

$X_1, X_2, \dots$ — н. о. р. с. в. с нулевым средним, единичной дисперсией, $\beta_3 < \infty$, ф. р. $F(x)$,

$F_n(x)$ — ф. р. $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, $\Phi(x)$ — станд. норм. ф. р., $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Ф. р. $F(x)$ наз. решетчатой, если $\text{supp} F \subset D = \{a + kh : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, в этом случае $\text{supp} F_n \subset D_n = \{a_n + kh/\sqrt{n} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $a_n = a\sqrt{n}$, $\bar{D}_n = D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}$.

Для любого распределения Бернулли с нулевым средним и единичной дисперсией

$$D = \left\{ -\frac{p}{\sqrt{pq}}, \frac{q}{\sqrt{pq}} \right\}, \mathbf{P}\left(\left\{ -\frac{p}{\sqrt{pq}} \right\}\right) = q, \mathbf{P}\left(\left\{ \frac{q}{\sqrt{pq}} \right\}\right) = p, q = 1 - p, 0 < p < 1.$$

Распределение Бернулли с $p = (4 - \sqrt{10})/2$ наз. распределением Эссеена. Для этого распределения $\alpha_3 = 0.3289 \dots$, $\beta_3 = 1.04 \dots$, $\alpha_4 = \beta_4 = 1.108 \dots$ и $h = 2.0268 \dots$.

Теорема Берри – Эссеена

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup\{|F_n(x) - \Phi(x)| : -\infty < x < \infty\} \leq C \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

(А. Берри, 1941, К.-Г. Эссеен, 1942).

Для распределения Эссеена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(F_n, \Phi) \sqrt{n}}{\beta_3} = \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097 \dots$$

(К.-Г. Эссеен, 1956).

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_1}{\sqrt{n}}, \quad \rho(F_n, \Phi) \leq \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + 2.58 \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \right)^2$$

(И. Г. Шевцова, 2012 – 2013).

Неравномерные оценки

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|^3)} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

В общем случае, если $\beta_3 < \infty$, то оценка

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c_\varepsilon}{(1 + |x|^{3+\varepsilon})} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

с $\varepsilon > 0$ неверна ни при какой c_ε , так как она влечет $\beta_{3+\delta} < \infty$ для любого $0 < \delta < \varepsilon$. Это следует из формулы

$$\beta_s = s \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{s-1} |F(x) - E_0(x)| dx,$$

где $E_0(x)$ — ф. р. с единичным скачком в нуле.

Справедливо равенство

$$F_n(x) - \Phi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad -\infty < x < \infty.$$

(Г. Крамер, 1937, при выполнении условия $\limsup \{|f(t)| : t \rightarrow \infty\} < 1$, где $f(t)$ — х. ф. ф.р. $F(x)$, К.-Г. Эсseen, 1945, в случае нерешетчатых $F(x)$.)

Для решетчатых распределений при $n \rightarrow \infty, -\infty < x < \infty$,

$$F_n(x) - \Phi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} - \frac{h}{2\sqrt{2\pi n}} S_n(x) e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где разрывная функция $S_n(x)$ линейно возрастает от -1 до 1 на интервалах между соседними точками решетки D_n (К.-Г. Эсseen, 1945).

Так как $S_n(x) = 0$ при $x \in \bar{D}_n$ то

$$F_n(x) - \Phi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in \bar{D}_n.$$

В случае, когда $X_1, X_2, \dots$ имеют распределение Бернулли, последнее слагаемое допускает оценку

$$\left| o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| \leq \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2},$$

если $npq \geq 25$ (следствие одного результата Я. В. Успенского, 1937).

Для распределений с конечным четвёртым моментом при выполнении условия Крамера справедливы оценки

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq |1 - x^2| e^{-x^2/2} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}} + \frac{|R_j|}{|x|^j} + \frac{|K_j|}{|x|^j}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Первое слагаемое в правой части каждой из этих оценок эквивалентно оцениваемой величине при всех $x \neq \pm 1$. Здесь

$$|R_0| \sim 0.027 \frac{\beta_4 + 3}{n} + 0.035 \frac{\alpha_3^2}{n} + 0.1 \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.02 \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_1| \sim 0.13 \frac{\beta_4 + 3}{n} + 0.12 \frac{\alpha_3^2}{n} + 0.63 \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.1 \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_2| \sim 0.69 \frac{\beta_4 + 3}{n} + 0.69 \frac{\alpha_3^2}{n} + 0.16 \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n} + 0.65 \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.43 \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_3| \sim 4 \frac{\beta_4 + 3}{n} + 2.5 \frac{\alpha_3^2}{n} + 1.8 \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n} + 18.1 \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 1.6 \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}} + \frac{0.4}{n^2},$$

величины K_j при росте n убывают экспоненциально быстро, в частности,

$$|K_0| \leq \frac{\alpha^{n/2}(T)}{\pi T} + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-T^2 n/2} + \frac{|\alpha_3|}{6\pi\sqrt{n}} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt,$$

где

$$\alpha(T) = \sup\{|f(t)| : t \geq T\} < 1,$$

$T > 0$ — параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении. В формировании коэффициентов в правых частях соотношений для R_j участвуют величины

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^l \mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt,$$

где $\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$, которые увеличиваются при росте T . Существует выбор T , при котором они стремятся к абсолютному моменту порядка l стандартного нормального закона.

