,\mathbf{u}) + V_x b(t,x,\mathbf{u}) + V_{xx}\sigma(t,x,\mathbf{u}), \quad V(T,x)=g(x). \qquad (9)$$

  - построить управление с обратной связью

$$u(t,x) = \mathbf{u}(t,x,\mathbf{V}_x,\mathbf{V}_{xx}). \qquad (10)$$

- Какие сложности?
  - функция выигрыша часто не дифференцируема
  - уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана часто не имеет решений в классическом смысле
    - существуют вязкие решения, но их сложно строить

Стохастический принцип максимума

- Представлен в работах
  - **Kushner H.J.** *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems* // SIAM J. Control, - 1972 – Vol. 10 – c.78-92.
  - **Haussmann U.G.** *A stochastic maximum principle for optimal control of diffusions.* – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - **Yong J., Zhou X.Y.** *Stochastic control: Hamiltonian systems and HJB equations.* – New York: Springer, 1999.
- Функция Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,u,p,q) = pb(t,x,u) + q\sigma(t,x) - f(t,x,u). \qquad (11)$$

- Условие максимума

$$H(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t,p(t),q(t)) = \max_{u\in U} H(t,\hat{X}_t,u,p(t),q(t)). \qquad (12)$$

- Сопряженные переменные p и q определяются из решения

$$\begin{cases} d\hat{X}_t = b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)dt + \sigma(t,\hat{X}_t)dW_t, \\ dp(t) = -\left\{b_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)p(t) + \sigma_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)q(t) - f_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\right\}dt + q(t)dW_t, \\ \hat{X}_0 = x_0, \quad p(T) = -g_x(\hat{X}(T)). \end{cases} \qquad (13)$$

- Как решать?
  - Из условия максимума $u = \mathbf{u}\,(t,x,p,q)$.
  - Найти решение $p = \mathbf{p}(t)$, $q = \mathbf{q}(t)$ обратного СДУ .
  - Оптимальное управление определить как $u = \mathbf{u}\,(t,x,\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))$.
- Какие сложности?
  - Решение пары прямых и обратных СДУ представляет из себя сложную задачу.

Детерминированный подход

- Сведение стохастической задачи к детерминированной.
- Мало изучен.
- Представлен в работах
  - **Wets R.J.B**. *On relation between stochastic and deterministic optimization* // Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling. Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems 107. --- Springer-Verlag, Berlin, 1975 .
  - **Rockafellar R. T., Wets. RJ-B.** *Nonanticipativity and L 1-martingales in stochastic optimization problems* // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. Springer Berlin Heidelberg, - 1976. - p.170-187.
  - **Davis M.H.A., Burstein G.** *A deterministic approach to stochastic optimal control, with application to anticipative control* // Stochastics and Stochastic Reports. - 1992. - Vol.40. - p.203-256.
- Одна из наибольших сложностей – построение неупреждающих решений.
- Подход Davis и Burstein:
  - Рассмотрены нелинейные задачи оптимального управления с управляемым сносом.
  - Построено разложение решения.
  - Построена детерминированная задача.
  - Построена модификация детерминированной задачи множителями Лагранжа для достижения неупреждаемости.

Подход Davis M.H.A. и Burstein G.

- Рассматривается задача

$$
\begin{aligned}
&dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t) \circ dW_t, \quad X_0 = x_0, \\
&\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}g(X_T) \to \inf_{u \in \mathcal{N}}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

- Разложение решения

$$X_t = \xi_t(\eta_t), \tag{15}$$

$$d\xi_t(x) = \sigma(\xi_t(x)) \circ dW_t \quad \xi_0(x) = x, \tag{16}$$

$$\dot{\eta}_t = \left(\frac{\partial \xi_t}{\partial x}\right)^{-1} (\eta_t) b(\xi_t(\eta_t), u_t), \quad \eta_0 = x_0. \tag{17}$$

- Потраекторно-детерминированная задача

$$
\begin{aligned}
&\dot{\eta}_t = \left(\frac{\partial \xi_t}{\partial x}\right)^{-1} (\eta_t) b(\xi_t(\eta_t), u_t), \quad \eta_0 = x_0, \\
&J(u) = g(\xi_T(\eta_T)) \to \inf_{u \in \mathcal{A}}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

