Заседание 19.05.2014
Функция Беллмана: локально вогнутые функции, мартингалы в области, теоремы вложения и двойственности.

П. Б. Затицкий
(по совместной работе с Д. М. Столяровым)

В докладе будет обсуждаться связь интегральных неравенств на специальных функциональных классах с локально вогнутыми функциями на соответствующих областях. Важным шагом в понимании проблемы стала постановка третьей задачи, тесно связанной с этими двумя. Ей оказалась оптимизационная задача на специальном классе мартингалов.

Пусть $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ — строго выпуклые неограниченные множества, причем Ω_1 лежит строго внутри Ω_0, $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1$. Свяжем с областью Ω класс $\mathcal{A}_\Omega$ функций на некотором отрезке I, заданный по правилу

$$\mathcal{A}_\Omega = \{\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^2) \colon \varphi(I) \subset \partial\Omega_0, \quad \forall J \subset I \quad \langle\varphi\rangle_J \notin \Omega_1\},$$

где J — произвольный подотрезок отрезка I. Символом $\langle\psi\rangle_J$ обозначено среднее функции ψ по отрезку J. Пусть $f \colon \partial\Omega_0 \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Рассмотрим на классе $\mathcal{A}_\Omega$ интегральный функционал F, заданный по правилу

$$F[\varphi] = \langle f(\varphi)\rangle_I,$$

и соответствующую ему функцию Беллмана

$$\mathrm{B}_{\Omega,f}(x) = \sup\{F[\varphi] \colon \varphi \in \mathcal{A}_\Omega, \langle\varphi\rangle_I = x\},$$

заданную на области Ω.

Рассмотрим также функцию $\mathcal{B}_{\Omega,f}$, минимальную среди локально вогнутых (т.е. вогнутых на каждой выпуклой подобласти) функций G на области Ω, удовлетворяющих граничному неравенству $G(x) \geq f(x)$ при $x \in \partial\Omega_0$.

Теорема 1. $\mathrm{B}_{\Omega,f} = \mathcal{B}_{\Omega,f}$.

Оказалось, что чрезвычайно важным звеном, связывающим класс локально вогнутых функций на Ω и класс $\mathcal{A}_\Omega$, является класс мартингалов $\mathcal{M}_\Omega$ специального вида, принимающих значения в области Ω, стартующих из точек области Ω и выходящих на границу $\partial\Omega_0$. Вводится третья функция Беллмана, $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$, значение которой в каждой точке $x \in \Omega$ определяется как супремум значений $\mathbb{E}f(M_\infty)$ по всем мартингалам M класса $\mathcal{M}_\Omega$, стартующим из точки x.

Авторы доказывают теорему двойственности, связывающую локально вогнутые функции с мартингалами:

Теорема 2. $\mathcal{B}_{\Omega,f} = \mathfrak{B}_{\Omega,f}$.

Оказывается, что эта теорема верна для широкого класса областей Ω не только в $\mathbb{R}^2$, но также и в старших размерностях. Описание класса областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, для которых выполнено заключение этой теоремы, представляет интерес и нуждается в дополнительных исследованиях.

Связь классов функций $\mathcal{A}_\Omega$ и мартингалов $\mathcal{M}_\Omega$ такова: распределение M_∞ каждого мартингала $M \in \mathcal{M}_\Omega$ совпадает с распределением некоторой функции $\varphi \in \mathcal{A}_\Omega$; наоборот, каждая функция $\varphi \in \mathcal{A}_\Omega$ раскладывается в мартингал, но уже в чуть расширенной области. Эта явление позволяет получить разнообразные утверждения про функции класса $\mathcal{A}_\Omega$, в частности, про конкатенации и монотонные перестановки.

Важными достижениями по сравнению с изложенными ранее подходами к поставленным проблемам являются введение в рассмотрение важного класса мартингалов, а также отказ от использования структурных свойств минимальных локально вогнутых функций.