Эти оценки получаются из разложений

$$x^j(F_n(x) - \Phi(x)) = x^j(1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} + R_j + K_j, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

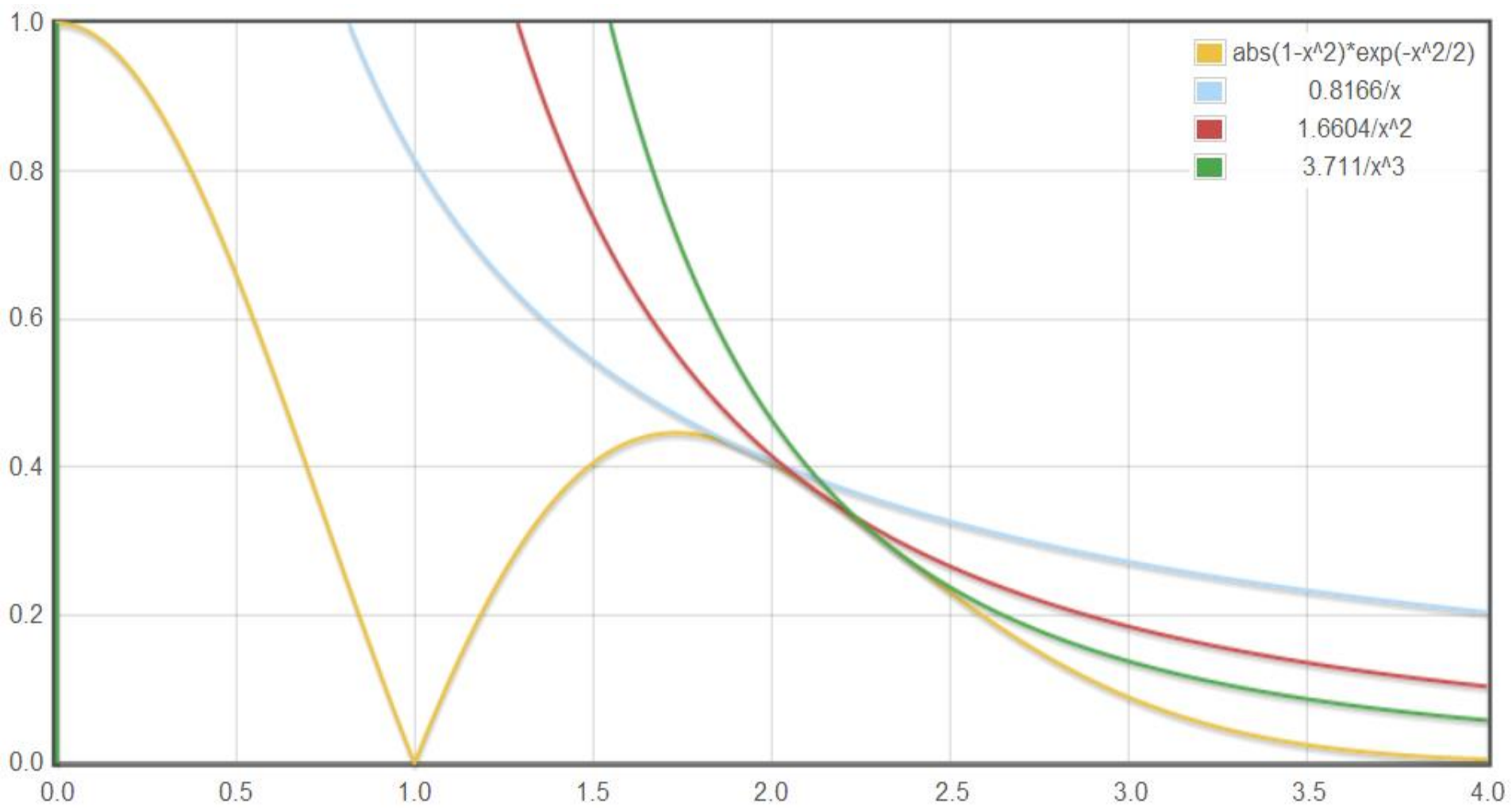
с равномерными (по x) оценками величин R_j и K_j . Обозначая

