

# **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РАЙСОВСКОГО СИГНАЛА**

**Т.В. Яковлева**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына  
Российской академии наук, Москва*

## **Аннотация:**

В работе развиты новые методы решения задачи двухпараметрического анализа случайной величины в условиях распределения Райса. Особенностью этих методов является то, что они обеспечивают совместное вычисление обоих статистических параметров анализируемой случайной величины – среднего значения сигнала и дисперсии шума – и при этом свободны от ограничений, налагаемых априорными предположениями и характерных для традиционных однопараметрических способов анализа информации. Разработанные методы решения задачи двухпараметрического анализа Райсовского сигнала математически строго обоснованы и используют принципы математической статистики: варианты метода моментов и метод максимума правдоподобия. Доказаны существование и единственность решения соответствующих задач.

## **Постановка задачи и обоснование применимости Райсовской статистической модели для ее решения**

Суть развиваемого двухпараметрического подхода к решению задачи анализа и обработки случайного сигнала:

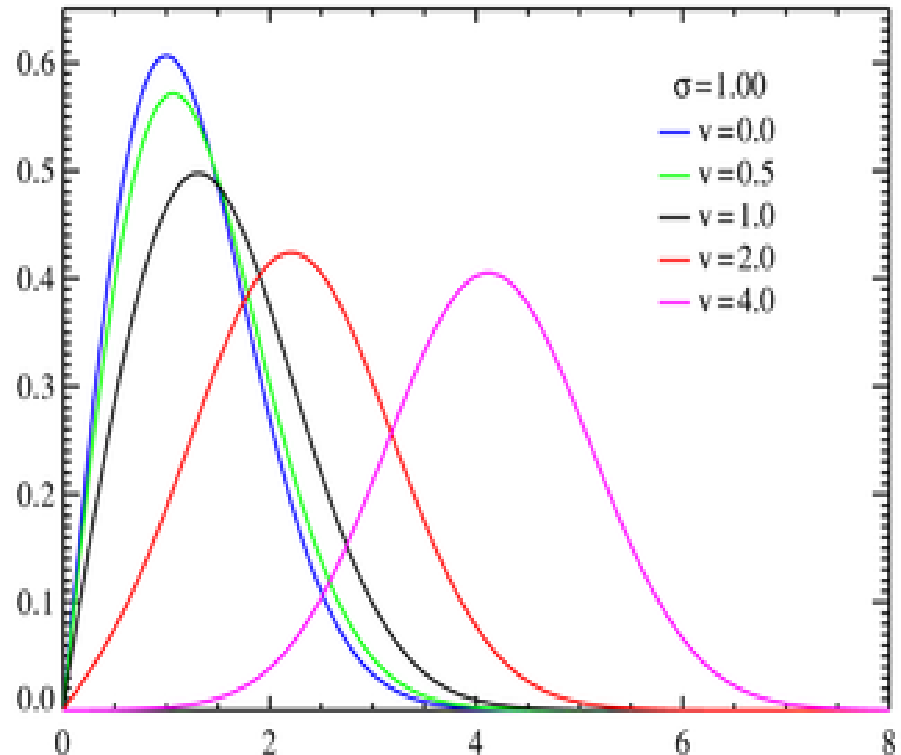
восстановление исходного, не искаженного шумом сигнала на основе полученных в результате решения двухпараметрической задачи значений статистических параметров математического ожидания и дисперсии по данным выборок измерений, в рамках адекватной статистической модели.

# Особенности статистической модели Райса

Если  $X$  и  $Y$  - независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$  и ненулевыми математическими ожиданиями  $V$ , то величина  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  имеет распределение Райса с плотностью вероятности:

$$f(x|\nu, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + \nu^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right),$$

где  $I_0(z)$  - модифицированная функция Бесселя первого рода 0-го порядка



Плотность вероятности  
распределения Райса

# Сопоставление распределений Гаусса и Райса

$\nu$  - математическое ожидание;