- Модифицированная задача

$$
\begin{aligned}
&\dot{\eta}_t = \left(\frac{\partial \xi_t}{\partial x}\right)^{-1} (\eta_t) b(\xi_t(\eta_t), u_t), \quad \eta_0 = x_0, \\
&J(u) = \int_0^T \lambda(t, \eta_t, \omega) u(t) dt + g(\xi_T(\eta_T)) \to \inf_{u \in \mathcal{A}}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

- Пусть $u^*(t,x)$ – оптимальное управление в исходной задаче, тогда

$$\lambda(t, \eta, \omega) = -\frac{\partial [g(\xi_T(\psi_t^{-1}(\eta)))]}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \xi_t}{\partial x}\right)^{-1} (\eta) b_u(\xi_t(\eta), u^*(t, \xi_t(\eta))). \tag{20}$$

Постановка задачи 1 (управление сносом)

Задача ($\mathcal{S}1$)

Необходимо минимизировать функционал

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right] \to \inf_{u\in\mathcal{N}}, \quad (21)$$

при условии

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (22)$$

$X_t \in \mathbf{R}$,
$u_t \in U \subset \mathbf{R}$,
$t \in [0, T]$.

Наш подход к исследованию

- Построение структуры решения.
- Замена дифференциального ограничения, задаваемого СДУ, дифференциальным ограничением, задаваемым ОДУ.
- Замена усредненного функционала качества на потраекторный.
- Построение потраекторно-детерминированной задачи ($\mathcal{D}1$).
- Построение модифицированной задачи ($\mathcal{D}^\lambda 1$).

Структура решения

Старое ограничение

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dW_t, \qquad X_0 = x_0. \quad (23)$$

Структура решения

X_t – решение СДУ $\Leftrightarrow X_t = \Phi(t, y_t + W_t)$. (24)

$$\int_0^{X_t} \frac{d\psi}{\sigma(t,\psi)} = W_t + y_t, \quad (25)$$

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{b(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t) - \Phi'_t(t, y_t + W_t)}{\sigma(t, \Phi(t, y_t + W_t))}, \quad (26)$$

$$y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0). \quad (27)$$

Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. – М.: Физматлит, 2011. – 212с.

Новое ограничение

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{b(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t) - \Phi'_t(t, y_t + W_t)}{\sigma(t, \Phi(t, y_t + W_t))}, \quad (28)$$

$$y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0).$$

Переход к детерминированной задаче

Подставив $X_t = \Phi(t, y_t + W_t)$ в задачу $(\mathcal{S}1)$, получаем эквивалентную задачу

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{b(t,\Phi(t,y_t+W_t),u_t) - \Phi'_t(t,y_t+W_t)}{\sigma(t,\Phi(t,y_t+W_t))}, \qquad (29)$$

$$y_0 = \Phi^{-1}(0,x_0),$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t,\Phi(t,y_t+W_t),u_t)dt + g(\Phi(T,y_T+X_T))\right] \to \inf_{u\in\mathcal{N}}. \qquad (30)$$

замены: $F(t,y,u) = f(t,\Phi(t,y+W_t),u)$, $G(y) = g(\Phi(T,y+W_T))$, $B(t,y,u) = \dfrac{b(t,\Phi(t,y+W_t),u) - \Phi'_t(t,y+W_t)}{\sigma(t,\Phi(t,y+W_t))}$.

$$\frac{dy_t}{dt} = B(t,y_t,u_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0,x_0), \qquad (29')$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T F(t,y_t,u_t)dt + G(y_T) \to \inf_{u\in\mathcal{N}}. \qquad (30')$$

Как дальше исследовать задачу (29’)-(30’)?

- как детерминированную задачу
- как стохастическую задачу

Переход к детерминированной задаче

Будем рассматривать задачу с детерминированной точки зрения. Фиксируем параметр $\omega \in \Omega$ и для каждого значения параметра будем решать задачу

Задача $(\mathcal{DS})$

$$\frac{dy_t}{dt} = B(t, y_t, u_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \qquad (29')$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T F(t, y_t, u_t)dt + G(y_T) \to \inf_{u \in \mathcal{N}}. \qquad (30')$$

Что плохого задаче при потраекторном рассмотрении $(\mathcal{DS})$?

