

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАУССОВСКОГО ХАОСА: МЕТОД ЛАПЛАСА

Д. А. Коршунов

Институт математики им. С. Л. Соболева

В. И. Питербарг

МГУ им. М. В. Ломоносова

Э. Хашорва

Университет Лозанны

МГУ, 26 февраля 2014

Произведение координат нормального случайного вектора

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — центрированный нормальный вектор в $\mathbb{R}^d$

Рассмотрим простые оценки для хвоста распределения

$$\prod_{i=1}^d \xi_i$$

Всегда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^d \xi_i > x\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^d \{|\xi_i| > x^{1/d}\}\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{P}\{|\xi_i| > x^{1/d}\} \\ &= 2 \sum_{i=1}^d \mathbb{P}\{\xi_i > x^{1/d}\} \end{aligned}$$

Произведение координат нормального случайного вектора

Оценка снизу

$$\mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^d \xi_i > x\right\} \geq \mathbb{P}\{\xi_i > x^{1/d} \text{ для всех } i \leq d\}$$

Если координаты ξ_i независимы, то

$$\mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^d \xi_i > x\right\} \leq \mathbb{P}^d\{\xi_1 > x^{1/d}\}$$

Если $\xi_1 = \dots = \xi_d$, то

$$\mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^d \xi_i > x\right\} \leq \mathbb{P}\{\xi_1 > x^{1/d}\}$$

Произведение координат нормального случайного вектора

В обеих случаях

$$c_1 e^{-c_2 x^{2/d}} \leq \mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^d \xi_i > x\right\} \leq c_3 e^{-c_4 x^{2/d}}$$

Вопрос: как посчитать асимптотику вероятности при $x \rightarrow \infty$?

Гауссовский хаос

- ▶ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — центрированный гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с ковариационной матрицей B , $B_{ij} := \mathbb{E}\xi_i\xi_j$
- ▶ $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная однородная функция порядка $\alpha > 0$, т. е. $h(x\mathbf{t}) = x^\alpha h(\mathbf{t})$ для любых $x > 0$ и $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$
- ▶ $h(\xi)$ — гауссовский хаос порядка α

Случай однородного полинома g порядка α восходит к Винеру (1938)

Гауссовский хаос

- ▶ **Задача:** найти асимптотику вероятности $\mathbb{P}\{h(\xi) > x\}$ и плотности величины $h(\xi)$ на бесконечности
- ▶ Hanson & Wright (1971): верхняя оценка хвоста $h(\xi)$ в случае полинома h степени 2
- ▶ Borell (1978), Arcones & Giné (1993), Latała (1999, 2006): верхние и нижние оценки для полиномов h степени $\alpha \geq 2$
- ▶ Техника доказательств — оценки моментов случайной величины $h(\xi)$

Гауссовский хаос

- ▶ $\xi =_d \sqrt{B}\eta$ где случайный вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ имеет независимые $N(0, 1)$ координаты
- ▶ $x > 0$:

$$\mathbb{P}\{h(\xi) > x\} = \mathbb{P}\{h(\sqrt{B}\eta) > x\} = \mathbb{P}\{g(\eta) > x\},$$

где $g(\mathbf{u}) = h(\sqrt{B}\mathbf{u})$

- ▶ Непрерывная функция $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ тоже однородна порядка α
- ▶ Далее рассматриваем $g(\eta)$

Примеры

- ▶ $g(\boldsymbol{\eta}) = |\eta_1|^\alpha + \dots + |\eta_d|^\alpha$ порядка $\alpha > 0$
- ▶ Произведение независимых величин $\eta_1, \dots, \eta_d$
 $g(\boldsymbol{\eta}) = \eta_1 \dots \eta_d$; порядок $\alpha = d$
- ▶ Произведение координат гауссовского вектора
 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d) = \sqrt{B}\boldsymbol{\eta}$ с ковариационной матрицей B
- ▶ Квадратичная форма от независимых $N(0, 1)$ величин

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^d a_i \eta_i^2$$

- ▶ Скалярное произведение

$$g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*) = \sum_{i=1}^d a_i \eta_i \eta_i^*$$

Примеры

- ▶ Определитель случайной матрицы $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^n$ с независимыми $N(0, 1)$ элементами

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma_i},$$

где S_n — множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$

$g(A) := \det A$ — непрерывная однородная функция порядка $\alpha = n$.

