Игры среднего поля и динамические системы, зависящие от меры

Ю.В. Авербух

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
ayv@imm.uran.ru

Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ
21 мая 2014

Содержание

Статическая игра

$$J_i(u_1, \dots, u_n) \to \max, \quad u_i \in P_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

1. игроки: $1, \dots, n$;
2. множество стратегий: P_i;
3. функции выигрыша (полезности): J_i.

Равновесие по Нэшу

Набор стратегий $u_1^*, \ldots, u_n^*$ называется равновесием по Нэшу, если для всех u_i

$$J_i(u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \ldots, u_n^*) \leq$$
$$\leq J_i(u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \ldots, u_n^*).$$

Равновесие по Нэшу. Пример

	II-й кооперируется	II-й изменяет
I-й кооперируется	R,R	S,T
I-й изменяет	T,S	P,P

$$T > R > P > S.$$

Равновесие по Нэшу. Пример

$+1, -1$	$-1, +1$
$-1, +1$	$+1, -1$

Смешанные стратегии

- смешанная стратегия игрока i: $\nu_i \in \mathcal{P}(U_i)$;
- выигрыш игрока i:

$$\int_{P_1} \dots \int_{P_N} J_i(u_1, \dots, u_n) \nu_1(du_1) \dots \nu_n(du_n).$$

Равновсеие в смешанных стратегиях

Теорема (Nash, 1950)

Если P_i – компактны, то существует хотя бы одно равновесие в смешанных стратегиях.

Смешанные стратегии

Если ν_i – смешанная стратегия игрока i, то обозначим

$$\nu = \nu_1 \times \ldots \times \nu_n.$$

Тогда выигрыш игрока i:

$$E_\nu(J_i) = \int_{P_1 \times \ldots \times P_n} J_i(u_1, \ldots, u_n)\nu(d(u_1, \ldots, u_n)).$$

Задачи теории управления

Максимизировать

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \sigma(x(T)) - \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt$$

при $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in P.$

Пример

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_0^T x^2(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in \{-1, 1\}.$$

Пример

$$J[x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)] = \int_0^T (x^2(t) + y^2(t))dt \to \min,$$

$$\begin{cases} \dot{x} & = \cos(u), \\ \dot{y} & = -\sin(u), \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, \quad u(t) \in [0, \pi].$$

Мерозначные управления (Р.В. Гамкрелидзе, Дж. Варга)

$\alpha(t) \in \mathcal{P}(P)$.

Максимизировать

$$J[x(\cdot), \alpha(\cdot)] = \sigma(x(T)) - \int_0^T \int_P g(t, x(t), u)\alpha(t, du)dt$$

$$\text{при } \dot{x}(t) = \int_P f(t, x(t), u)\alpha(t, du), \quad x(0) = x_0.$$

Оптимум в задаче управления всегда достигается в классе мерозначных управлений.

Мерозначные управления (Р.В. Гамкрелидзе, Дж. Варга)

$\alpha(t) \in \mathcal{P}(P)$.

Максимизировать

$$J[x(\cdot),\alpha(\cdot)] = \sigma(x(T)) - \int_0^T \int_P g(t,x(t),u)\alpha(t,du)dt$$

$$\text{при } \dot{x}(t) = \int_P f(t,x(t),u)\alpha(t,du), \quad x(0) = x_0.$$

Оптимум в задаче управления всегда достигается в классе мерозначных управлений.

Мерозначные управления

Оптимум достигается в обычных управлениях, если множество $\{(f(t,x,u), -g(t,x,u)) : u \in P\}$ выпукло для всех $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Программные и позиционные управления

- программное управление: $u(t)$;
- позиционное управление: $u(t,x)$.

В задачах управления оптимальное значение функционала для программных и позиционных стратегий совпадают.