- Выделение класса неупреждающих функций $\mathcal{N}$ становится нетривиальной задачей.
- Функционал математического ожидания не позволяет рассматривать задачу $(\mathcal{DS})$ в полной мере как классическую детерминированную задачу оптимального управления.

Расширение множества допустимых управлений

Для преодоления сложностей в задаче (29)-(30) следует перейти от множества неупреждающих функций $\mathcal{N}$ к множеству всех измеримых функций $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\mathcal{N} \to \mathcal{A}}$$

$\mathcal{N}$ – неупреждающие функции

$\mathcal{A}$ – функции измеримые относительно $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$

Это позволяет:

- отбросить ограничение на неупреждаемость в детерминированной задаче;
- заменить усредненный функционал на потраекторный.

Лемма

Пусть $J(u)$ ограничен снизу и минимум достигается на некоторой измеримой функции u^*. Тогда на ней же достигается минимум $\mathbf{E}J(u)$, и справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{A}} \mathbf{E}J(u) = \mathbf{E} \inf_{u \in \mathcal{A}} J(u). \qquad (31)$$

Построение детерминированной задачи ($\mathcal{D}1$)

Замена $X_t = \Phi(t, y_t + W_t)$ и переход к потраекторному функционалу позволяют записать потраекторно-детерминированную задачу

Задача ($\mathcal{D}1$)

$$J(u) = \int_0^T F(t, y_t, u_t)dt + G(y_T) \to \inf_{u \in \mathcal{A}}, \quad (32)$$

$$\frac{dy_t}{dt} = B(t, y_t, u_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0). \quad (33)$$

Преимущества:

- позволяет применять детерминированные методы решения;
- неупреждающие решения ($\mathcal{D}1$) являются решениями ($\mathcal{S}1$);

Недостатки:

- решения могут не являться неупреждающими;

Построение детерминированной задачи ($\mathcal{D}^{\lambda}1$)

Для достижения неупреждаемости решений строится модифицированная задача. Суть модификации в добавлении к функционалу качества интегрального слагаемого.

Модифицированная задача ($\mathcal{D}^{\lambda}1$)

$$J(u) = \int_0^T \big[F(t, y_t, u_t) + \lambda(t) u_t\big] dt + G(y_T) \to \inf_{u \in \mathcal{A}}, \qquad (34)$$

$$\frac{dy_t}{dt} = B(t, y_t, u_t), \qquad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0). \qquad (35)$$

Теорема

Пусть (X^*, u^*) является оптимальным решением для задачи ($\mathcal{S}1$), тогда при

$$\lambda(t) = -\frac{\partial F}{\partial u}(t, y_t^*, u_t^*) + \Psi(t) \frac{\partial B}{\partial u}(t, y_t^*, u_t^*), \qquad (36)$$

где $y_t^* = \Phi^{-1}(t, X_t^*) - W_t$, решение задачи ($\mathcal{D}^{\lambda}1$) является неупреждающим и совпадает с решением задачи ($\mathcal{S}1$).

Стохастический подход

Задача ($\mathcal{DS}$) как стохастическая задача оптимального управления.

Задача ($\mathcal{DS}$)

$$\frac{dy_t}{dt} = B(t, y_t, W_t, u_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \tag{37}$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T F(t, y_t, W_t, u_t)dt + G(y_T, W_T) \to \inf_{u\in\mathcal{N}}. \tag{38}$$

Заменим W_t на фазовую переменную z_t

$$dy_t = B(t, y_t, z_t, u_t)dt, \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \tag{39}$$

$$dz_t = dW_t, \quad z_0 = 0, \tag{40}$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T F(t, y_t, W_t, u_t)dt + G(y_T, W_T) \to \inf_{u\in\mathcal{N}}. \tag{41}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$-V_t' = \inf_{u\in U}\left\{\frac{1}{2}V_{yy}'' + B(t, y, z, u)V_y' + F(t, y, z, u)\right\}, \quad V(T, y, z) = G(y, z). \tag{42}$$