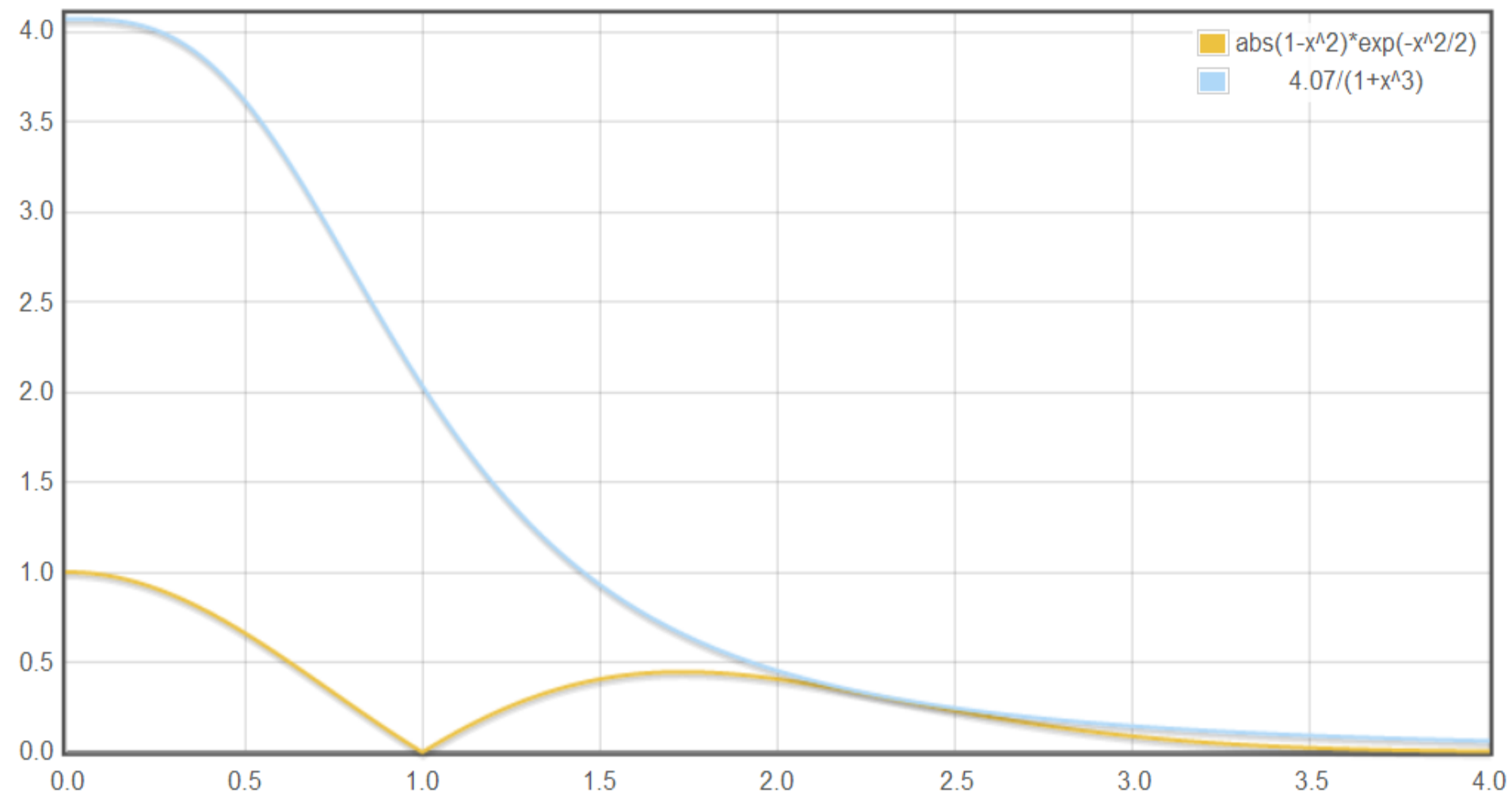
$$c_j = \max |x^j(1 - x^2)e^{-x^2/2}|,$$

