

Музычка Степан Андреевич

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПРЯМОЙ

Научный руководитель —
д.ф.-м.н. В. А. Малышев

Аннотация

Доклад состоит из двух частей и посвящен изучению нескольких многочастичных систем на прямой.

- В первой части рассматривается линейная гамильтонова система, являющейся простейшей моделью твердого тела.
- Во второй части изучаются системы, приводящие к нелинейным Марковским процессам.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерную цепочку из N частиц (молекул) одинаковой массы m .

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ $\dot{z}_k(0) = 0$ и

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \dots < z_{N-1}(0) = (N-1)a$$

Кроме того, предполагается, что

- $z_0 \equiv 0$ — левая частица закреплена.
- На крайнюю правую частицу действует постоянная сила $f > 0$.

Постановка задачи

Динамика системы описывается гамильтонианом

$$H(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - fz_{N-1},$$

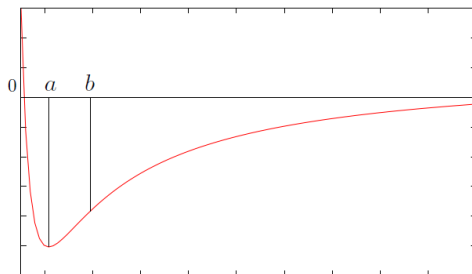
где

- $p_k = m\dot{z}_k$ — импульсы частиц.
- $V(z) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — потенциал взаимодействия между соседями.

Постановка задачи

Относительно $V(z)$ обычно предполагается, что

- $V(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$, $V(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.
- $V(z)$ выпукла на интервале $(0, b)$ и вогнута на интервале (b, ∞) .
- $V(z)$ имеет единственный минимум $V(a) < 0$ в точке $a > 0$, причем $a < b < \infty$.



Мотивировка

При наложенных условиях мера Гиббса

$$p(z, \dot{z}) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(z, \dot{z})}, \quad \beta > 0$$

для системы не определена. (Система метастабильна).

Существуют два подхода:

- Изменить $V(z)$ при больших z так, что $V(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда можно применять гиббсовскую идеологию в условиях равновесия для исследования температурного и упругого расширения.
- Искать окрестность $O(a)$ точки минимума такую, что при начальных данных траектория никогда не выходит за $O(a)$.

Основной результат

Мы идем по второму пути, предполагая дополнительно, что в некоторой окрестности точки a потенциал имеет квадратичный вид

$$V(z) = \frac{\kappa(z - a)^2}{2}.$$

Определим функционал

$$A = A(N, l, f, \kappa, m) = \sup_{t \geq 0} \max_{0 \leq k, k+l \leq N-1} |z_{k+l}(t) - z_k(t)|, l > 0$$

Основная задача состоит в оценке введенного функционала при различных N и l .

Основной результат

Мы начинаем с фиксированного числа частиц N , а затем устремляя $N \rightarrow \infty$ и делая скейлинг параметров, мы обнаруживаем, что есть фазовый переход, разделяющий область, где кристаллическая структура слабо меняется при всех $t \geq 0$, и область, где супремум растет с ростом N .

Основной результат

Введем

- $x_k(t) = z_k(t) - ka$ — отклонения частиц от положения равновесия.
- $F_N(x) = x \ln \frac{N}{x}, x > 0$ — вспомогательная функция.
- $\sigma = f/\kappa$ — основной параметр.

Отметим, что в состоянии равновесия:

$$x_{k+l}(t) - x_k(t) = \sigma l, \quad 0 \leq k < k+l < N$$

Основной результат

Теорема

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольное число, тогда для всех $k, l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$0 \leq k < k + l \leq (1 - \varepsilon)N,$$

имеют место неравенства

$$\sigma(l + c_1 F_N(l)) \leq \sup_{t \geq 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \leq \sigma(l + c_2 F_N(l))$$

$$\sigma(l - c_3 F_N(l)) \leq \inf_{t \geq 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \leq \sigma(l - c_4 F_N(l))$$

для некоторых $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, причем c_1, c_3 могут зависеть от ε .