Сведение к ЛК задаче

Для нелинейных задач с уравнением на фазовую переменную вида

$$dX_t = \beta(t)k(X_t)u_t dt + \alpha(t)k(X_t) \circ dW_t, \quad X_0 = x_0, \qquad (43)$$

дифференциальное ограничение в задаче $(\mathcal{DS})$ принимает линейный вид

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}u + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}(y_t + W_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0). \qquad (44)$$

Специальный вид функции выигрыша

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T \left(p(t, X_t) + q(t)u_t^2 + r(t)u_t\right) dt\right] \to \inf_{u \in \mathcal{N}}, \qquad (45)$$

$$p(t, x) = \int_0^x \frac{d\psi}{\sigma(t, \psi)}. \qquad (46)$$

Получается линейно-квадратическая задача (ЛК задача), решение которой сводится к решению уравнения Риккати.

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}u + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}(y_t + W_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \qquad (47)$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T \left(\alpha(t)(y_t + W_t) + q(t)u_t^2 + r(t)u_t\right) dt \to \inf_{u \in \mathcal{A}}. \qquad (48)$$

Задача со случайными коэффициентами

Задачи со случайными коэффициентами общего вида не решены

$$dX_t = b(t, X_t, u_t, \omega)dt + \sigma(t, X_t, \omega) \circ dW_t, \quad X_0 = x_0, \tag{49}$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\int_0^T f(t, X_t, u_t, \omega)dt \to \inf_{u \in \mathcal{N}}. \tag{50}$$

Задача с уравнением вида

$$dX_t = \beta(t, \omega)k(X_t, \omega)u_t dt + \alpha(t, \omega)k(X_t, \omega) \circ dW_t, \quad X_0 = x_0. \tag{51}$$

Сводится к линейной задаче

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{\beta(t,\omega)}{\alpha(t,\omega)}u + \frac{\alpha'(t,\omega)}{\alpha(t,\omega)}(y_t + z_t), \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \tag{52}$$

$$dz_t = dW_t, \tag{53}$$

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T F(t, y_t, W_t, u_t)dt + G(y_T, W_T)\right] \to \inf_{u \in \mathcal{A}}. \tag{54}$$

Для линейных задач со случайными коэффициентами разработан принцип максимума.

Что удалось сделать по задаче 1?

- Дифференциальное ограничение, задаваемое СДУ, было заменено на ограничение, задаваемое ОДУ. К задаче с новым дифференциальным ограничением применены два подхода: детерминированный и стохастический.
- Детерминированный подход заключается в построении новой детерминированной задачи, решения которой на неупреждающих функциях совпадают с решением исходной стохастической задачи. Если известна информация о будущем, то детерминированная задача позволяет строить упреждающие решения. Для неупреждающих решений обобщен метод Дэвиса, который заключается в модификации детерминированной задачи.
- Стохастический подход заключается в применении к задаче с новым дифференциальным ограничением стохастических методов построения оптимальных решений. Обнаружен класс нелинейных задач, для которых новое дифференциальное ограничение является линейным, а сама задача превращается в стохастическую ЛК-задачу и может быть сведена к решению уравнения Риккати. Обнаружен класс нелинейных задач со случайными коэффициентами, который может быть сведен к линейной задаче с возможностью применения к последней принципа максимума.

Постановка задачи 2 (управление диффузией)

Что с управлением на диффузию?

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t. \quad (55)$$

Задача существенно усложняется.

Однако, если сделать ряд допущений, получаются аналогичные результаты.