- ▶ Гауссовский ортогональный ансамбль
 $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица
 A_{ij} независимы при $1 \leq i \leq j \leq n$
 $A_{ij} = \eta_{ij}$ при $j > i$
 $A_{ii} = \sqrt{2}\eta_{ii}$

Сведение к интегралу Лапласа



$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d: g(\mathbf{v}) > x\}} e^{-\|\mathbf{v}\|^2/2} d\mathbf{v}.$$

- ▶ Ввиду однородности функции g , область интегрирования имеет вид

$$\|\mathbf{v}\|^\alpha g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|) > x,$$

так что

$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| > \frac{x^{1/\alpha}}{g^{1/\alpha}(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|)}, g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|) > 0\}} e^{-\|\mathbf{v}\|^2/2} d\mathbf{v}.$$

Сведение к интегралу Лапласа

Замена переменных $\mathbf{v} = (r, \ell)$,
где $r = \|\mathbf{v}\| \geq 0$ и $\ell = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{S}_{d-1}$.

$$d\mathbf{v} = r^{d-1} J(1, \ell) d\ell dr$$

Положим $g(\ell) = g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{g(\eta) > x\} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{r > \frac{x^{1/\alpha}}{g^{1/\alpha}(\ell)}, g(\ell) > 0} r^{d-1} e^{-r^2/2} dr d\ell \\ &= \frac{1}{2\pi^{d/2}} \int_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1}: g(\ell) > 0} \left[\int_{\frac{x^{2/\alpha}}{2g^{2/\alpha}(\ell)}}^{\infty} s^{d/2-1} e^{-s} ds \right] d\ell, \end{aligned}$$

теорема Фубини и замена $s = r^2/2$

Сведение к интегралу Лапласа

Внутренний интеграл: неполная гамма-функция

$$\int_y^\infty s^\beta e^{-s} ds = y^\beta e^{-y} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta \cdots (\beta + 1 - k) y^{-k} + R_n(y) \right],$$

где $R_n(y) = O(y^{-n})$ при $y \rightarrow \infty$ для любого n

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x^{2/\alpha}}{2g^{2/\alpha}(\ell)}}^\infty s^{d/2-1} e^{-s} ds &= \frac{x^{\frac{d-2}{\alpha}}}{2^{d/2-1} g^{\frac{d-2}{\alpha}}(\ell)} e^{-x^{2/\alpha}/2g^{2/\alpha}(\ell)} \\ &\times \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (d/2 - 1) \cdots (d/2 - k) \left(\frac{x^{2/\alpha}}{2g^{2/\alpha}(\ell)} \right)^{-k} \right] \end{aligned}$$

Сведение к интегралу Лапласа

Итого:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} &= \frac{x^{\frac{d-2}{\alpha}}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{S}_{d-1}: g(\boldsymbol{\ell}) > 0} g^{\frac{2-d}{\alpha}}(\boldsymbol{\ell}) e^{-x^{2/\alpha}/2g^{2/\alpha}(\boldsymbol{\ell})} d\boldsymbol{\ell} \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (d/2 - 1) \cdots (d/2 - k) \left(\frac{x^{2/\alpha}}{2g^{2/\alpha}(\boldsymbol{\ell})} \right)^{-k} \right]\end{aligned}$$

Интегралы Лапласа

Параметризация на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1}$

Сведение к интегралу Лапласа

Сферические координаты $\ell(\varphi) = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{S}_{d-1}$,

$$\ell_1 = \cos \varphi_1$$

$$\ell_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$\dots$

$$\ell_{d-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \cos \varphi_{d-1}$$

$$\ell_d = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \sin \varphi_{d-1},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) \in \Pi_{d-1} := [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$

