Анализ модели транспортных потоков на автостраде. Управление состоянием автострады с помощью выделенных полос

Е. Г. Дорогуш
научный руководитель — академик А. Б. Куржанский

МГУ имени М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики

29 марта 2014 г.
Независимый Московский университет

Часть I

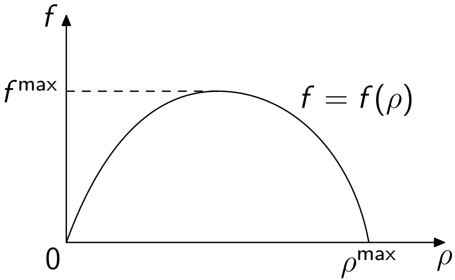
Макроскопические модели транспортных потоков

Гидродинамическая модель

ρ — плотность, f — поток

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

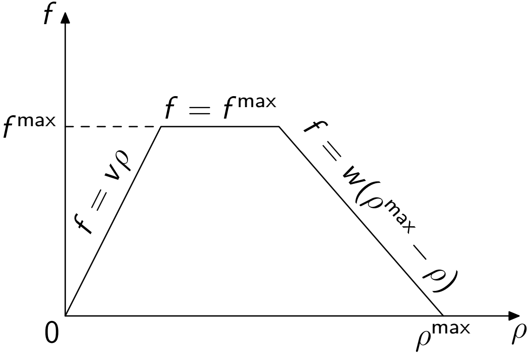
Фундаментальная диаграмма



Lighthill M. J., Whitham G. B. On Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 229, no. 1178. Pp. 281–345 ; Richards P. I. Shock waves on the highway. // Operations Research. 1956. Vol. 4, no. 1. Pp. 42–51

Трапециевидная фундаментальная диаграмма

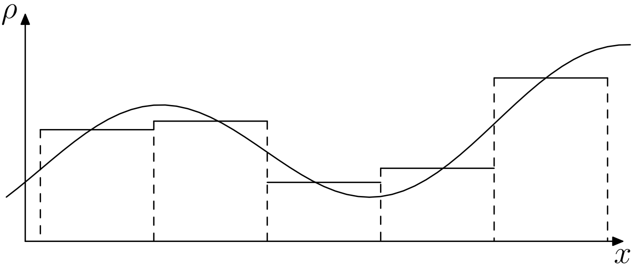
$$f(\rho) = \min\{v\rho, f^{\max}, w(\rho^{\max} - \rho)\}$$



v — скорость свободного движения
$f^{\max}$ — пропускная способность
$\rho^{\max}$ — максимальная плотность
w — скорость распространения затора

Численный метод С. К. Годунова

Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271—306



Дискретизация гидродинамической модели

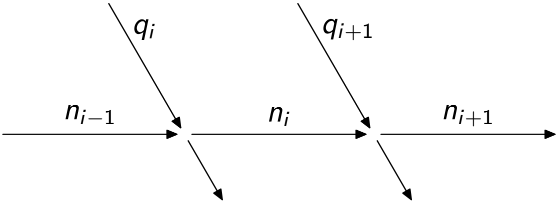
$$\rho_i(t+1) = \rho_i(t) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i-1}(t) - f_i(t)),$$

$f_i(t) = f(\rho_i(t), \rho_{i+1}(t))$ — поток из i-й в $(i+1)$-ю ячейку:

$$f_i(t) = \min\{v\rho_i(t), f^{\max}, w(\rho^{\max} - \rho_{i+1}(t))\}.$$

Daganzo C. F. The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. // Transp. Res.-B. 1994. Vol. 28, no. 4. Pp. 269–287

Модель автомагистрали

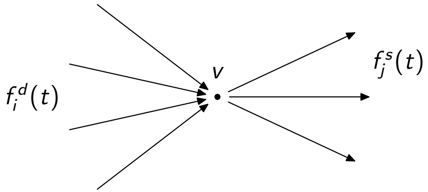


$$
\begin{aligned}
&n_i(t+1) = n_i(t) + f_{i-1}(t) + r_i(t) - f_i(t) - s_i(t),\\
&q_i(t+1) = q_i(t) + d_i(t) - r_i(t).
\end{aligned}
$$

Модель узла

Daganzo C. F. The cell transmission model, part II: Network traffic. // Transp. Res.-B. 1995. Vol. 29, no. 2. Pp. 79–93