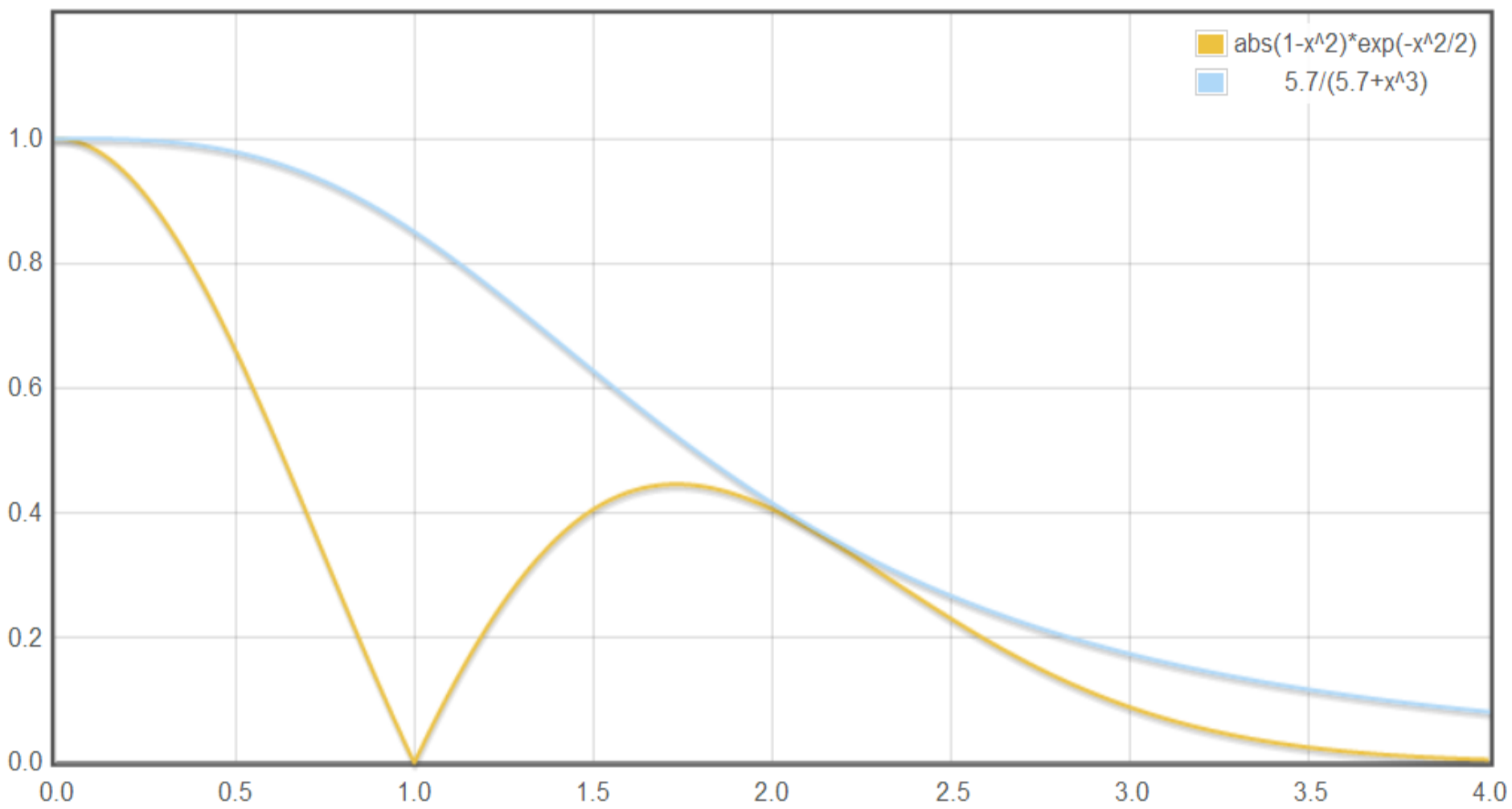
мы можем получить оценку

$$|F_n(x) - G(x)| \leq \min \left\{ 1, \frac{c_1}{|x|}, \frac{c_2}{x^2}, \frac{c_3}{|x|^3} \right\} \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $c_1 = 0.8166 \dots$, $c_2 = 1.6604 \dots$, $c_3 = 3.7110 \dots$.







Вернёмся к квазинеравномерной оценке

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq |1 - x^2| e^{-x^2/2} \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} + |R_0| + |K_0|,$$

где

$$|R_0| \sim 0.027 \frac{\beta_4 + 3}{n} + 0.035 \frac{\alpha_3^2}{n} + 0.1 \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.02 \frac{|\alpha_3|(\beta_4 + 3)}{n^{3/2}}.$$

Она справедлива и для решетчатых распределений при $x \in \bar{D}_n$, для распределения Эссеена её можно записать в виде

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} |H_2(x)| \varphi(x) + |R_0|, \quad (*)$$

где

$$|R_0| \leq \left| \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 H_1(x) - \frac{0.4\alpha_4 - 3}{24n} H_3(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \right| \varphi(x) + \frac{\beta_4}{20\pi n} + \frac{0.2}{n^{3/2}} + \frac{0.72}{n^2}.$$

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} |H_2(x)| \varphi(x) + |R_0|, \quad (*)$$

где

$$|R_0| \leq \left| \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 H_1(x) - \frac{0.4\alpha_4 - 3}{24n} H_3(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \right| \varphi(x) + \frac{\beta_4}{20\pi n} + \frac{0.2}{n^{3/2}} + \frac{0.72}{n^2}.$$