Якобиан

$$\det J(\varphi) := \sin^{d-2} \varphi_1 \sin^{d-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2}$$

Сведение к интегралу Лапласа

Эта замена переменных приводит к интегралам типа

$$\int_{\varphi \in \Pi_{d-1}: g(\varphi) > 0} a(\varphi) e^{-f(\varphi)x^{2/\alpha}} d\varphi.$$

Интеграл Лапласа

Итак, задача состоит в вычислении асимптотики при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграла Лебега

$$I_\lambda = \int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

- ▶ U — компакт в $\mathbb{R}^d$
- ▶ a — амплитуда
- ▶ f — фаза
- ▶ Предположения:

$$\min_{\mathbf{u} \in U} f(\mathbf{u}) = 0$$

и

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in U : f(\mathbf{u}) = 0\}$$

— m -мерное многообразие, $0 \leq m \leq d - 1$

- ▶ Обычно $m = 0$, т. е. $f(\mathbf{u})$ имеет изолированные точки минимума
- ▶ Иногда $m = d - 1$

О размерности многообразия $\mathcal{M}$

Для гауссовского хаоса m произвольно. Например:
Квадратичная форма от независимых $N(0, 1)$ величин

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^d a_i \eta_i^2$$

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{d-m} < a_{d-m+1} = \dots = a_d = 1.$$

Пусть $m \leq d - 1$

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d-m} a_i u_i^2 + \sum_{i=d-m+1}^d u_i^2$$

Максимум функции $g(\mathbf{u})$ при $\|\mathbf{u}\| = 1$ достигается в точках $\mathbf{u}$ где $u_{d-m+1}^2 + \dots + u_d^2 = 1$ и $u_1 = \dots = u_{d-m} = 0$

Многообразие $\mathcal{M}$ имеет размерность $m - 1$ и есть единичная сфера $\mathbb{S}_{m-1}$

Дифференциальные формы Гельфанда–Лере

Первый подход к вычислению

$$I_\lambda = \int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

Сначала интегрируем по множеству уровня $f(\mathbf{u}) = c$

Затем интегрируем по $c \geq 0$

Обычный интеграл Лапласа с дифференциальной формой

$$df(\mathbf{u}) \wedge \omega_f(\mathbf{u}) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$$

где $(d - 1)$ -мерная форма $\omega_f(\mathbf{u})$ называется
дифференциальной формой Гельфанда–Лере

Дифференциальные формы Гельфанда–Лере

Если градиент $\nabla f(\mathbf{u}_0)$ не равен нулю, то форма $\omega_f(\mathbf{u})$ существует в окрестности $\mathbf{u}_0$;
ограничение этой формы на многообразие $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = c\}$ уровня функции определено однозначно

$$\omega_f(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{u})|^2} \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_j} \wedge \cdots \wedge du_d,$$

где $\widehat{du_j}$ означает отсутствие этого множителя.

Следовательно,

$$\int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \int_0^\infty e^{-\lambda c} \left(\int_{f(\mathbf{u})=c} a(\mathbf{u}) \omega_f(\mathbf{u}) \right) dc.$$

Дифференциальные формы Гельфанда–Лере

Проблема сводится к изучению поведения в нуле интеграла

$$F(c) = \int_{f(\mathbf{u})=c} a(\mathbf{u}) \omega_f(\mathbf{u}).$$

Основная проблема — получить разложение вида

$$F(c) = F_0 c^{\rho_0} + F_1 c^{\rho_1} + \dots \quad \text{при } c \downarrow 0,$$

особенно в случае произвольной размерности m многообразия $\mathcal{M}$.