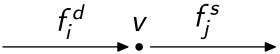
A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows. / C. M. Tampère [et al.] // Transp. Res.-B. 2011. Vol. 45, no. 1. Pp. 289–309



Матрица коэффициентов расщепления $B_v(t) = \{\beta_{ij}(t)\}_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n}$: $\beta_{ij}(t) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t) = 1$. $f_{ij_1}(t)/\beta_{ij_1}(t) = f_{ij_2}(t)/\beta_{ij_2}(t)$.
Коэффициенты приоритета для входящих ребер $p_i(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

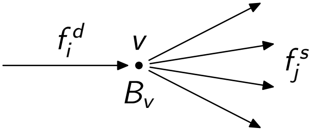
Модель узла. Примеры

Простое соединение



$$f_{ij}(t) = \min\{f_i^d(t), f_j^s(t)\} =$$
$$= \min\{v_i n_i(t), F_i, F_j, w_j(N_j - n_j(t))\}$$

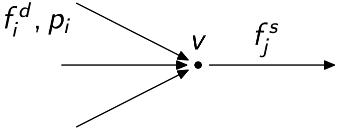
Разветвление



$f_{ij}(t) = \beta_{ij}(t) f_i(t)$, где

$$f_i(t) = \min\left\{ f_i^d(t), \min_{j:\ \beta_{ij}(t)>0} \frac{f_j^s(t)}{\beta_{ij}(t)} \right\}$$

Слияние дорог

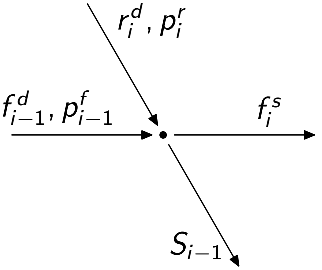


Если $\sum_{i=1}^m f_i^d(t) \leq f_j^s(t)$, то $f_{ij}(t) = f_i^d(t)$.
Иначе решаем относительно a уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{f_i^d(t), a p_i(t)\} = f_j^s(t).$$

При этом $f_{ij}(t) = \min\{f_i^d(t), a^* p_i(t)\}$.

Модель узла автомагистрали



$$f_i(t)/s_i(t) = \beta_i^f/\beta_i^s,$$

$$f_i^d(t) = \beta_i^f \min\{v_i n_i(t), F_i, S_i/\beta_i^s\},$$
$$f_i^s(t) = \min\{w_i(N_i - n_i(t)), F_i\},$$
$$r_i^d(t) = \min\{v_i^r q_i(t), R_i\}.$$

$$p_i^r, p_{i-1}^f \geq 0,\ p_i^r + p_{i-1}^f = 1.$$

- Если $f_{i-1}^d(t) + r_i^d(t) \leq f_i^s(t)$, то $f_{i-1}(t) = f_{i-1}^d(t)$, $r_i(t) = r_i^d(t)$.
- Если $f_{i-1}^d(t) \leq p_{i-1}^f f_i^s(t)$, то $f_{i-1}(t) = f_{i-1}^d(t)$, $r_i(t) = f_i^s(t) - f_{i-1}^d(t)$.
- Если $r_i^d(t) \leq p_i^r f_i^s(t)$, то $r_i(t) = r_i^d(t)$, $f_{i-1}(t) = f_i^s(t) - r_i^d(t)$.
- Иначе $f_{i-1}(t) = p_{i-1}^f f_i^s(t)$, $r_i(t) = p_i^r f_i^s(t)$.

Часть II

Пропускная способность и уровень загруженности автострады

Пропускная способность автомагистрали

Задача минимизации общего времени движения

$$T(\tau,\vartheta)=\sum_{t=\tau}^{\vartheta}\sum_{i=1}^{K}q_i(t)+\sum_{t=\tau}^{\vartheta}\sum_{i=0}^{K+1}n_i(t)\to\min$$

Задача о пропускной способности

$$\begin{cases} 0\le f_i\le F_i, & i=1,\dots,K,\\ 0\le f_i/\beta_i^f-f_{i-1}\le\bar r_i, & i=1,\dots,K,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{K}\frac{\beta_i^s}{\beta_i^f}f_i\to\max\,. \end{cases}$$

$\bar r_i=\min\{d_i,R_i\}$,
F_i, R_i — пропускные способности,
β_i^f, β_i^s — коэффициенты расщепления.

Определение

Пропускная способность автомагистрали — значение максимизируемого выражения на решении.