Функция цены

$$V(t_*, x_*) = \sup\Big\{\sigma(x(T)) - \int_{t_*}^{T} g(t, x(t), u(t)) :$$
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in P, \quad x(t_*) = x_*\Big\}.$$

Динамическое программирование (Р. Беллман)

$$V(t_*,x_*)=\sup\Big\{V(t_*+\delta,x(t_*+\delta))-\int_{t_*}^{t_*+\delta}g(t,x(t),u(t)):$$
$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),\quad u(t)\in P,\quad x(t_*)=x_*\Big\}.$$

Уравнение Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H(t,x,\nabla V)=0,\quad V(T,x)=\sigma(x),$$

$$H(t,x,p)=\max_{u\in P}[\langle p,f(t,x,u)\rangle-g(t,x,u)].$$

Минимаксное решение. А.И. Субботин

Говорят, что V – минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби, если для каждого (t_*, x_*) $V(t_*, x_*)$ – решение задачи максимизации:

максимизировать

$$\sigma(x(T)) - \int_{t_0}^{T} \dot{z}(t)dt$$

при $\dot{x} \in \mathrm{dom} H^*(t, x, \cdot)$, $\dot{z} = H^*(t, x, \dot{x})$, $x(t_*) = x_*$.

$$H^*(t, x, s) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [\langle s, p \rangle - H(t, x, p)],$$

$$\mathrm{dom} H^*(t, x, \cdot) = \{s : H^*(t, x, s) < \infty\}.$$

Суб- и супердифференциалы

$$D^-V(t,x) = \left\{(a,p) : a\alpha + \langle p, h\rangle \leq \liminf_{(\alpha',h')\to(\alpha,h),\delta\downarrow 0} \frac{V(t+\delta\alpha', x+\delta h')}{\delta}\right\}$$

$$D^+V(t,x) = \left\{(a,p) : a\alpha + \langle p, h\rangle \geq \limsup_{(\alpha',h')\to(\alpha,h),\delta\downarrow 0} \frac{V(t+\delta\alpha', x+\delta h')}{\delta}\right\}$$

Минимаксное решение. Эквивалентное определение

V – минимаксное решение, если

1. для всех x $V(T,x) = \sigma(x)$;
2. для всех $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $(a,p) \in D^- V(t,x)$
$$a + H(t,x,p) \leq 0;$$
3. для всех $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $(a,p) \in D^+ V(t,x)$
$$a + H(t,x,p) \geq 0.$$

Игры среднего поля (mean field games)

- Предложены Lasry, Lions и Huang, Caines and Malhamé в 2006 году.
- Описывают управляемые системы с большим числом “слабых” игроков.
- Приложения: анализ фондового рынка, экономические задачи, исследование трафика, популяционная динамика, анализ электрических сетей.

Дифференциальная игра многих лиц

Система:

$$\dot{x}_i = f\left(t, x_i, \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}, u_i\right), \quad i = \overline{1, N},$$

Цель: максимизировать

$$\sigma\left(x_i(T), \frac{x_1(T) + \ldots + x_N(T)}{N}\right) - \\ - \int_0^T g\left(t, x_i(t), \frac{x_1(t) + \ldots + x_N(t)}{N}, u_i(t)\right) dt.$$

Переход к мерам

Пусть

$$\mu_N[t] = \frac{1}{N}(\delta_{x_1(t)} + \ldots \delta_{x_N(t)}).$$

Система:

$$\dot{x}_i = f\left(t, x_i, \mu_N[t], u_i\right), \quad i = \overline{1, N},$$

Цель: максимизировать

$$\sigma\left(x_i(T), \mu_N[T]\right) - \int_0^T g\left(t, x_i(t), \mu_N[t], u_i(t)\right) dt.$$

Динамика распределения положения игроков

μ_N – слабое решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\mu_N[t] = \langle f(t, x, \mu_N[t], u), \nabla \rangle \mu_N[t].$$

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi'(t)\phi(x)\mu[t](dx)dt = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \langle f(t, x, \mu[t], u), \nabla\phi(x) \rangle \mu[t](dx)dt.$$

для всех $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in C^1([0, T])$ таких, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$.