Интеграл по c :

$$I_\lambda = F_0 \Gamma(\rho_0 + 1) \lambda^{-\rho_0 - 1} + F_1 \Gamma(\rho_1 + 1) \lambda^{-\rho_1 - 1} + \dots.$$

Combet (1982), $m = 0$

Метод Лапласа

Другой метод.

$$I_\lambda = \int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

- ▶ Прямое интегрирование по многообразию $\mathcal{M}$ и использование классической теоремы Лапласа для одноточечного минимума.
- ▶ Сначала уточним классический метод Лапласа в случае простого минимума, $m = 0$.
- ▶ Пусть $f \in C^2(U)$
- ▶ $f''(\mathbf{u}) := [f''_{ij}, i, j = 1, \dots, d]$ — Гессиан фазы f в точке $\mathbf{u}$

Метод Лапласа

Теорема

Пусть $\mathbf{u}_0$ — единственная внутренняя в U точка минимума функции $f(\mathbf{u}) \geq 0$ и

$$f(\mathbf{u}_0) = 0, \quad \inf_{\mathbf{u}: \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Предположим невырожденность минимума, т. е.

$$\det f''(\mathbf{u}_0) > 0.$$

Если $a \in C^{2r}(U)$ и $f \in C^{2r+2}(U)$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}^+$, то

$$\int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \lambda^{-d/2} \left[c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right] \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

где

$$c_0 = a(\mathbf{u}_0) \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det f''(\mathbf{u}_0)}}.$$

Метод Лапласа

- ▶ Требуется много производных — это необходимо
- ▶ Bender & Orszag (1999), два члена разложения, $r = 1$, $d = 1$
- ▶ Федорюк (1977)
- ▶ Асимптотические разложения, $r = \infty$, Combet (1982)
- ▶ Wong (1989)
- ▶ Граничная точка $\mathbf{u}_0$ и конечное r , Bleistein & Handelsman (1975)
- ▶ Fulks & Sather (1961)

Метод Лапласа

- Обобщение на параметрический случай

$$I_{\lambda, \theta} = \int_U a(\mathbf{u}, \theta) e^{\lambda f(\mathbf{u}, \theta)} d\mathbf{u},$$

где $\theta \in \Theta$ — параметр

- $f \in C^2(U)$ для любого $\theta \in \Theta$

Метод Лапласа

Теорема

Пусть $f(\mathbf{u}, \theta) \geq 0$ имеет единственный внутренний минимум в U , $\mathbf{u}_0(\theta)$,

$$f(\mathbf{u}_0(\theta), \theta) = 0, \quad \inf_{\theta \in \Theta, \mathbf{u}: \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0(\theta)\| \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}, \theta) > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Пусть $\det f''(\mathbf{u}_0(\theta), \theta) > 0$ для любого $\theta \in \Theta$.

Пусть, для некоторого $r \in \mathbb{Z}^+$, $a \in C^{2r}(U)$ и $f \in C^{2r+2}(U)$ по $\mathbf{u} \in U$ для любого $\theta \in \Theta$. Если все частные производные $a(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r$ и $f(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r + 2$ равномерно непрерывны по $\theta \in \Theta$, то

$$\int_U a(\mathbf{u}, \theta) e^{-\lambda f(\mathbf{u}, \theta)} d\mathbf{u} = \lambda^{-d/2} \left[c_0(\theta) + \sum_{i=1}^r c_i(\theta) \lambda^{-i} + \psi(\lambda, \theta) \right],$$

где $\psi(\lambda, \theta) \lambda^r \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in \Theta$.

Метод Лапласа

- ▶ $\mathcal{M}$ — множество точек минимума фазы $f(\mathbf{u})$
- ▶ m -мерное многообразие без границы, $1 \leq m \leq d - 1$, конечный объём
- ▶ Пусть точки $\mathcal{M}$ — точки невырожденного минимума, т. е. для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ ранг матрицы $f''(\mathbf{v})$ равен $d - m$.
- ▶ $\det f''_{d-m}(\mathbf{v})$ — ненулевой $(d - m)$ -минор матрицы $f''(\mathbf{v})$
- ▶ Фиксируем $k \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Пусть многообразие $\mathcal{M}$ является C^{2r+2} -гладким

Метод Лапласа

Теорема

Пусть для любого $\varepsilon > 0$

$$\inf_{\mathbf{u} \in U: \rho(\mathbf{u}, \mathcal{M}) \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}) > 0.$$

Пусть

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}} \det f''_{d-m}(\mathbf{v}) > 0.$$