Решение задачи о пропускной способности

Незамкнутая автострада: два прохода

1. Максимальные потоки — по ходу движения

$$\bar{f}_i = \beta_i^f \min\{\bar{f}_{i-1} + \bar{r}_i, F_i, S_i/\beta_i^s\}, \qquad i = 1, \dots, K+1.$$

2. Равновесные потоки — против хода движения: $f_{K+1}^* = \bar{f}_K$,

$$f_{i-1}^* = \min\{f_i^*/\beta_i^f, \bar{f}_{i-1}\}, \qquad i = K+1, \dots, 2.$$

Незамкнутая автострада: нелинейное уравнение

Рассматривается функция $\bar{f}_K(f_K)$, где $\bar{f}_0(f_K) = f_K$,

$$\bar{f}_i(f_K) = \beta_i^f \min\{\bar{f}_{i-1}(f_K) + \bar{r}_i, F_i, S_i/\beta_i^s\}, \qquad i = 1, \dots, K.$$

Задача сводится к решению уравнения $\bar{f}_K(f_K) = f_K$ относительно f_K на отрезке $[0, F_K]$.

Контролируемый уровень концентраций

Управление в виде ограничения на поток со въезда:

$$r_i^d(t) = \min\{v_i^r q_i(t), R_i, u_i(t)\}.$$

Определение

Вектор n^* называется *контролируемым уровнем концентраций*, если для $n(t) \leq n^*$ при некотором значении $u(t)$ выполнено также неравенство $n(t+1) \leq n^*$.

Решению задачи о пропускной способности f^* соответствует контролируемый уровень концентраций n^*.

Уровень загруженности автомагистрали

Пусть n^* — контролируемый уровень концентраций.

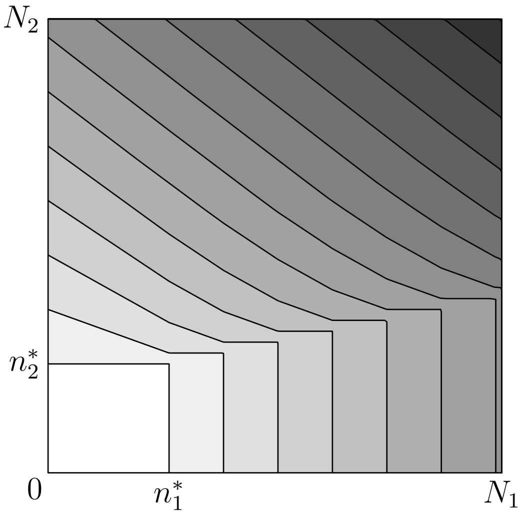
Определение

Уровень загруженности — число шагов, за которое можно перевести систему во множество $\mathcal{N}^* = \{n\colon 0 \le n \le n^*\}$:

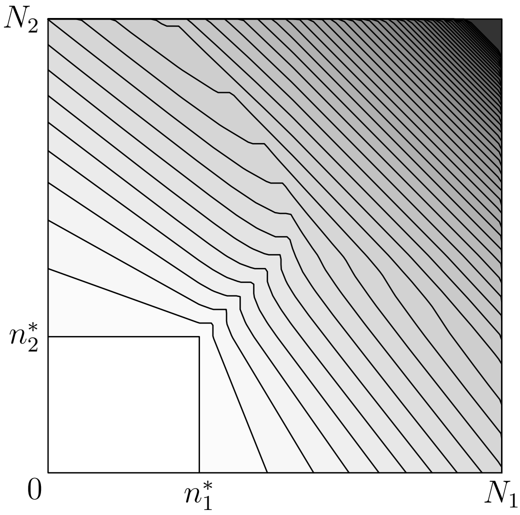
$$c(t) = c(n(t)) = \min_{u(\cdot)} \min\{\Delta t \ge 0\colon n(t + \Delta t) \le n^*\}.$$

- Число уровней загруженности в модели *незамкнутой* автомагистрали конечно.
- Число уровней загруженности в модели *кольцевой* автомагистрали бесконечно.

Уровни загруженности незамкнутой автомагистрали



Уровни загруженности кольцевой автомагистрали



Часть III

Равновесные состояния в модели автомагистрали

Определение равновесия и допустимый входной поток

Входной поток d постоянный.

Определение равновесия

Постоянны: n, f, r, s.
Длины очередей q постоянны или растут с постоянной скоростью.