Для распределения Эссеена при $n = 100$ в точке $x = -0.07826$ (это – ближайшая к нулю точка роста $F_n(x)$) неравенство (*) принимает вид

$$\begin{aligned} 0.471015 - 0.468811 \\ \leq 2.166 \cdot 10^{-3} + 0.053 \cdot 10^{-3} + 0.177 \cdot 10^{-3} + 0.2 \cdot 10^{-3} + 0.072 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

или

$$2.204 \cdot 10^{-3} \leq 2.166 \cdot 10^{-3} + 0.053 \cdot 10^{-3} + 0.177 \cdot 10^{-3} + 0.2 \cdot 10^{-3} + 0.072 \cdot 10^{-3}.$$

Сумма четырёх последних слагаемых составляет примерно 23% от величины первого слагаемого в правой части, которая примерно в 19 раз меньше оценки теоремы Берри – Эссеена.

Для распределения Эссеена при $n = 900$ в точке $x = -0.0321$ (это – ближайшая к нулю точка роста $F_n(x)$) неравенство (*) принимает вид

$$0.48792734 - 0.48719615 \\ \leq 7.2783 \cdot 10^{-4} + 0.024 \cdot 10^{-4} + 0.196 \cdot 10^{-4} + 0.074 \cdot 10^{-4} + 0.89 \cdot 10^{-6}$$