Основной результат

Следствие

В условиях предыдущей теоремы

$$\sup_{t \geq 0} |x_{k+l}(t) - x_k(t)| \simeq \sigma l \ln \frac{N}{l}.$$

Положим $a = 1/N$, и будем рассматривать различные скейлинги $\sigma = \sigma(N)$. Рассмотрим максимальное относительное удлинение для $l = 1$. Получим

double scaling limit

$$\begin{aligned} a^{-1}A &\rightarrow 1, \text{ если } \sigma(N)N \ln N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty \\ a^{-1}A &\rightarrow \infty, \text{ если } \sigma(N)N \ln N \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Сравнение с фазовым переходом в состоянии равновесия

Рассмотрим случай нулевой температуры (статический). В случае квадратичного потенциала неподвижная точка существует и единственна: $z_k - z_{k-1} = h = a + \sigma$. Поэтому здесь

$$\begin{aligned} h/a &\rightarrow 1, \text{ если } \sigma(N)N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty \\ h/a &\rightarrow \infty, \text{ если } \sigma(N)N \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким образом, различие определяется логарифмическим множителем.

Аналогично, в случае потенциала типа Леннард-Джонса

$$V(r) = -\frac{c_n}{r^n} + \frac{c_m}{r^m}, 0 < n < m, c_n > 0, c_m > 0$$

имеет место утверждение

Предложение

Если $a = 1/N$, то неподвижная точка существует тогда и только тогда, когда

$$\sigma = \frac{f}{k} \leq \frac{C}{N},$$

где $\kappa = V''(a)$, и

$$C = C(n, m) = \frac{1}{m-n} \left(\left(\frac{m+1}{n+1} \right)^{-\frac{n+1}{m-n}} - \left(\frac{m+1}{n+1} \right)^{-\frac{m+1}{m-n}} \right)$$

Случай возмущения белым гауссовским шумом

Рассмотрим все ту же систему из N частиц, однако на этот раз будем предполагать, что

- левая частица не закреплена.
- на крайнюю правую частицу воздействует белый гауссовский шум $f_\varepsilon(t) = \varepsilon \dot{w}_t$.

Хорошо известно, что в указанной системе при отсутствии диссипации инвариантной меры не существует. Среднее энергии линейно растет с течением времени, и как следствие, с вероятностью 1 происходят сколь угодно большие отклонения от положения равновесия.

Случай возмущения белым гауссовским шумом

Задача

Оценить время достижения некоторого уровня h разности

$$\delta_i^\varepsilon = z_{i+1} - z_i - a$$

$$\tau_i^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |\Delta_i^\varepsilon| \geq h\}, i = 0, \dots, N-2$$

в зависимости от параметров i, h, ε и N .

Случай возмущения белым гауссовским шумом

Теорема

При всех $N \geq 2$, $i = 0, 1, \dots, N-2$, $\varepsilon^2 \tau_i^\varepsilon$ сходится по распределению к τ_i , где τ_i — момент выхода $2(N-1)$ -мерного броуновского движения из области

$$D_{i,N,h} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2(N-1)} : J_{i,N}(\mathbf{r}) \leq h\},$$

где

$$J_{i,N}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \omega_m^{-1} a_{m,i} (x_m \cos(\omega_m s) - y_m \sin(\omega_m s)) \right|,$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1, \dots, x_{N-1}, y_{N-1}),$$

$$a_{m,i} = \cos \frac{\pi m}{2N} \sin \frac{\pi m(i+1)}{N}, \omega_m = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{\pi m}{2N}.$$

Случай возмущения белым гауссовским шумом

Теорема (продолжение)

Причем для всех $i = 0, 1, \dots, N - 2$ τ_i и τ_{N-i-2} распределены одинаково.

Замечание. Таким образом, несмотря на то, что сила действует только на одну крайнюю частицу, асимптотика времени разрыва с левой и правой стороны совпадают.

Нелинейные Марковские процессы

Пусть $(X, \mathcal{B})$ — измеримое пространство.

Нелинейным Марковским процессом $x_t \in X$ называется процесс, чьи вероятности (интенсивности) перехода зависят не только от текущего положения частицы, но и от всего распределения процесса (в данный момент времени) в целом.

Динамика процесса описывается парой величин

$$(x_t, \mu_t \equiv \text{Law}(x_t)).$$

В то время как сам процесс x_t не является Марковским, пара (x_t, μ_t) является таковой.

Уравнения Маккина-Власова

Классическим примером являются стохастические уравнения Маккина-Власова

$$\begin{aligned}dx_t &= b(x_t, \mu_t)dt + \sigma(x_t, \mu_t)dw_t, x_t \in \mathbb{R}^n, \\ \mu_t &= Law(x_t),\end{aligned}$$

w_t – n -мерный винеровский процесс. Коэффициенты сноса и диффузии очень часто полагают равными

$$b(x, \mu) = b_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} b_2(x, y)\mu(dy), \sigma(x_t, \mu_t) \equiv 1,$$

где b_1, b_2 — некоторые функции.