Определим

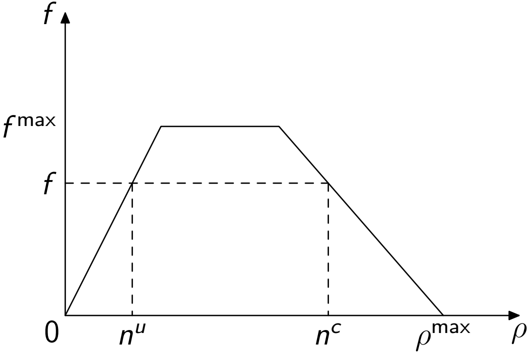
$$\bar{r}_i = \min\{d_i, R_i\},$$

R_i — пропускная способность въезда.
При фиксированном r потоки между ячейками f определяются однозначно из уравнений

$$f_{i-1} + r_i = f_i / \beta_i^f.$$

- Если $f(\bar{r}) \leq F$, то входной поток d — *допустимый*.
- Иначе входной поток d — *недопустимый*.

Свойства множества равновесий



$$n_i^u(f) = \frac{f_i}{\beta_i^f v_i}, \qquad n_i^c(f) = N_i - \frac{f_i}{w_i}.$$

Для фиксированного равновесного потока между ячейками f

$$n^u(f) \leq n \leq n^c(f)$$

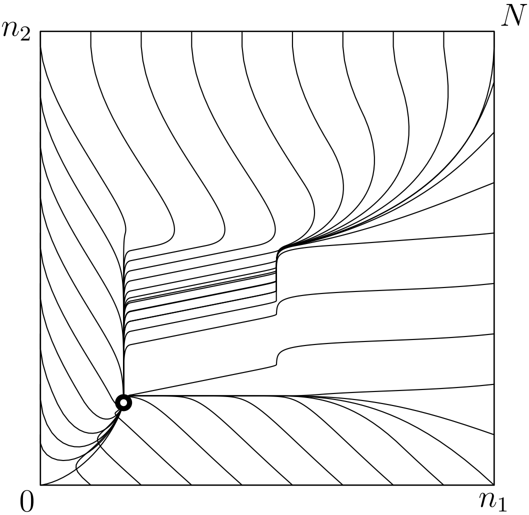
для всех равновесных n.

Множество положений равновесия в модели незамкнутой автомагистрали

- Равновесные потоки r, f определяются однозначно.
  Для допустимого входного потока d равновесные потоки $r = \bar{r}$, $f = f(\bar{r})$.
- Множество равновесных векторов n зависит от значений равновесных потоков f, r и коэффициентов приоритета p.

Kurzhanskiy A. A. Modeling and Software Tools for Freeway Operational Planning: Ph.D. thesis / Kurzhanskiy Alex A. EECS Department, University of California, Berkeley, 2007

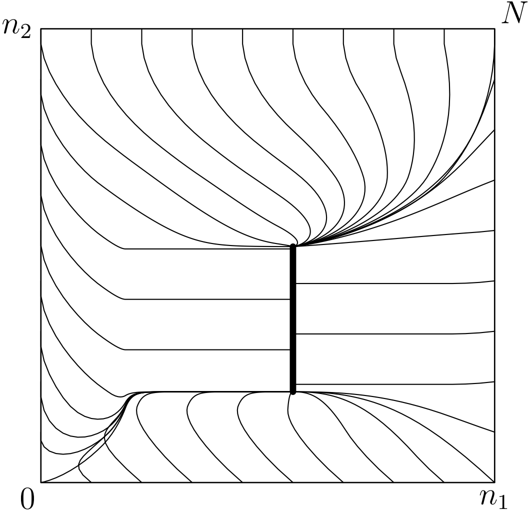
Строго допустимый входной поток.