Задача($\mathcal{S}2$)

Необходимо минимизировать функционал

$$\mathbf{E}J(u) = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, u_t, \nu_t)dt + g(X_T)\right] \to \inf_{\substack{u\in\mathcal{N}_1 \\ \nu\in\mathcal{N}_2}}, \quad (56)$$

при условии

$$dX_t = b(t, X_t, u_t, \nu_t)dt + \sigma(t, X_t)u_t \circ dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (57)$$

$$t \in [0, T], \quad u_t \in U_1 \subset \mathbf{R},$$
$$X_t \in \mathbf{R}, \quad \nu_t \in U_2 \subset \mathbf{R}.$$

$\mathcal{N}_1$– неупреждающие функции ограниченной вариации со значениями в U_1

$\mathcal{N}_2$– неупреждающие функции со значениями в U_2

Структура решения

Старое ограничение

$$dX_t = b(t, X_t, u_t, \nu_t)dt + \sigma(t, X_t)u_t \circ dW_t, \quad X_0 = x_0. \qquad (58)$$

Структура решения

X_t – решение СДУ $\Leftrightarrow X_t = \Phi(t, y_t + u_t W_t)$. (59)

- $\Phi(t,v)$ – решение параметризованного ОДУ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \sigma(t, \Phi), \qquad (60)$$

- y_t – решение задачи Коши на уравнение с мерой

$$dy_t = \frac{b(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t, \nu_t) - \Phi'_t(t, y_t + W_t)}{\sigma(t, \Phi(t, y_t + W_t))} dt - W_t du_t, \qquad (61)$$

$$y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0).$$

Новое ограничение

Переход к детерминированной задаче

Подставив $X_t = \Phi(t, y_t + u_t W_t)$ в задачу ($\mathcal{S}2$), получаем потраекторно-детерминированную задачу

$$\boxed{\begin{aligned} & dy_t = \frac{b(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t) - \Phi'_t(t, y_t + W_t)}{\sigma(t, \Phi(t, y_t + W_t))} dt - W_t du_t, \\ & y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \qquad (62) \\ & \mathbf{E}J = \mathbf{E}\left[\int_0^T f(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t, \nu_t) dt + g(\Phi(T, y_t + X_T))\right] \to \inf_{\substack{u \in \mathcal{N}_1 \\ \nu \in \mathcal{N}_2}}. \qquad (63) \end{aligned}}$$

При потраекторном рассмотрении сложности те же:

- нетривиальность наложения ограничения на неупреждаемость, для управляющих функций u_t и ν_t ;
- наличие математического ожидания в функционале потерь.

Расширение множества допустимых управлений

Переходим к более широкому классу управляющих функций

$$\mathcal{N}_1 \to \mathcal{A}_1 \qquad \mathcal{N}_2 \to \mathcal{A}_2$$

$\mathcal{A}_1$ – измеримые относительно $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$ функции ограниченной вариации со значениями в U_1

$\mathcal{A}_2$ – измеримые относительно $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$ функции со значениями в U_2

Справедливо утверждение о замене усредненного функционала качества потраекторным.

Лемма

Пусть $J(u,\nu)$ ограничен снизу и минимум достигается на паре измеримых функции (u^*,ν^*). Тогда на ней же достигается минимум $\mathbf{E}J(u,\nu)$ и справедливо равенство

$$\inf_{\substack{u\in\mathcal{A}_1\\ \nu\in\mathcal{A}_2}} \mathbf{E}J(u,\nu) = \mathbf{E} \inf_{\substack{u\in\mathcal{A}_1\\ \nu\in\mathcal{A}_2}} J(u,\nu). \quad (64)$$

Построение детерминированной задачи ($\mathcal{D}2$)

Построенная детерминированная задача записывается в виде задачи оптимального *импульсного* управления.

Задача ($\mathcal{D}2$)

$$dy_t = B(t, y_t, u_t, \nu_t)dt - W_t d\vartheta, \quad y_0 = \Phi^{-1}(0, x_0), \tag{65}$$

$$du_t = d\vartheta, \quad u_t \in U_1, \tag{66}$$

$$G(y_T, u_T) + \int_0^T F(t, y_t, u_t, \nu_t)\, dt \to \inf_{\substack{u \in \mathcal{A}_1 \\ \nu \in \mathcal{A}_2}}. \tag{67}$$

Что изменилось?

- u_t рассматривается как новая фазовая переменная;
- ϑ – новое импульсное управление;
- вместо классической задачи, задача оптимального импульсного управления.