Уравнения Маккина-Власова

Теорема

Пусть $b(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функция, удовлетворяющая условиям

- 1 $|b(x, y)| \leq C(1 + |x|)$
- 2 $b(x, y)$ — непрерывна по y для любого x .

Тогда уравнение

$$dx_t = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) \mu_t(dy) + dw_t, x_t \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mu_t = \text{Law}(x_t)$$

имеет сильное решение.

Уравнения Маккина-Власова

Поясним, как можно получить эти уравнения, рассматривая N -частичную аппроксимацию. Рассмотрим систему из N слабо взаимодействующих частиц

$$x_t^{1,N}, x_t^{2,N}, \dots, x_t^{N,N}, x_t^{i,N} \in \mathbb{R}^n$$
$$dx_t^{i,N} = b_1(x_t^{i,N})dt + \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} b_2(x_t^{i,N}, x_t^{j,N})dt + dw_t^i,$$

где w_t^i — независимые n -мерные винеровские процессы.

Уравнения Маккина-Власова

Введем

$$\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_t^{i,N}} -$$

эмпирическое распределение системы. Тогда уравнения перепишутся в виде

$$dx_t^{i,N} = b_1(x_t^{i,N})dt + \frac{N}{N-1} \int_{\mathbb{R}^n} b_2(x_t^{i,N}, y) \mu_t^{i,N}(dy) + dw_t^{i,N}.$$

При $N \rightarrow \infty$ логично ожидать, что уравнения для $x_t^{1,N}$ перейдут в

$$dx_t = b_1(x_t)dt + \int_{\mathbb{R}^n} b_2(x_t, y) \mu_t(dy) + dw_t.$$

Уравнения Маккина-Власова

В работах Бенашура, Руанета, Тали и Валуа рассматривается одномерный случай уравнений Маккина-Власова с коэффициентами

$$b_1(x) = 0, b_2(x, y) = \beta(y - x).$$

Таким образом, уравнения принимают вид

$$dx_t = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y - x_t) \mu_t(dy) \cdot dt + dw_t.$$

При определенных условиях на b_1, b_2 доказываются теоремы существования и единственности процесса, а также изучаются его свойства.

Постановка задачи

Мы изучаем дискретный вариант этой задачи, а именно, рассмотрим случайное блуждание $x(t)$ на $\mathbb{Z}$ с непрерывным временем и интенсивностями перехода, зависящими от текущего распределения процесса $p(t) = \{p_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$n \rightarrow n + 1 : \quad \lambda_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(t) F(k - n)$$

$$n \rightarrow n - 1 : \quad \mu_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(t) F(n - k),$$

где $F(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторая функция.

Теорема существования

Первый вопрос состоит в том, при каких условиях указанный процесс существует. Заметим, что распределению $p(t)$ соответствует следующее нелинейное уравнение Колмогорова

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)H[p(t)],$$

где $H[\cdot]$ — соответствующая трехдиагональная матрица.

Замечание. Сложность состоит в том, что при неограниченной F $H[\cdot]$ — неограниченный оператор.

Теорема существования

Определение

Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. $B_1 \subset B_2$ (как линейные пространства). $G : B_1 \rightarrow B_2$ — произвольная функция. Система $\dot{x} = G(x)$ имеет (B_1, B_2) -решение на интервале (a, b) , если

- 1 $x(t)$ — B_1 -значная функция.
- 2 $\|x(t + \Delta t) - x(t) - G(x(t))\Delta t\|_2 \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Определение

B_β , $\beta > 0$ — семейство банаховых пространств, состоящих из последовательностей $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с конечной нормой

$$\|x\|_\beta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta^{|k|} |x_k|.$$

Теорема существования

Теорема

Пусть

$$F(n) \leq \text{const} \text{ при } n < 0$$

$$F(n) \leq \text{const} \cdot \alpha^n \text{ при } n \geq 0$$

тогда для любых $\beta_{in} > \alpha^3$ и $1 \leq \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1}$ система

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)H[p(t)]$$

имеет единственное $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$ -решение для любого $p(0) \in B_{\beta_{in}}$. Решение задается сильно непрерывной стохастической полугруппой $P_{s,t}$.