Если $a(\mathbf{u}) \in C^{2r}$ и $f(\mathbf{u}) \in C^{2r+2}$, то

$$I_\lambda = \lambda^{-\frac{d-m}{2}} \left(c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

где

$$c_0 := (2\pi)^{\frac{d-m}{2}} \int_{\mathcal{M}} \frac{a(\mathbf{v})}{\sqrt{\det f''_{d-m}(\mathbf{v})}} dV.$$

Обобщение: вейбулловский хаос

- ▶ $d \geq 2$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d)$
- ▶ $\beta_a > -d$ и $\beta > 0$
- ▶ плотность

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}) = a\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\beta}}\right) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta_a} e^{-f\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\beta}}\right) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d,$$

- ▶ a и f — неотрицательные функции на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1, \beta}$ в L_{β}

Обобщение: вейбулловский хаос

Теорема

Пусть $a \in C^{2r}$ и $g, f \in C^{2r+2}$ для некоторого $r \geq 0$.

Тогда

$$\mathbb{P}\{g(\eta) > x\} \sim h_0 x^{\frac{2d+2\beta_a-(d+1)\beta}{2\alpha}} e^{-\hat{f}_0 x^{\beta/\alpha}}$$

при $x \rightarrow \infty$ и

$$\hat{f}_0 := \min_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}} \frac{f(\ell)}{g^{\beta/\alpha}(\ell)}$$

-  Arnold, V. I. Varchenko, A. N., and Gusein-Zade, S. M. (1987) *Singularities of Differentiable Maps*. Vol. 2: Monodromy and asymptotic integrals (Monographs in Mathematics), Birkhäuser.
-  Barbe, Ph. (2003) *Approximation of Integrals over Asymptotic Sets with Applications to Probability and Statistics*. arXiv:math/0312132.
-  Bender, C. M., and Orszag, S. A. (1999) *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Reprint of the 1978 original. Springer-Verlag, New York.
-  Bleistein, N., and Handelsman, R. A. (1975) *Asymptotic Expansions of Integrals*. Holt, Rinehart and Winston, New York.
-  Breitung, K. W. (1994) *Asymptotic Approximations for Probability Integrals*. Lecture Notes in Mathematics, 1592, Springer-Verlag, Berlin.

-  Combet, E. (1982) *Intégrales Exponentielles. Développements Asymptotiques, Propriétés Lagrangiennes*. Lecture Notes in Mathematics, 937. Springer-Verlag, Berlin-New York.
-  Fedoryuk, M. V. (1977) *Saddle Point Method*. Moscow, Nauka (in Russian).
-  Fedoryuk, M. V. (1987) *Asymptotics: Integrals and Series*. Nauka, Moscow (in Russian).
-  Fulks, W., and Sather, J. O. (1961) Asymptotics II: Laplace's method for multiple integrals. *Pacific J. Math.* **11**, 185-192.
-  Hashorva, E., Korshunov, D., and Piterbarg, V. I. (2013) Extremal behaviour of Gaussian chaos. *Submitted*, –.
-  Korshunov, D. A., Piterbarg, V. I., and Hashorva, E. (2013) On extremal behaviour of Gaussian chaos. *Doklady Mathematics* **452**, 483–485.
-  López, J. L., Pagola, P., and Sinusía, E. P. (2009) A simplification of Laplace's method: Applications to the

Gamma function and Gauss hypergeometric function. *J. Approx. Theory* **161**, 280–291.



Richter, W. D. (2007) Generalized spherical and simplicial coordinates. *J. Math. Anal. Appl.* **336**, 1187–1202.



Trofimov, O. E. and Friezen, D. G. (1981) Coefficients of asymptotic decompositions of integrals by Laplace method. *Avtometriya* **2**, 94 (in Russian).



Wojdylo, J. (2006) Computing the coefficients in Laplace's method. *SIAM Rev.* **48**, 76–96.



Wiener, N. (1938) The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.* **60**, 897–936.



Wong, R. (1989) *Asymptotic Approximations of Integrals*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, MA.