замены:

$$F(t, y_t, u_t, \nu_t) = f(t, \Phi(t, y_t + W_t), u_t, \nu_t)$$

$$G(y, u) = g(\Phi(T, y + uW_T))$$

$$B(t, y, u, \nu) =$$

$$= \frac{b(t, \Phi(t, y + uW_t), u, \nu) - \Phi'_t(t, y + uW_t)}{\sigma(t, \Phi(t, y + uW_t))}$$

Построение модифицированной задачи $(\mathcal{D}^\lambda 2)$

Для достижения неупреждаемости решений обобщается метод Дэвиса.

Модифицированная задача $(\mathcal{D}^\lambda 2)$

$$dy_t = B(t, y_t, u_t, \nu_t)dt - W_t d\vartheta, \qquad (68)$$

$$du_t = d\vartheta, \qquad (69)$$

$$dz_t = F(t, y_t, u_t, \nu_t)dt + \lambda_1(t)\nu_t dt + \lambda_2(t)d\vartheta, \qquad (70)$$

$$G^\lambda(y_T, u_T, z_T) = G(y_T, u_T) + z_T \to \inf_{\substack{u\in\mathcal{A}_1 \\ \nu\in\mathcal{A}_2}} . \qquad (71)$$

Теорема

Пусть (X^*, u^*, ν^*) является оптимальным решением для задачи $(\mathcal{S}2)$, тогда при

$$\lambda_1(t) = -\frac{\partial F}{\partial \nu}(t, y_t^*, u_t^*, \nu_t^*) - \frac{\partial B}{\partial \nu}(t, y_t^*, u_t^*, \nu_t^*)\Psi^1(t), \qquad (72)$$

$$\lambda_2(t) = -W_t\Psi^1(t) + \Psi^2(t), \qquad (73)$$

где $y_t^* = \Phi^{-1}(t, X_t^*) - u_t^* W_t$, решение задачи $(\mathcal{D}^\lambda 2)$ является неупреждающим и совпадает с решением задачи $(\mathcal{S}2)$.

Что удалось сделать по задаче 2?

- Дифференциальное ограничение, задаваемое СДУ, было заменено на ограничение, задаваемое дифференциальным уравнением с мерой, построена новая детерминированная задача.

- К детерминированной задаче применимы методы оптимального импульсного управления, такие как, принцип максимума. Если известна информация о будущем, то детерминированная задача позволяет строить упреждающие решения.

- Неупреждающие решения могут быть получены методом, аналогичным методу Дэвиса, который заключается в модификации детерминированной задачи.

Пример: задача оптимального инвестирования и потребления

Инвестор обладает состоянием и желает инвестировать.
Для инвестирования доступны два актива:

- безрисковый

$$dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, \tag{74}$$

P_0

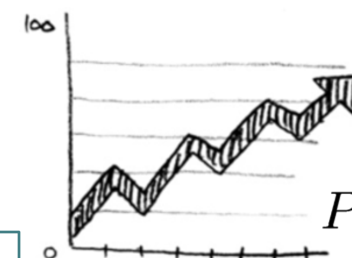
- рисковый

$$dP_1(t) = b(t)P_1(t)dt + \sigma(t)P_1(t)dW_t. \tag{75}$$

$(1-u_t)X_t$

X_t

u_tX_t



P_1

Задача управления

Максимизировать функционал

$$J = \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-\beta t}U_1(C_t)dt + e^{-\beta T}U_2(X_t)\right] \tag{76}$$

при условии

$$\begin{aligned} dX_t =& r(t)X_t dt + X_t u_t(b(t) - r(t))dt - \\ & - C_t dt + u_t X_t \sigma(t)dW_t, \quad X_0 = x_0. \end{aligned} \tag{77}$$

X_t – состояние инвестора;
u_t – часть состояния в рисковом активе;
$r(t)$ – процентная ставка;
$b(t)$ – коэффициент роста рискового актива;
$\sigma(t)$ – коэффициент волотильности;

Karatzas I., Lehoczky J, Shreve S.E. Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon // SIAM J. Cont. & Optim. – 1987. – Vol.25 – p. 1157-1186.