Теорема существования

Следствие

Для всех $p_0 \in B_{\beta_{in}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ существует и единственен Марковский процесс $x(t) = x(t, p_0) \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, такой, что его исходное распределение совпадает с p_0 , $p(t) \in B_{\beta_{out}}$, а интенсивности скачков удовлетворяют уравнениям

$$n \rightarrow n + 1 : \quad \lambda_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(t) F(k - n)$$

$$n \rightarrow n - 1 : \quad \mu_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(t) F(n - k)$$

Предложение

В условиях сформулированной теоремы математическое ожидание

$$E[p(t)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k p_k(t)$$

не меняется с течением времени.

Как следствие, процесс не может быть эргодическим (нет сходимости к единственной инвариантной мере).

Пример 1

Пусть $F(n) = e^n$, тогда

- ❶ Для любого $p(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > e^3$ $x(t)$ существует.
- ❷ Процесс имеет однопараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s) = \{\pi_k(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$, задаваемых выражением

$$\pi_k(s) = \frac{1}{\Xi(s)} e^{-(k-s)^2}, \quad \Xi(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k-s)^2}$$

- ❸ Для любого $r \in \mathbb{R}$ вдоль траектории движения убывает относительная энтропия

$$\frac{d}{dt} D(\mathbf{p}(t) \| \pi(r)) \leq 0, \quad D(p, q) = \sum_k p_k \ln \frac{p_k}{q_k}.$$

Пример 2

Пусть

$$\begin{aligned} F(n) &= 0 \text{ при } n < 0, \\ F(n) &< \text{const} \cdot \alpha^n \text{ при } n > 0. \end{aligned}$$

Тогда

- 1 Для любого $p(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > \alpha^3$ $x(t)$ существует.
- 2 Процесс имеет однопараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s) = \{\pi_k(s)\}$, задаваемых выражением

$$\pi_k(s) = \begin{cases} 1 - \{s\}, & k = [s] \\ \{s\}, & k = [s] + 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример 2 (продолжение)

Вдоль траектории движения выполнены следующие свойства:

- (Убывание дисперсии)

$$\frac{d}{dt} D[p(t)] \leq 0,$$

где $D[p(t)] = \sum_k k^2 p_k(t) - (\sum_k k p_k(t))^2$.

- Для любого $r \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \rho(p(t), \pi(r)) \leq 0,$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ — L^2 -расстояние Канторовича-Рубинштейна.

Сходимость процесса

Из рассмотренных примеров следует, что типичной для данной модели ситуацией является

- Наличие однопараметрического семейства инвариантных мер.
- Сходимость к одной из них в зависимости от начального распределения.

Сходимость процесса

Теорема

Предположим, что выполнены условия теоремы существования и единственности. Пусть кроме того, $F(n)$ — выпуклая неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$F(n) \leq \text{const} \cdot (1 + |n|), n \geq 0,$$

тогда $p(t)$ сходится к единственной неподвижной точке на множестве

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \cap \{p = \{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} k p_k = E[p(0)]\}.$$

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{x}^N = (x^{1,N}, x^{2,N}, \dots, x^{N,N}), \quad x^{n,N} \in \mathbb{Z}$$

$$e_n = \{\delta_{nk}\} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^{n,N}$$

Рассмотрим Марковскую цепь на $\mathbb{Z}^N$ с интенсивностями скачков

$$\mathbf{x}^N \rightarrow \mathbf{x}^N + e_n, \quad \lambda^{n,N} = \frac{1}{N} \sum_{k \neq n} F(x^{k,N} - x^{n,N}) + \gamma_+(\bar{\mathbf{x}}^N - E)$$

$$\mathbf{x}^N \rightarrow \mathbf{x}^N - e_n, \quad \mu^{n,N} = \frac{1}{N} \sum_{k \neq n} F(x^{n,N} - x^{k,N}) + \gamma_-(\bar{\mathbf{x}}^N - E)$$

Предположим дополнительно, что $x^{k,N}(0)$ — независимые p_0 -распределенные величины.

Сходимость процесса

Теорема

- ❶ Пусть $\gamma_+ = \gamma_- \equiv 0$, тогда для любых $T \geq 0$, $0 < \delta < 1$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \rho(\text{Law}(x(t)), \text{Law}(x^{1,N}(t))) < \text{const} \cdot N^{-\delta/2}$$

- ❷ Пусть $\gamma_+(x) = -xI_{\{x \leq 0\}}$, $\gamma_-(x) = xI_{\{x \geq 0\}}$, тогда для любого $0 < \delta < 1$

$$\sup_{t \geq 0} \rho(\text{Law}(x(t)), \text{Law}(x^{1,N}(t))) < \text{const} \cdot N^{-\delta/2}$$

(Здесь ρ — метрика Канторовича-Рубинштейна).