Динамика распределения положения игроков

μ_N – слабое решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\mu_N[t] = \langle f(t, x, \mu_N[t], u), \nabla\rangle\mu_N[t].$$

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi'(t)\phi(x)\mu[t](dx)dt =$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \langle f(t, x, \mu[t], u), \nabla\phi(x)\rangle \mu[t](dx)dt.$$

для всех $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in C^1([0, T])$ таких, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$.

Предположения

Перейдем формально к пределу при $N \to \infty$.

- Будем считать, что игрок в одиночку не может изменить распределение положений игроков.
- Поскольку игра симметрична, функция цены не зависит от номера игрока.

Гамильтониан

$$H(t,x,m,p) = \max_{u\in P}[\langle p, f(t,x,m,u)\rangle - g(t,x,m,u)].$$

Здесь m – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$.

$$u^*(t,x,m,p) = \mathrm{argmax}_{u\in P}[\langle p, f(t,x,m,u)\rangle - g(t,x,m,u)].$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t,x,m,p) = f(t,x,m,u^*(t,x,m,p)).$$

Система уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0, \quad V(T, x) = \sigma(x, \mu[T])$$

$$\frac{d}{dt}\mu[t] = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V), \nabla \right\rangle \mu[t], \quad \mu[0] = m_0.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu[t]$ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$.

Абсолютно непрерывный случай

Если $\mu[t]$ – абсолютно непрерывно, и $q(t,x)$ плотность $\mu[t]$, то кинетическое уравнение (второе уравнение в системе) принимает вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathrm{div}\left(q\frac{\partial H(t,x,\mu[t],\nabla V)}{\partial p}\right) = 0, \quad q(0,\cdot) = q_0(\cdot).$$

Здесь q_0 – плотность меры m_0.

Стандартная схема статей в теории игр среднего поля

1. Дать определение решения.
2. Доказать теоремы существования и (желательно) единственности.
3. Построить ε-равновесие в игре конечного числа лиц.

Обозначения

- $\mathcal{P}(Q)$ – множество вероятностных мер на Q;
- Если Q и R – банаховы пространства, $m \in \mathcal{P}(Q)$ и $h : Q \to R$, то $h\#m$ образ меры m при отображении h:

$$\int_R \varphi(r)(h\#m)(dr) = \int_Q \varphi(h(q))m(dq).$$

Пространство вероятностных мер

На $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ введем метрику Канторовича–Рубинштейна

$$W(m', m'') = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi d(m' - m'') : \phi \in \mathrm{Lip}_1\right\}$$
$$= \inf_{\pi \in \Pi(m', m'')} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|x' - x''\| \pi(dx', dx'').$$

Обозначения:

- $\mathrm{Lip}_1 = \{\phi : |\phi(x') - \phi(x'')| \leq \|x' - x''\|\}$,
- $\Pi(m', m'')$ – множество вероятностных мер π на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ таких, что $\pi(\Gamma \times \mathbb{R}^n) = m'(\Gamma)$, $\pi(\mathbb{R}^n \times \Gamma) = m''(\Gamma)$ для всех измеримых $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Распределения игроков

Пусть $\mathcal{M}$ – это множество всех функций $\mu : [0, T] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких, что отображение $t \mapsto \mu[t]$ непрерывно.

Метрика на $\mathcal{M}$

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{t \in [0,T]} W(\mu[t], \nu[t]).$$

Условия

1. P компактно;
2. f, σ и g непрерывны;
3. f липшицево по x и m:

$$\|f(t,x',m,u) - f(t,x'',m,u)\| \leq L_{f,x}\|x' - x''\|,$$

$$\|f(t,x,m',u) - f(t,x,m'',u)\| \leq L_{f,m}W(m',m'');$$

4. $\{(f(t,x,m,u), -g(t,x,m,u)) : u \in P\}$ выпуклы;
5. носитель меры m_0 – компакт $G_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Оптимальные траектории

Пусть при фиксированном потоке мер μ V – минимаксное решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{S}[V, \mu]$ множество движений $(x(\cdot), z(\cdot))$ таких, что

- $\dot{x}(t) \in \mathrm{dom} H^*(t, x(t), \mu[t], \cdot)$;
- $\dot{z}(t) = H^*(t, x(t), \mu[t], \dot{x}(t))$;
- $z(t) = V(t, x(t))$.