Применение метода

Задача ($\mathcal{S}$)

разложение решения

Задача ($\mathcal{D}$)

модификация функционала

Задача ($\mathcal{D}^\lambda$)

Задача ($\mathcal{S}$)

$$\mathbf{E}J = \mathbf{E}\Big[\int_0^T e^{-\beta t}(C_t)^\delta dt + e^{-\beta T}(X_T)^\delta\Big] \to \max,$$

$$dX_t = (rX_t - C_t)dt + X_t u_t(b-r)dt -$$
$$-\frac{1}{2}u_t^2\sigma^2 X_t dt + u_t X_t \sigma \circ dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Задача ($\mathcal{D}^\lambda$)

$$J = z_T - e^{-\beta T}(e^{\sigma(y_T + u_T W_T)})^\delta \to \inf,$$

$$dy_t = \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{C_t}{\sigma e^{y_t + u_t W_t}} + \frac{u_t(b-r)}{\sigma} - \frac{u_t^2\sigma}{2}\right)dt - W_t d\theta,$$

$$du_t = d\theta,$$

$$dz_t = (-e^{-\beta t}(C_t)^\delta + \lambda_1(t))dt + \lambda_2(t)d\theta.$$

$$\hat{C}_t = \frac{\hat{X}_t}{p(t)} \quad \hat{u}_t = \frac{b-r}{\sigma^2(1-\delta)}$$

$$\lambda_1(t) = e^{-\beta t}\delta(\widehat{C}_t)^{\delta-1} + \frac{1}{\sigma e^{\sigma(\widehat{y}_t + \widehat{u}_t W_t)}}\Psi^1(t),$$