$n = n^u$

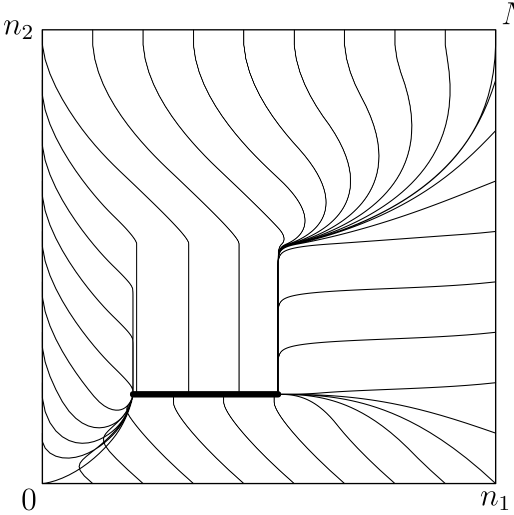
Примеры. Незамкнутая автомагистраль

Недопустимый входной поток. $f_1 < \bar{f}_1 = F_1^d$, $f_2 = \bar{f}_2 = F_2^d$



Примеры. Незамкнутая автомагистраль

Недопустимый входной поток. $f_1 = \bar{f}_1 = F_1^d$, $f_2 = \bar{f}_2 < F_2^d$



Положения равновесия в модели кольцевой автомагистрали

- Существует наибольшее равновесное значение потока между ячейками f, только ему может соответствовать более одного равновесного значения n.
- Всем остальным значениям равновесных потоков в пространстве n соответствует единственная точка, $n = n^c(f, r)$.
- Точка $f = 0$, $n = N$ всегда является равновесием.

Устойчивость равновесий

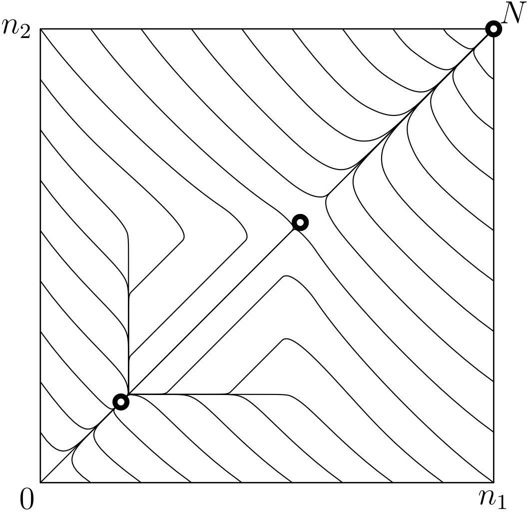
- В модели незамкнутой автострады все равновесия устойчивы.
- В модели кольцевой автострады задача об устойчивости равновесия сводится к задаче об устойчивости нулевого равновесия двух линейных систем.
- В модели кольцевой автострады неустойчивыми могут быть только равновесия, соответствующие загруженной автостраде, то есть, $n_i^e \geq N_i - F_i/w_i$.
- В частности, устойчивость равновесия $r = 0$, $f = 0$, $n = N$ зависит от величины

$$\gamma = \prod_{i=1}^{K} \frac{1}{\beta_i^f} \times \prod_{i:\ \bar{r}_i > 0} p_{i-1}^f.$$

Если $\gamma < 1$, то равновесие устойчиво,
если $\gamma > 1$ — неустойчиво.