Обобщенное решение системы

Пара (V,μ), где V – непрерывная функция позиции, а μ – распределение положений игроков, является обобщенным решением системы уравнений игр среднего поля, если:

1. V – минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби;
2. $\mu[0] = m_0$;
3. существует мера χ на $\mathcal{S}[V,\mu]$, что для всех $\phi \in C_1(\mathbb{R}^n)$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mu[t](dx) = \int_{\mathcal{S}[V,\mu]} \phi(x(t))\chi(d(x(\cdot),z(\cdot))).$$

Классическое решение

Пара (V, μ) является классическим решением, если V является классическим решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0, \quad V(T, x) = \sigma(x, \mu[T]),$$

а μ удовлетворяет условию: для всех $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in C^1([0, T])$ таких, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$,

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi'(t)\phi(x)\mu[t](dx)dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V(t, x)), \nabla \phi(x) \right\rangle \mu[t](dx)dt.$$

Случай дифференцируемости решения

Утверждение

Если (V, μ) *– обобщенное решение системы,* V *дифференцируемо и существует* $\partial H/\partial p$*, то* (V, μ) *– классическое решение.*

Связь с классическим решением

Утверждение

Если

- (V, μ) – *классическое решение,*
- V *непрерывно дифференцируемо,* ∇V *липшицево по* x,
- $\partial H/\partial p$ *существует,*

то (V, μ) – *обобщенное решение.*

Обозначения

$\mathcal{U}$ – множество измеримых функций $u : [0, T] \to P$.

Пусть $x(\cdot, t_*, x_*, u, \mu)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), u(t), \mu[t]), \quad x(t_*) = x_*.$$

$$z(t_*, x_*, u, \mu) = \sigma(x(T, t_*, x_*, u, \mu), \mu[T]) - \int_{t_*}^{T} g(t, x(t, t_*, x_*, u, \mu), u(t), \mu[t])dt.$$

Игра бесконечного числа игроков

Пусть

- Ω – компактнное множество;
- η неатомичсекая мера на Ω;
- $x_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция такая, что $x_0 \# \eta = m_0$.

Множество Ω – множество игроков.
$x_0(\omega)$ начальная позиция игрока ω.

Игра бесконечного числа игроков

Движение: $x[\cdot,\omega,u,\mu] = x(\cdot,0,x_0(\omega),u,\mu)$.

Результат:

$$z[t_*,\omega,u,\mu] = \sigma(x[T,\omega,u,\mu],\mu[T]) - \int_{t_*}^{T} g(t,x[t,\omega,u(t),\mu[t]],\mu[t],u(t))dt.$$

Стратегии

- Смешанные стратегии: $\varrho \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.
- Результат:
$$J[\omega, \varrho, \mu] = \int_{\mathcal{U}} z[0, \omega, u, \mu]\varrho(du).$$
- Профиль стратегий: $\omega \mapsto \gamma(\omega) \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Поток мер

Будем говорить, что $\mu \in \mathcal{M}$ порождено профилем стратегий γ, если

$$\mu[t](X) = \int_{\Omega} \gamma(\omega, \{u : x[t, \omega, u, \mu] \in X\})\eta(d\omega), \quad X \subset \mathbb{R}^n$$

или в другой форме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mu[t](x) = \int_{\Omega} \eta(d\omega) \int_{\mathcal{U}} \varphi(x[t, \omega, u, \mu])\gamma(\omega, du).$$

Утверждение

Для каждого профиля γ существует единственный поток мер μ.

Поток мер

Будем говорить, что $\mu \in \mathcal{M}$ порождено профилем стратегий γ, если

$$\mu[t](X) = \int_\Omega \gamma(\omega, \{u : x[t, \omega, u, \mu] \in X\})\eta(d\omega), \quad X \subset \mathbb{R}^n$$

или в другой форме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mu[t](x) = \int_\Omega \eta(d\omega) \int_{\mathcal{U}} \varphi(x[t, \omega, u, \mu])\gamma(\omega, du).$$

Утверждение

Для каждого профиля γ существует единственный поток мер μ.