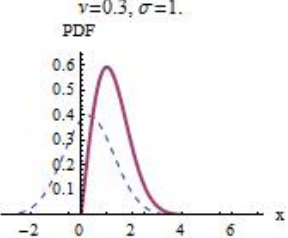
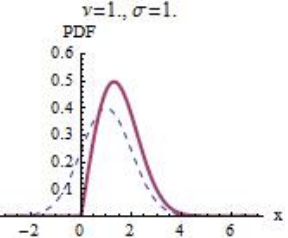
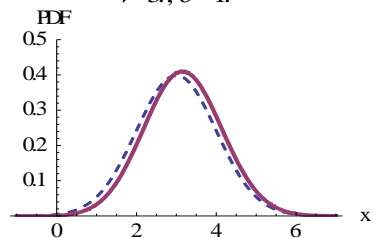
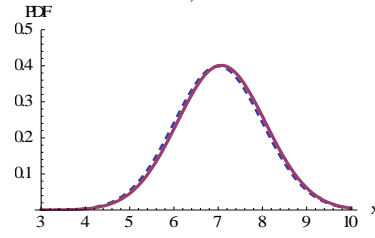
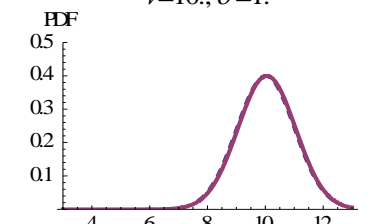
$\sigma$  - стандартное отклонение;

$x$  - анализируемый сигнал.

$$P_G(x|\nu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ - распределение Гаусса}$$

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right) \text{ - распределение Райса}$$

$$\text{При } \nu / \sigma \gg 1 \quad I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\} \quad P(x|\nu, \sigma^2) \xrightarrow{\frac{\nu}{\sigma} \gg 1} P_G(x|\nu, \sigma^2)$$

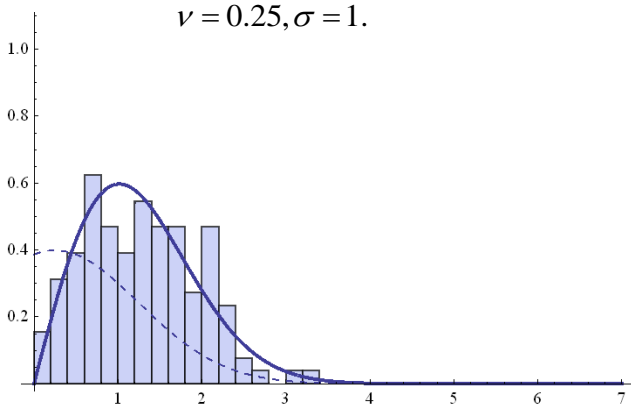
<p>a) <math>\nu = 0.3, \sigma = 1.</math> <math>\nu/\sigma = 0.3</math></p>	<p><math>\nu=0.3, \sigma=1.</math> PDF</p> 
<p>b) <math>\nu = 1., \sigma = 1.</math> <math>\nu/\sigma = 1</math></p>	<p><math>\nu=1., \sigma=1.</math> PDF</p> 
<p>b) <math>\nu = 3., \sigma = 1.</math> <math>\nu/\sigma = 3</math></p>	<p><math>\nu=3., \sigma=1.</math> PDF</p> 
<p>r) <math>\nu = 7., \sigma = 1.</math> <math>\nu/\sigma = 7</math></p>	<p><math>\nu=7., \sigma=1.</math> PDF</p> 
<p>d) <math>\nu = 10., \sigma = 1.</math> <math>\nu/\sigma = 10</math></p>	<p><math>\nu=10., \sigma=1.</math> PDF</p> 

# РЕЗУЛЬТАТЫ СОПОСТАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАУССА И РАЙСА

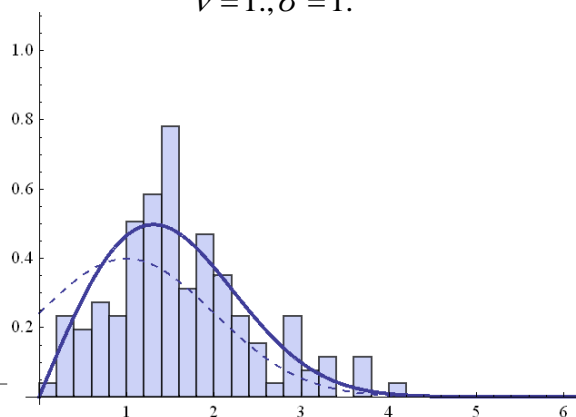
- Из проведенного сопоставления распределений Гаусса и Райса следует важный вывод: различием этих распределений между собой можно пренебречь только в интервале достаточно больших значений отношения сигнала к шуму ( $\nu / \sigma \geq 7$ ).
- Расхождение функций плотности вероятности, соответствующих статистическим распределениям Гаусса и Райса, в области не очень высоких значений отношения сигнала к шуму ( $\nu / \sigma < 7$ ) приводит к появлению сдвига (the bias) в измеряемом уровне сигнала при использовании Гауссовского приближения для описания магнитно-резонансной визуализации, вместо адекватного Райсовского.

Диаграммы распределения случайной Райсовской величины, а также функции плотности вероятности распределений Райса (сплошная линия) и Гаусса (пунктирная линия) при различных значениях отношения сигнала к шуму.