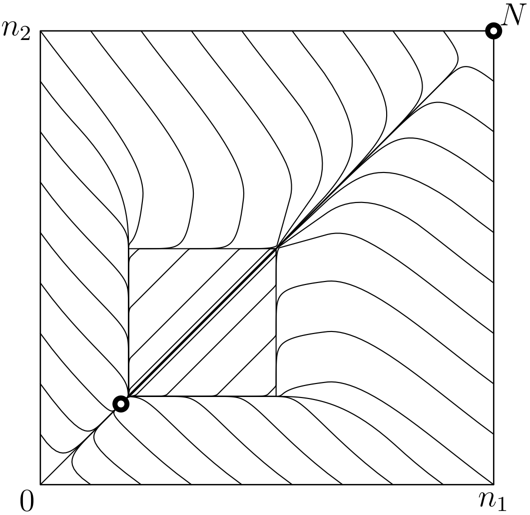
Примеры. Кольцевая автомагистраль

Строго допустимый входной поток, $\gamma < 1$



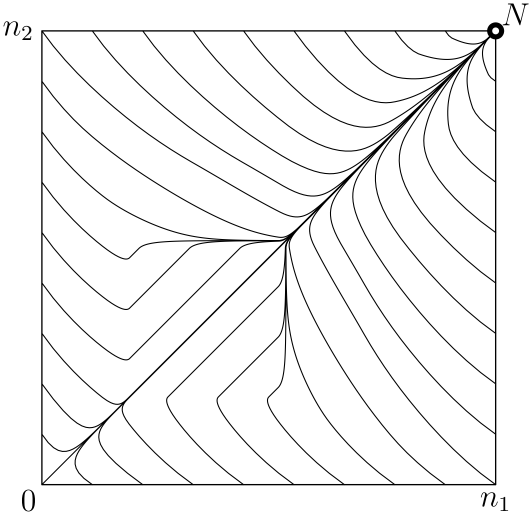
Примеры. Кольцевая автомагистраль

Строго допустимый входной поток, $\gamma > 1$



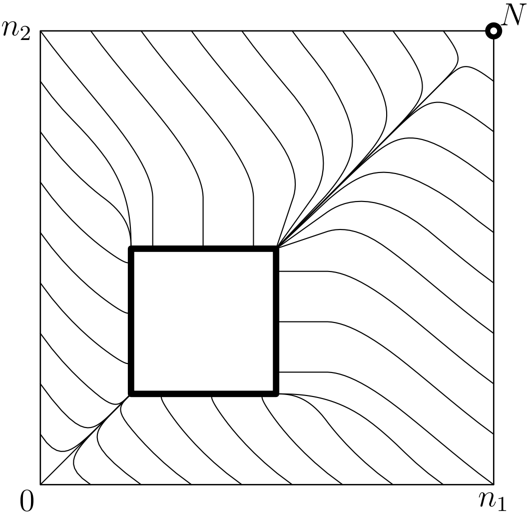
Примеры. Кольцевая автомагистраль

Недопустимый входной поток, $\gamma < 1$



Примеры. Кольцевая автомагистраль

Недопустимый входной поток, $\gamma > 1$



Часть IV

Управление состоянием автомагистрали при помощи выделенных полос

Прямое и косвенное управление состоянием транспортной сети

Прямые способы

- управление светофорами на перекрестках
- перекрытие дорог
- реверсивные полосы

Косвенные способы

- информация о текущей транспортной ситуации
- рекомендации о наилучших маршрутах

Платные дороги и платные полосы — промежуточный способ управления состоянием транспортной сети.

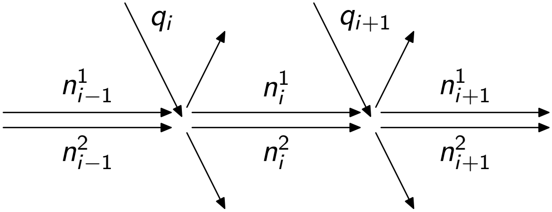
Стоимость проезда и цена времени

- Цена времени у разных участников дорожного движения может отличаться.
- За въезд в выделенные полосы автомагистрали может взиматься плата.
- Стоимость въезда в выделенные полосы может быть разной для разных категорий транспортных средств (например, бесплатный въезд для общественного транспорта, снижение стоимости въезда для автомобилей с несколькими пассажирами).
- Выбор платных или бесплатных полос возможен только в момент въезда на автомагистраль.

Модель автомагистрали с выделенными полосами

n_i — число автомобилей в i-й ячейке

q_i — число автомобилей в очереди перед въездом в i-ю ячейку



$$n_i^\xi(t+1) = n_i^\xi(t) + f_{i-1}^\xi(t) + r_i^\xi(t) - f_i^\xi(t) - s_i^\xi(t), \quad \xi = 1, 2,$$
$$q_i(t+1) = q_i(t) + d_i(t) - r_i(t).$$

f_i^ξ — поток из i-й в $(i+1)$-ю ячейку платных $(\xi = 1)$ или бесплатных $(\xi = 2)$ полос

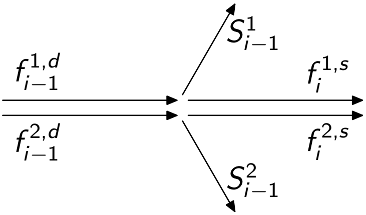
s_i^ξ — выходной поток из i-й ячейки

r_i — поток со въезда в i-ю ячейку

d_i — входной поток для i-го въезда

Модель узла автомагистрали с выделенными полосами

Узел без въезда



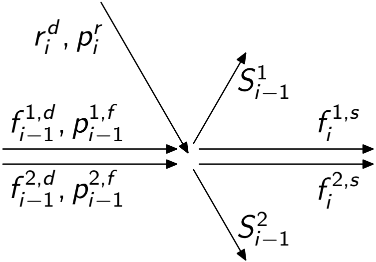
$$f_i^{\xi,d}(t) = \beta_i^f \min\{v_i n_i(t), F_i^\xi\},$$
$$f_i^{\xi,s}(t) = \min\{w_i(N_i^\xi - n_i(t)), F_i^\xi\}.$$