Равновесие по Нэшу

Пусть $\hat{\gamma}$ – профиль стратегий, и пусть, поток мер $\hat{\mu}$ порожден $\hat{\gamma}$.

Определение

Будем говорить, что $\hat{\gamma}$ – равновесие по Нэшу, если для любого ω и любого $\varrho \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$$J[\omega, \varrho, \hat{\mu}] \leq J[\omega, \hat{\gamma}(\omega), \hat{\mu}].$$

Равновесие по Нэшу

Теорема

Существует как минимум одно равновсеие $\hat{\gamma}$.

Решение системы уравнений для игры среднего поля

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0, \quad V(T, x) = \sigma(x, \mu[T])$$

$$\frac{d}{dt}\mu[t] = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V), \nabla \right\rangle \mu[t], \quad \mu[0] = m_0.$$

Положим

- $\Omega = G_0 \times [0, 1]$;
- $\eta(d(y, \alpha)) = m_0(dy) \cdot d\alpha$;
- $x_0(y, \alpha) = y$.

Существуют равновесие по Нэшу $\hat{\gamma}$ и соответствующий поток мер $\hat{\mu}$.

Решение системы уравнений для игры среднего поля

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0, \quad V(T, x) = \sigma(x, \mu[T])$$

$$\frac{d}{dt}\mu[t] = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V), \nabla \right\rangle \mu[t], \quad \mu[0] = m_0.$$

Положим

- $\Omega = G_0 \times [0, 1]$;
- $\eta(d(y, \alpha)) = m_0(dy) \cdot d\alpha$;
- $x_0(y, \alpha) = y$.

Существуют равновесие по Нэшу $\hat{\gamma}$ и соответствующий поток мер $\hat{\mu}$.

Теорема существования

Положим $V(t_*, x_*) \triangleq \max\{z(t_*, x_*, u, \hat{\mu}) : u \in \mathcal{U}\}$.

Свойство. Если $u \in \mathrm{supp}(\hat{\gamma}(\omega, \cdot))$, то $(x[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}], z[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}]) \in \mathcal{S}[V, \hat{\mu}]$.

Теорема

Пара $(V, \hat{\mu})$ – обобщенное решение системы уравнений для игры среднего поля.

Теорема существования

Положим $V(t_*, x_*) \triangleq \max\{z(t_*, x_*, u, \hat{\mu}) : u \in \mathcal{U}\}$.

Свойство. Если $u \in \mathrm{supp}(\hat{\gamma}(\omega, \cdot))$, то $(x[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}], z[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}]) \in \mathcal{S}[V, \hat{\mu}]$.

Теорема

Пара $(V, \hat{\mu})$ – обобщенное решение системы уравнений для игры среднего поля.

Теорема существования

Положим $V(t_*, x_*) \triangleq \max\{z(t_*, x_*, u, \hat{\mu}) : u \in \mathcal{U}\}$.

Свойство. Если $u \in \mathrm{supp}(\hat{\gamma}(\omega, \cdot))$, то $(x[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}], z[\cdot, \omega, u, \hat{\mu}]) \in \mathcal{S}[V, \hat{\mu}]$.

Теорема

Пара $(V, \hat{\mu})$ – обобщенное решение системы уравнений для игры среднего поля.