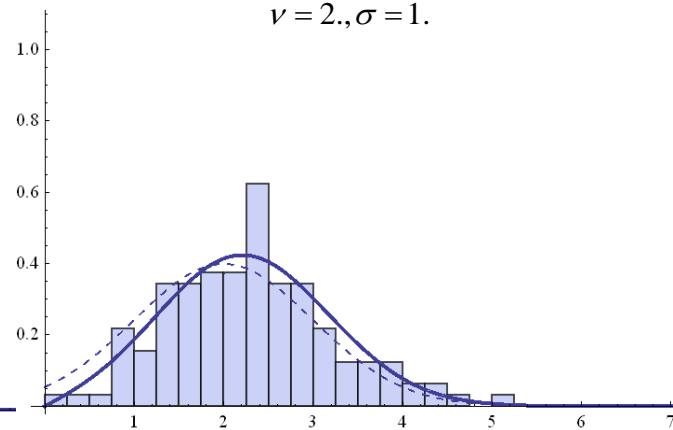
$\nu = 0.25, \sigma = 1.$



$\nu = 1., \sigma = 1.$



$\nu = 2., \sigma = 1.$

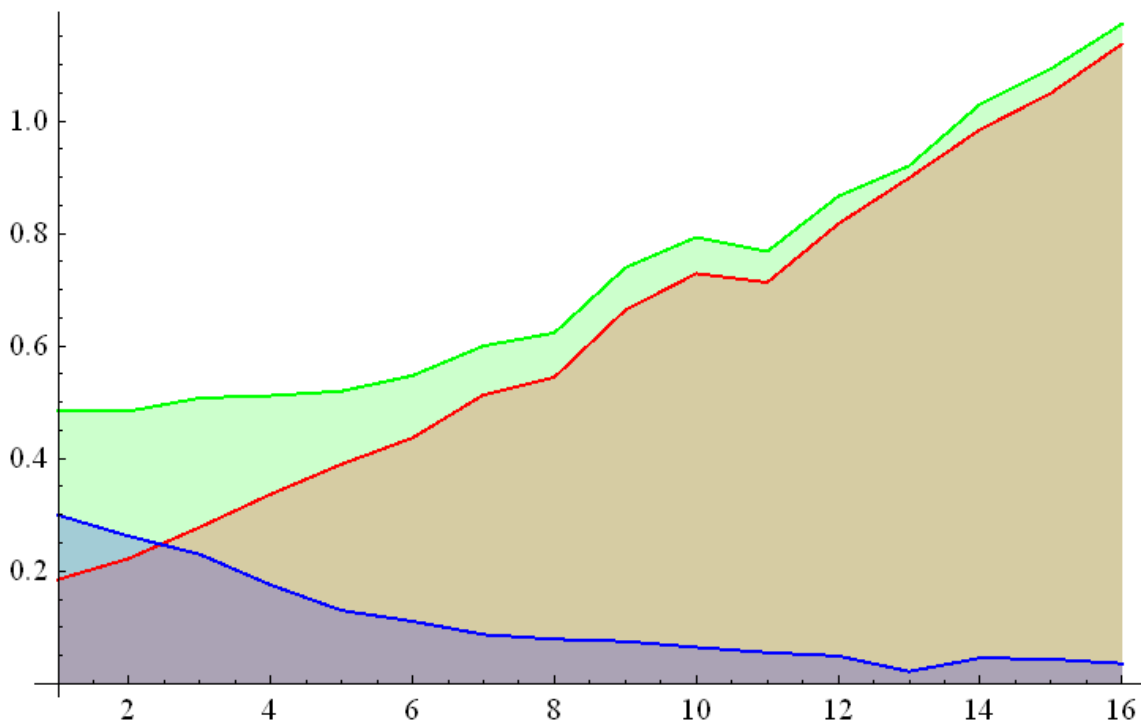


### **Вывод:**

Расчет величины Райсовского случайного сигнала по измеренным значениям выборки будет существенно отличаться в зависимости от того, производятся ли данные измерения в рамках статистической модели Райса или Гаусса.