Потоки $f_{i-1}^1(t)$ и $f_{i-1}^2(t)$ определяются независимо:

$$f_{i-1}^\xi(t) = \min\{f_{i-1}^{\xi,d}(t), f_i^{\xi,s}(t)\},$$
$$s_{i-1}^\xi(t) = f_{i-1}^\xi(t)\beta_{i-1}^s/\beta_{i-1}^f.$$

Модель узла автомагистрали с выделенными полосами

Узел со въездом



$$f_i^{\xi,d}(t) = \beta_i^f \min\{v_i n_i(t), F_i^\xi\},$$

$$f_i^{\xi,s}(t) = \min\{w_i(N_i^\xi - n_i(t)), F_i^\xi\},$$

$$r_i^d(t) = \min\{v_i^r q_i(t), R_i\}.$$

$\alpha_i^1(t),\ \alpha_i^2(t)$ — коэффициенты расщепления потока со въезда r_i: $r_i^1(t)/r_i^2(t) = \alpha_i^1(t)/\alpha_i^2(t)$

$$\psi_i^\xi = \min\left\{\max\left\{f_i^{\xi,s}\frac{\alpha_i^\xi p_i^r}{\alpha_i^\xi p_i^r + p_{i-1}^{\xi,f}}, f_i^{\xi,s} - f_{i-1}^{\xi,d}\right\}, \alpha_i^\xi r_i^d\right\},$$

$$\lambda_i^\xi = \psi_i^\xi/(\alpha_i^\xi r_i^d), \qquad \lambda_i = \min\{\lambda_i^1, \lambda_i^2\},$$

$$r_i^\xi(t) = \lambda_i(t)\alpha_i^\xi(t) r_i^d(t),$$

$$f_{i-1}^\xi(t) = \min\{f_{i-1}^{\xi,d}(t), f_i^{\xi,s}(t) - r_i^\xi(t)\},$$

$$s_{i-1}^\xi(t) = f_{i-1}^\xi(t)\beta_{i-1}^s/\beta_{i-1}^f.$$

Построение управления

Цель управления

Поддерживать выделенные полосы в состоянии свободного движения

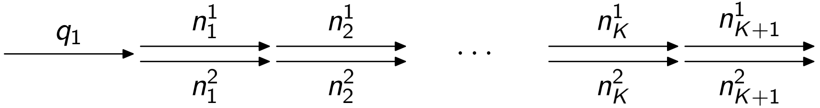
Доступная информация

- Известно текущее состояние системы: $n(t)$, $q(t)$.
- Нет информации о будущем:
  не известны значения $d(t + \Delta t)$, $\Delta t = 0, 1, 2, \ldots$.

Принципы построения управления

- На каждом шаге *минимизируется скорость роста очереди* перед каждым въездом или *максимизируется суммарный входящий поток* для основных ячеек.
- Алгоритм ориентируется на *суммарное* число автомобилей между соседними въездами.
- Если некоторый участок автомагистрали оказался перегружен, он разгружается за счет перераспределения потоков со въездов *выше по течению*.

Примеры



Автомагистраль с одним въездом и одним выездом

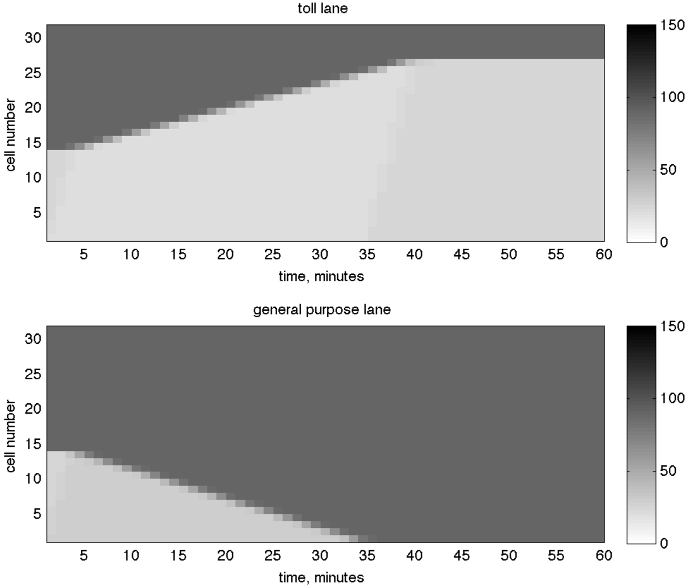
В последней ячейке сужение:

$$F_1^\xi = F_2^\xi = \cdots = F_K^\xi > F_{K+1}^\xi, \qquad \xi = 1, 2.$$

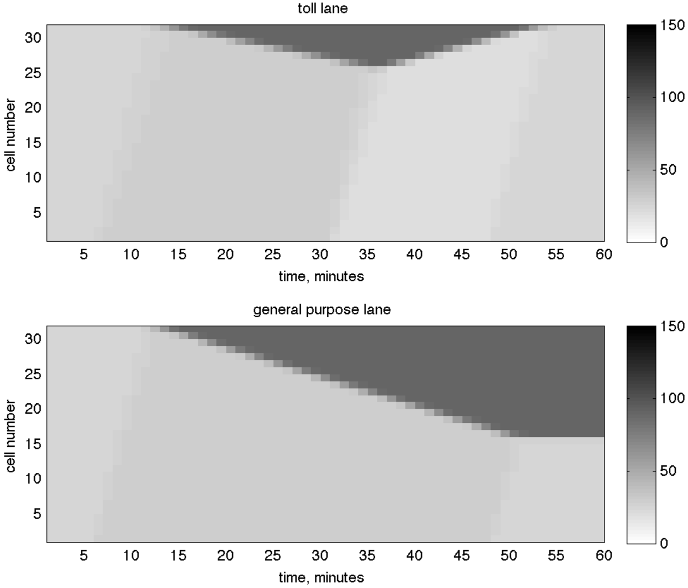
Сценарии

1. Разгрузка платных полос.
2. Временно избыточный входной поток.

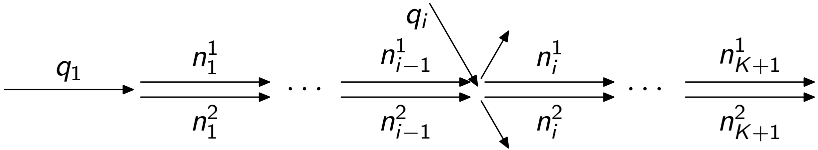
Разгрузка платных полос



Временно избыточных входной поток



Примеры



Автомагистраль с двумя въездами

В конце сужение:

$$F_1^\xi = F_2^\xi = \cdots = F_K^\xi > F_{K+1}^\xi, \qquad \xi = 1, 2.$$

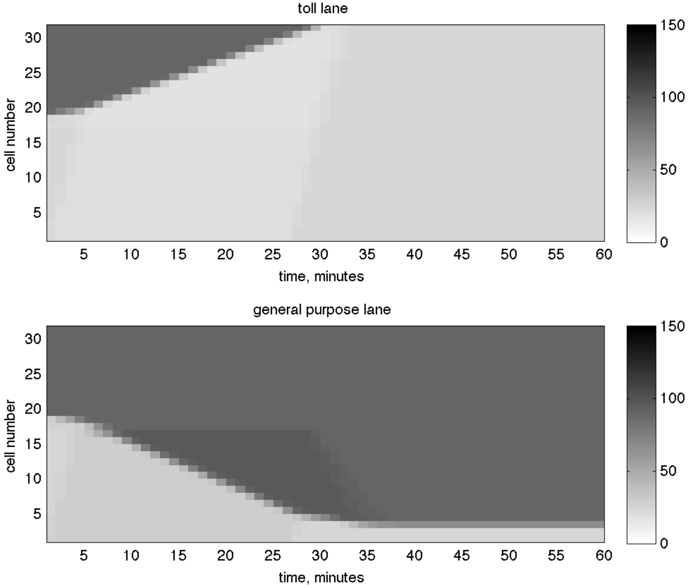
Въезды перед первой ячейкой и в середине автострады.

Сценарий

Разгрузка платных полос.

Потоки со въездов r перераспределяются на обоих въездах.

Разгрузка платных полос автомагистрали с 2 въездами



Основные результаты

1. Предложены и исследованы понятия пропускной способности и уровня загруженности автомагистрали.
2. Изучены множества равновесий дискретной динамической системы, описывающей изменение состояния автомагистрали.
3. Исследована устойчивость всех равновесий.
4. Предложен алгоритм управления состоянием автомагистрали с помощью выделенных полос.