$$\lambda_2(t) = -W_t\Psi^1(t) + \Psi^2(t).$$

Результаты моделирования

вход

↓

ввод параметров

↓

моделирование траектории винеровского процесса

↓

вычисление функции $P(t)$

↓

Построение траекторий функций ψ_t, y_t и X_t

↓

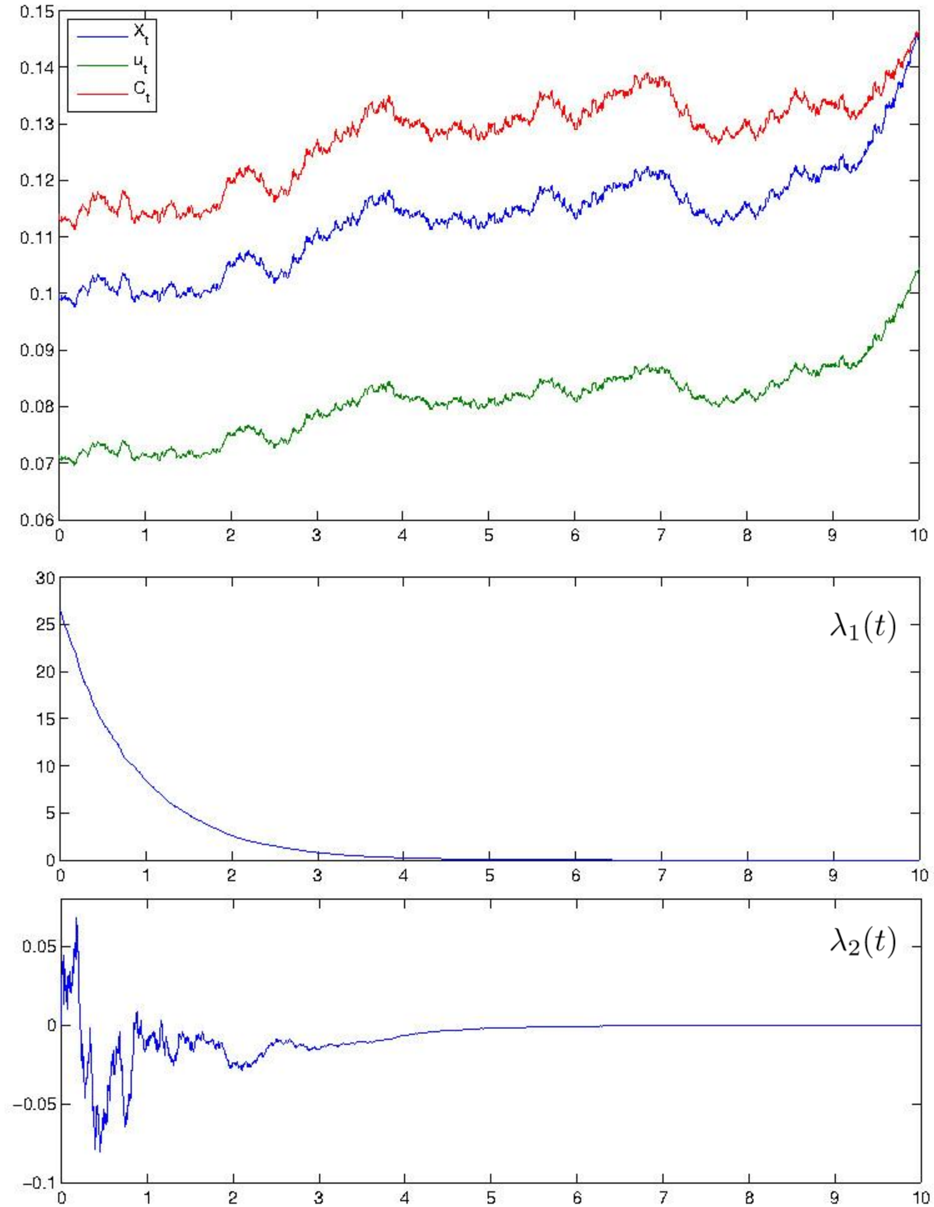
построение траектории $\lambda(t)$

↓

визуализация результатов

↓

выход



Спасибо за внимание!

Список публикаций

1. Исмагилов Н.С. О детерминированном методе оптимального решения стохастической модели инвестирования и потребления // Труды 17-й Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», февраль 2014, с. 108.
2. Исмагилов Н.С. О детерминированном подходе к задаче стохастического оптимального // Вестник УГАТУ. --- 2013. --- Т.~17. №{5}. --- С. 38--43.
3. Исмагилов Н.С. О задаче потраекторного оптимального управления процессами диффузионного типа // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] —-- М.: МАКС Пресс, 2012. —-- 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.
4. Исмагилов Н.С. О новом методе решения потраекторных задач стохастического оптимального // Тезисы XII Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (осенняя открытая сессия). --- Сочи - Адлер. --- 2011 г.
5. Исмагилов Н.С. О решении одного класса одномерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с возмущенными коэффициентами // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] —-- М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008. —-- 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.
6. Исмагилов Н.С. Об одном детерминированном методе в модели стохастического оптимального управления производством // Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В.И. Бердышева. --- Екатеренбург: ИММ УрО РАН, --- 2014 г. --- С. 170--171.
7. Исмагилов Н.С. Об одном детерминированном подходе к решению задач стохастического оптимального управления с управляемой диффузией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. (в печати)
8. Исмагилов Н.С. Об одном классе обратных стохастических дифференциальных уравнений // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] —-- М.: МАКС Пресс, 2013. —-- 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.
9. Абдуллин М.А., Исмагилов Н.С., Насыров Ф.С. Одномерные стохастические дифференциальные уравнения: потраекторный подход // Уфимский математический журнал. --- 2013. --- Т.~5. №{3} --- С. 3--16.

Список публикаций

10. Исмагилов Н.С. Оптимальное управление стохастическим дифференциальным уравнением и принцип максимума Понтрягина // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2010» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. [Электронный ресурс] --— М.: МАКС Пресс, 2010. --— 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.
11. Исмагилов Н.С. Потраекторное оптимальное управление стохастическими дифференциальными уравнениями // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2011" / Отв. ред. А.И.~Андреев, А.В.~Андриянов, Е.А.~Антипов, М.В.~Чистякова. [Электронный ресурс] --- М.: МАКС Пресс, 2011. --- 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.
12. Ismagilov N. On pathwise optimality for controlled diffusion type processes // Abstracts of 11th International Workshop on Dynamical Systems and Applications. Ankara, Turkey, 26--29 June 2012, p. 15.
13. Ismagilov N. Pathwise optimal control of diffusion type processes // Сборник трудов III Международной конференции <<Оптимизация и приложения>> (ОПТИМА-2012). Costa da Caparica, Portugal, september 2012, место издания Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН Москва, тезисы, с. 111--115.