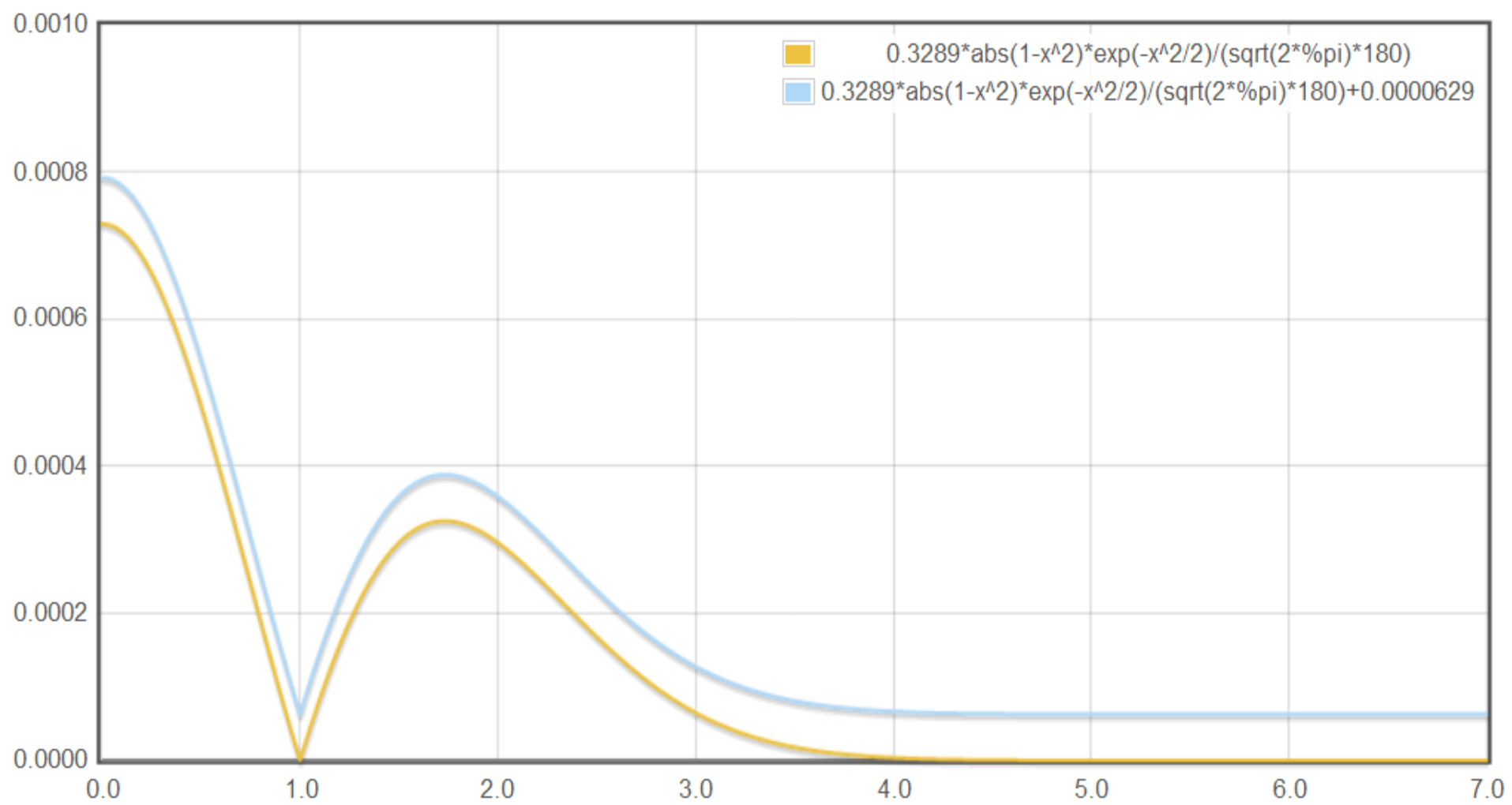
или

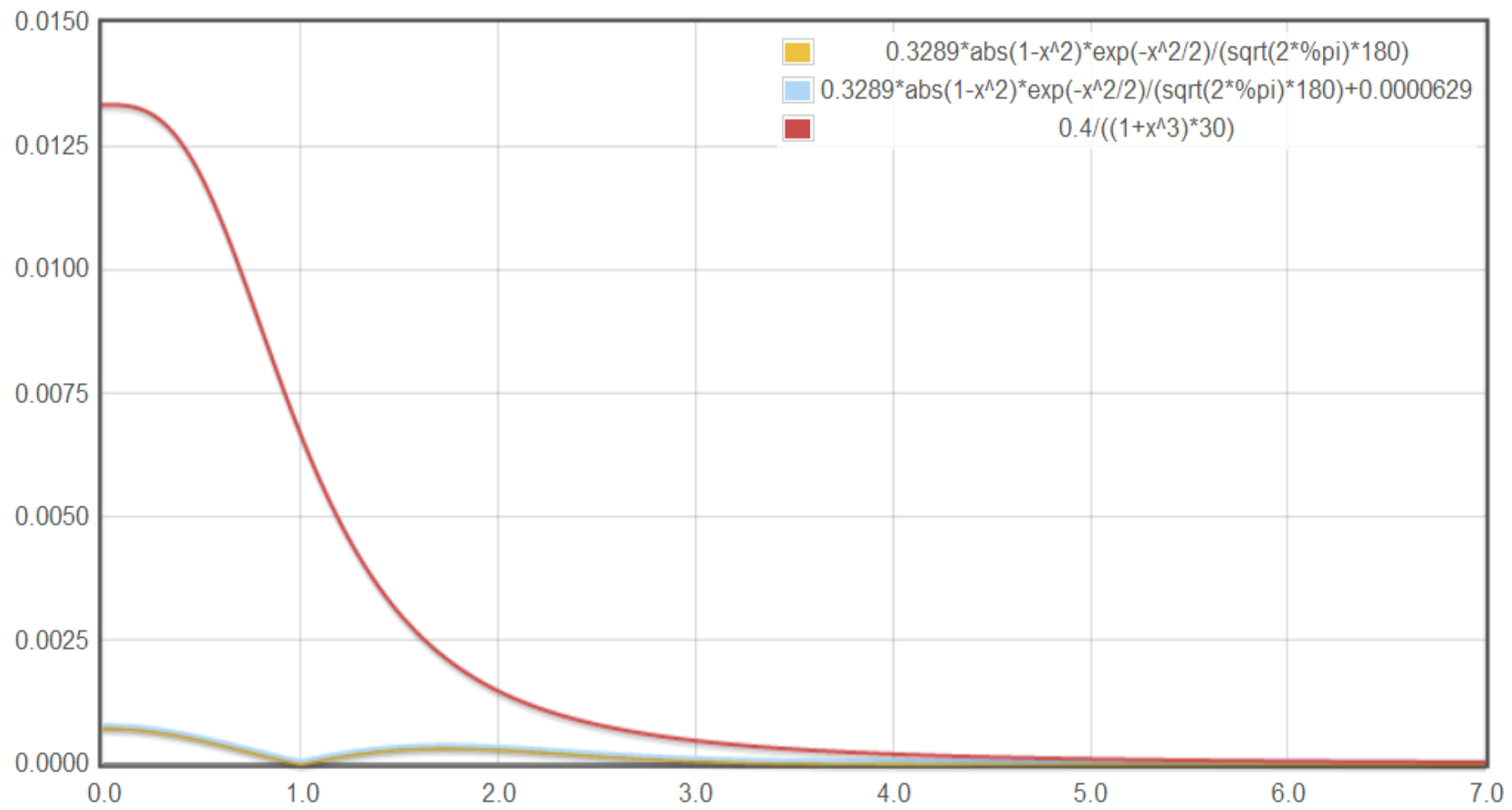
$$7.3119 \cdot 10^{-4} \leq 7.2783 \cdot 10^{-4} + 0.024 \cdot 10^{-4} + 0.196 \cdot 10^{-4} + 0.074 \cdot 10^{-4} + 0.89 \cdot 10^{-6}$$