Нелинейные случайные блуждания с дифференциальной зависимостью

Рассмотрим случайное блуждание $x(t)$ на $\mathbb{Z}$ с непрерывным временем и интенсивностями скачков

$$n \rightarrow n + 1 : \quad \lambda_n = e^{-n+L}$$

$$n \rightarrow n - 1 : \quad \lambda_n = e^{n-M}.$$

Цепь является эргодической и обратимой с инвариантной мерой

$$\pi(n) = \frac{1}{\Xi(s)} e^{-(n-s)^2}, \quad s = \frac{L+M}{2}.$$

$\Xi(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2}$ — нормировочный фактор.

Теперь рассмотрим все то же случайное блуждание, но в предположении, что $L = L(t)$ и $M = M(t)$ — функции, зависящие от распределения процесса через дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \lambda_n(t) + C_\lambda, \\ \frac{dM}{dt} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \mu_n(t) - C_\mu.\end{aligned}$$

($C_\lambda, C_\mu, L(0) = L_0, M(0) = M_0$ — некоторые действительные константы).

Таким образом, $X(t) = (L(t), M(t), p_n(t), n \in \mathbb{Z})$ задается системой из $(2 + \infty)$ дифференциальных уравнений.

Определение

$B_{\alpha,c}^+$ — Банахово пространство, состоящее из вектор-функций $p = \{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|p\|_{\alpha,c}^+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^c |p_n|, \quad \alpha_n^c = \exp\left(\frac{cn^2}{2} + \alpha|n|\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Теорема

- ① При любых начальных условиях, т.ч. $p(0) \in B_{\alpha,1}^+$, решение соответствующей системы существует на полуинтервале $[0, \infty)$ и единственно в классе

$$B_{\alpha,1}^+ \times \mathcal{C}([0, \infty)) \times \mathcal{C}([0, \infty)).$$

Кроме того, если $p(0) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, то $p(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ для всех $t \geq 0$.

- ② Для всех $p(0) \in B_{\alpha,1}^+ \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ существует случайный процесс $x(t) = x(t, X(0))$ с конечномерными распределениями, задаваемыми формулой

$$\begin{aligned} P(x(t_1) = n_1, \dots, x(t_k) = n_k) = \\ = p_{n_1}(t_1) P_{X(0)}(n_2, t_2 | n_1, t_1) \dots P_{X(0)}(n_k, t_k | n_{k-1}, t_{k-1}). \end{aligned}$$

Теорема

- Если $C_\lambda \neq C_\mu$, то $x(t)$ не имеет инвариантных мер.
- Если $C_\lambda = C_\mu > 0$, то процесс имеет интеграл движения

$$K = K(X) = L + M + \sum_{n \in \mathbb{Z}} np_n.$$

Любая гиперплоскость, задаваемая постоянным значением $K(X)$, содержит ровно одну неподвижную точку.

Теорема (продолжение)

Множество неподвижных точек является
однопараметрическим семейством $\{(L_s, M_s, \pi_s(n))\}$,
зависящим от параметра $s \in \mathbb{R}$

$$\pi_s(n) = \frac{1}{\Xi(s)} e^{-(n-s)^2}, \quad \Xi(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2};$$

$$L_s = s + \ln C_\lambda + \ln \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2} e^{-n+s}}$$

$$M_s = s - \ln C_\lambda + \ln \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n-s)^2} e^{-n+s}}$$

Теорема (продолжение)

Для любых $0 < c < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $p(t)$ сходится по норме $\|\cdot\|_{\alpha,c}^+$ к единственной фиксированной точке на поверхности, определяемой значением $K(X(0))$.

-  Muzychka S., Vaninsky K., *"A class of nonlinear random walks related to the Ornstein-Uhlenbeck process."*, Markov Processes and Related Fields, vol. 17, num. 2, pp. 277-304, 2012.
-  Лыков А. А., Малышев В. А., Муzychка С. А., *"Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием"*, Теория вероятностей и её применения, т. 57, 4, 794-799, 2012 г.
-  Муzychка С. А., *"Среднее время до разрыва цепочки из $N = 2, 3, 4$ осцилляторов."*, Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, 2013 г.
-  Малышев В. А., Муzychка С. А., *"Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул"*, Теоретическая и математическая физика, т. 179, № 1, стр. 123-133, 2014 г.



Музычка С. А., *"Класс нелинейных Марковских процессов, допускающих явное описание"* деп. в ВИНТИ 21.01.2014, №25-В2014