Теорема существования

Определим меру χ правилом: для каждого $\varphi : \mathcal{S}[V,\hat{\mu}] \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{S}[V,\hat{\mu}]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot))\chi(d(x(\cdot), z(\cdot))) = \int_{\Omega} \eta(d\omega) \int_{\mathcal{U}} \varphi(x[\cdot,\omega,u,\hat{\mu}], z[\cdot,\omega,u,\hat{\mu})\hat{\gamma}(\omega, du)$$

Свойство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\hat{\mu}[t](dx) = \int_{\mathcal{S}[V,\hat{\mu}]} \phi(x(t))\chi(d(x(\cdot), z(\cdot))).$$

Дополнительные предположенияя

Функции σ и g липшицевы по x и m:

- $|\sigma(x', m) - \sigma(x'', m)| \leq L_{\sigma,x}|x' - x''|$,
- $|\sigma(x, m') - \sigma(x, m'')| \leq L_{\sigma,m}W(m', m'')$,
- $|g(t, x', m, u) - \sigma(t, x'', m, u)| \leq L_{g,x}|x' - x''|$,
- $|g(t, x, m', u) - \sigma(t, x, m'', u)| \leq L_{g,m}W(m', m'')$.

Игра N лиц

- Начальное положение игрока i равно $y_N^i \in \mathbb{R}^n$.
- Игрок i использует смешанную стратегию $\varrho_N^i \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.
- $\varrho_N = (\varrho_N^1, \ldots, \varrho_N^N)$ – профиль смешанных стратегий.

Обозначение: $\varrho_N|\rho^j$ – профиль стратегий в случае, если

- все игроки кроме j-го используеют стратегии, определяемые ϱ_N
- игрок j использует стратегию ρ^j.

Игра N лиц

Пусть ϱ_N – профиль стратегий.

- Положение игрока i в момент t описывается вероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ $\nu_N^i[t;\varrho_N]$.
- $\nu_N^1, \ldots, \nu_N^N$ удовлетворяют условиям:

$$\nu_N^i[t;\varrho_N] = x(t, 0, y_N^i, \cdot, \nu_N[\cdot;\varrho_N])\#\varrho_N^i, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\nu_N[t;\varrho_N] = \frac{1}{N}(\nu_N^1[t,\varrho_N] + \ldots + \nu_N^N[t,\varrho_N]).$$

- Выигрыш игрока i:

$$\mathcal{J}_N^i[\varrho_N] = \int_{\mathcal{U}} z(0, y_N^i, u, \nu_N[\cdot;\varrho_N])\varrho_N^i(du).$$

Вспомогательные меры

Пусть
$$\delta^N_{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}(\delta_{y^1_N} + \ldots + \delta_{y^N_N}).$$
Существуют меры на $\mathbb{R}^n$ $m^1_N, \ldots, m^N_N$ такие, что

1. $m_0 = \frac{1}{N}(m^1_N + \ldots + m^N_N)$;
2. $m^i_N(G_0) = 1$;
3. $$W(m_0, \delta^N_{\mathbf{x}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{G_0}\|x - y^i_N\| m^i_N(dx).$$

Теорема

Существует профиль стратегий $\hat{\varrho}_N$ такой, что для всех j и $\rho^j \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$$\mathcal{J}_N^j[\hat{\varrho}_N] \geq \int_{\mathbb{R}^N} V(0,x)m_N^j(dx)$$
$$- C_1 W(\delta_{\mathbf{x}}^N, m_0) - C_2 \max_{i=\overline{1,N}} \int_{\mathbb{R}^n} \|x - y_N^i\| m_N^i(dx),$$

$$\mathcal{J}_N^j[\hat{\varrho}_N | \rho^j] \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(0,x)m_N^j(dx)$$
$$+ C_1 W(\delta_{\mathbf{x}}^N, m_0) + C_2 \max_{i=\overline{1,N}} \int_{\mathbb{R}^n} \|x - y_N^i\| m_N^i(dx) + C_3 \frac{1}{N}$$

Константы C_1, C_2, C_3 не зависят от N.

ε-равновесие по Нэшу

Если

$$W(m_0, \delta^N_{\mathbf{x}}) \to 0, \quad \max_{i=\overline{1,N}} \int_G \|x - y^i_N\| m^i_N(dx) \to 0, \text{ as } N \to \infty,$$

то для любого ε существует N_0 такое, что для всех $N > N_0$ профиль стратегий $\hat{\varrho}_N$ является ε-равновесным по Нэшу.

Спасибо за внимание!