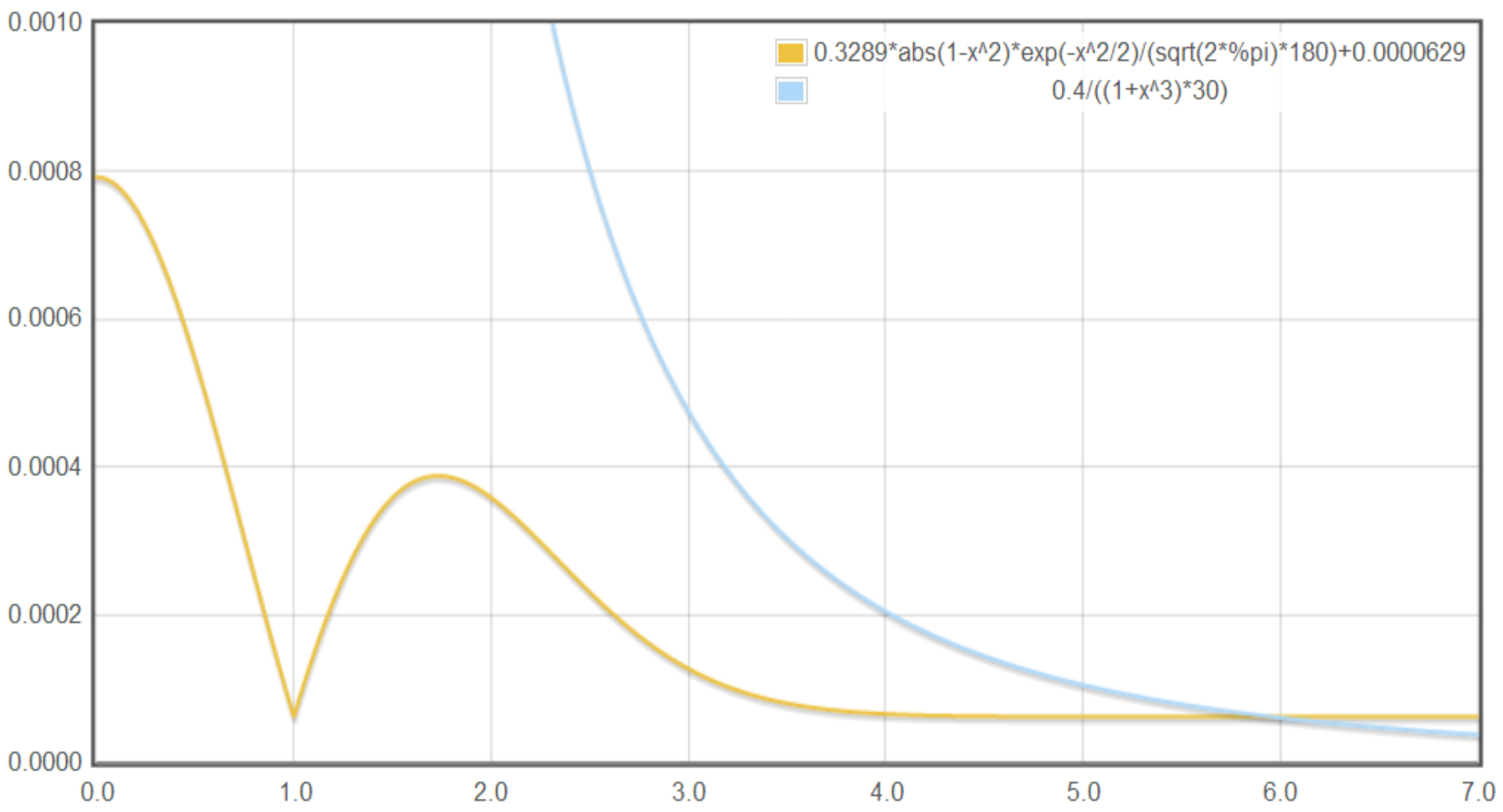
Сумма двух первых слагаемых в правой части меньше левой части.

Замена второго слагаемого в правой части (оно связано с многочленами H_1, H_2 и H_3) на максимум по x приводит к замене числа $0.024 \cdot 10^{-4}$ на $0.35 \cdot 10^{-4}$. После такой замены сумма последних четырёх слагаемых становится равной $0.629 \cdot 10^{-4}$, что составляет примерно 8.6% от максимального значения первого слагаемого. Нарисуем график функции

$$\frac{\alpha_3}{6 \cdot 30} |H_2(x)| \varphi(x) + 0.629 \cdot 10^{-4}.$$







Если для ф. р. $F(x)$ конечен момент порядка $m + 2$, m – натуральное, то

$$f(t) = \sum_{l=0}^{m+2} \frac{\alpha_l}{l!} (it)^l + o(t^{m+2}), \quad t \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$f(t) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\alpha_l}{l!} (it)^l + \gamma \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)!} t^{m+2}, \quad (2)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ – комплекснозначная функция, такая, что $|\gamma| \leq 1$.

