

Размерность градиентов-зарядов

Д.М. Столяров

ПОМИ, Лаборатория им. П.Л. Чебышева
(совм. с М. Войчеховским)

Пусть $\phi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ есть непрерывное отображение. Определим класс M_ϕ зарядов (с ограниченной вариацией) на пространстве $\mathbb{R}^n$ согласно формуле

$$M_\phi = \left\{ \mu \mid \hat{\mu} \parallel \phi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) \right\}.$$

Например, если $\phi(\xi) = i\xi$, то класс M_ϕ совпадает с множеством градиентов функций ограниченной вариации. Из знаменитой теоремы Укиямы следует, что если $\phi(\xi) \not\parallel \phi(-\xi)$, то все заряды из класса M_ϕ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Напротив, утверждение становится неверным для случая $\phi(\xi) = i\xi$ (например, обобщенный градиент характеристической функции куба имеет носителем грани куба). Насколько сингулярными могут быть заряды из класса M_ϕ , если условие Укиямы не выполнено?

Символом $\dim \mu$ мы будем обозначать нижнюю размерности Хаусдорфа (наибольшее число α такое что условие $\dim F < \alpha$ влечет выполнение $\mu(F) = 0$). Фольклор подсказывает, что если $f \in BV$, то $\dim \nabla f \geq n - 1$. М. Рогинская и М. Войчеховский предположили, что если ϕ принимает n линейно независимых значений, то $\dim \mu \geq n - 1$. Они показали, что при тех же предположениях имеет место неравенство $\dim \mu \geq 1$. Не в силах доказать гипотезу, мы разберем интересный частный случай. Рассмотрим пространство функций f , таких что $\mu_j = \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}$ есть заряд ограниченной вариации при всяком j . Мы покажем, что в таком случае $\dim \mu \geq n - 1$. Мы также рассмотрим случай, когда по разным направлениям берется разное число производных; такая ситуация не охватывается гипотезой, тем не менее, заключение $\dim \mu \geq n - 1$ по прежнему имеет место.

В докладе будут даны доказательства ранее известных фактов (касающихся случая теоремы Укиямы, случая функций ограниченной вариации, общей гипотезы и неравенства $\dim \mu \geq 1$). После мы обсудим доказательство теоремы авторов, которое объединяет три предшествующих доказательства.