С помощью представления (1) для разности $F_n(x) - \Phi(x)$ можно получать лишь результаты, в которые входят $o(n^{-m/2})$, $n \rightarrow \infty$. Получать результаты, которые можно доводить до численных значений, невозможно. С помощью представления (2) для разности $F_n(x) - \Phi(x)$ можно получать оценки, в которые входят $O(n^{-m/2})$, $n \rightarrow \infty$, но эти оценки можно доводить до численных значений.

Модификация тейлоровского разложения

$$f(t) = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\alpha_l}{l!} (it)^l + \lambda \frac{\alpha_{m+2}}{(m+2)!} (it)^{m+2} + \gamma q_{m+2}(\lambda) \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)!} t^{m+2}, \quad (3)$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$. Для некоторых m и λ сумма $\lambda + q_{m+2}(\lambda)$ оказывается равной 1, напр.,

$$q_1\left(\frac{l}{2(l+1)}\right) = \frac{l+2}{2(l+1)}, \quad l \geq 1, \quad \text{в частности,} \quad q_3\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{8}$$

(Х. Правитц, 1991). Функции $q_l(\lambda)$, $l = 1, 2, 3$, были исследованы И. Г. Шевцовой, 2013, в частности, было показано, что минимальное значение $q_3(\lambda)$ достигается при $\lambda = 0.4466 \dots > 0.375 = 3/8$ и оно не превосходит $0.595 < 0.625 = 5/8$.

Для распределений с $\beta_3 < \infty$, для которых выполнено условие Крамера, использование разложений х. ф. в форме (1) приводит к аппроксимации

$$F_n(x) = \Phi(x) + (1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

а в форме (2) приводит к оценке

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\beta_3 B_{2,n-1}}{6\sqrt{n}} + \frac{B_{3,n-1}}{8n} + K_0 \sim \frac{\beta_3}{6\sqrt{2\pi n}} = 0.0665 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

Модификация тейлоровского разложения х. ф. приводит к разложению

$$F_n(x) = \Phi(x) + \lambda(1 - x^2)e^{-x^2/2} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{2\pi n}} + R + K_0,$$

где λ — произвольное число из $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} |R| \leq q_3(\lambda) \frac{\beta_3}{6\sqrt{2\pi n}} + \frac{B_3}{8n} + \frac{\beta_3^2 B_{5,n-2}}{72n} + \frac{\beta_3 B_4}{12n^{3/2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{5/2} + \frac{\beta_3 B_{6,n-2}}{48n^{3/2}} + \frac{B_{7,n-2}}{128n^2} + \\ + \frac{B_5}{16n^2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^3. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0.4466$ правая часть последнего неравенства эквивалентна $0.0395 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$.

Для распределений с $\beta_4 < \infty$, для которых выполнено условие Крамера,

использование разложений х. ф. в форме (1) приводит к аппроксимации

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_4 - 3}{24n} H_3(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \varphi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty,$$

в форме (2) приводит к аппроксимации

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(x) \varphi(x) + \frac{3}{24n} H_3(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \varphi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty,$$

$$\left| O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{\beta_4}{12\pi n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), n \rightarrow \infty,$$

в форме (3) приводит к аппроксимации

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_2(x) \varphi(x) - \frac{0.4\alpha_4 - 3}{24n} H_3(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \varphi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty,$$

$$\left| O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{\beta_4}{20\pi n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Для решетчатых распределений с конечным четвёртым моментом в точках $x \in \bar{D}_n$ справедливо разложение, аналогичное последнему, в главную часть которого следует добавить слагаемое $\frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 H_1(x) \varphi(x)$, а в остаточную часть – величину, эквивалентную сумме

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{8} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \frac{\beta_4 + 3}{24n} + \frac{13}{360} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^4.$$

Для распределения Эссеена эта сумма не превосходит

$$\frac{0.0176}{n^{3/2}} + \frac{0.1}{n^2}.$$

Второе слагаемое в правой части (4) для распределения Эссеена не превосходит

$$\frac{0.179}{n^{3/2}} + \frac{0.58}{n^2} + \frac{0.313}{n^{5/2}} + \frac{0.755}{n^3}.$$

Поэтому для распределения Эссеена

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} |H_2(x)| \varphi(x) + \\ + \left| \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 H_1(x) - \frac{0.4\alpha_4 - 3}{24n} H_3(x) - \frac{\alpha_3^2}{72n} H_5(x) \right| \varphi(x) + \frac{\beta_4}{20\pi n} + \frac{0.2}{n^{3/2}} + \frac{0.72}{n^2}.$$