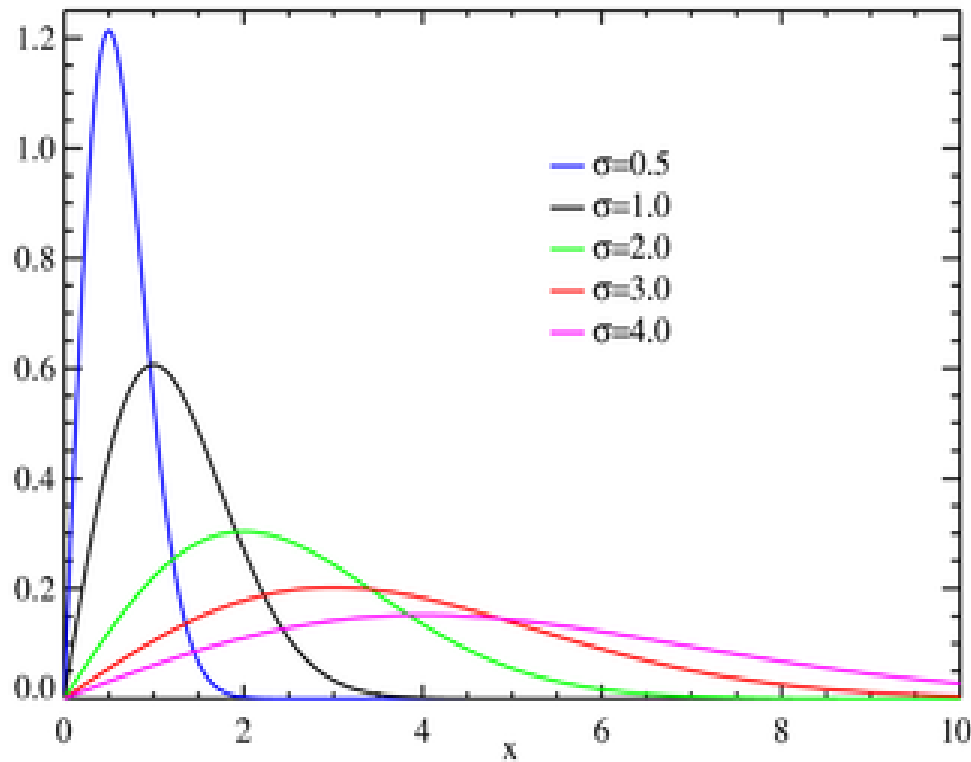
Иллюстрация «сдвига» между расчетными значениями величины математического ожидания сигнала при использовании для расчетов функции плотности вероятности распределения Райса (зеленая линия) и Гаусса (красная линия), определяемого разностью значений, полученных в результате расчетов с использованием обеих статистических моделей (синяя линия). Кривые рассчитаны при постоянном значении дисперсии сигнала:  $\sigma^2 = 1$ .



# Распределение Рэлея – частный случай распределения Райса при $\nu = 0$

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), x \geq 0, \sigma > 0,$$

$\sigma^2$  - дисперсия



Плотность вероятности распределения Рэлея

# РЕШЕНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА РАЙСОВСКИХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

Задача определения неизвестных статистических параметров распределения Райса посредством применения метода максимума правдоподобия является актуальной, в частности, для целей обработки магнитно-резонансных изображений и других приложений модели Райса.

Разработанный теоретический метод позволил получить алгоритм шумоподавления путем вычисления не только величины математического ожидания, но и второго статистического параметра – дисперсии сигнала, формирующего изображение.

Предлагаемый двухпараметрический метод с точки зрения возможности его реализации оказывается не сложнее, чем в случае однопараметрической оптимизации.

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРАВДОПОДОБИЯ

$\nu$  - математическое ожидание действительной и мнимой частей измеряемого сигнала;

$\sigma^2$  - дисперсия Гауссовского шума, искажающего сигнал  $x$  .

Амплитуда сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$  имеет распределение Райса:

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right)$$

$I_\alpha(z)$  - модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка  $\alpha$  .

# ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом  $i$ -того измерения является величина  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из данной выборки:

$$L(\nu, \sigma) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \nu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия для распределения Райса:

$$\ln L(\nu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \ln P(x_i | \nu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \left\{ -2 \cdot \ln \sigma - \frac{x_i^2 + \nu^2}{2 \cdot \sigma^2} + \ln I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \right\}$$

# УРАВНЕНИЯ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Система уравнений для определения неизвестных статистических параметров правдоподобия  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \end{cases}$$

Трудности решения системы уравнений с двумя неизвестными:

- ✓ Сложность определения условий существования и единственности решения исходной системы уравнений;
- ✓ Сложность теоретической оценки характера найденных экстремумов ;
- ✓ Сложность численного решения: возникает необходимость оптимизации сразу по двум параметрам, что усложняет построение численного алгоритма и увеличивает объем вычислений.

**ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА** - задача определения одного неизвестного параметра  $\nu$  в предположении, что  $\sigma^2$  известно *a priori*

---

Уравнение максимума правдоподобия для определения неизвестного параметра  $\nu$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \nu} \ln I_0 \left( \frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) - \frac{\nu}{\sigma^2} = 0$$

$n$  - количество элементов в выборке.

$$\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$$

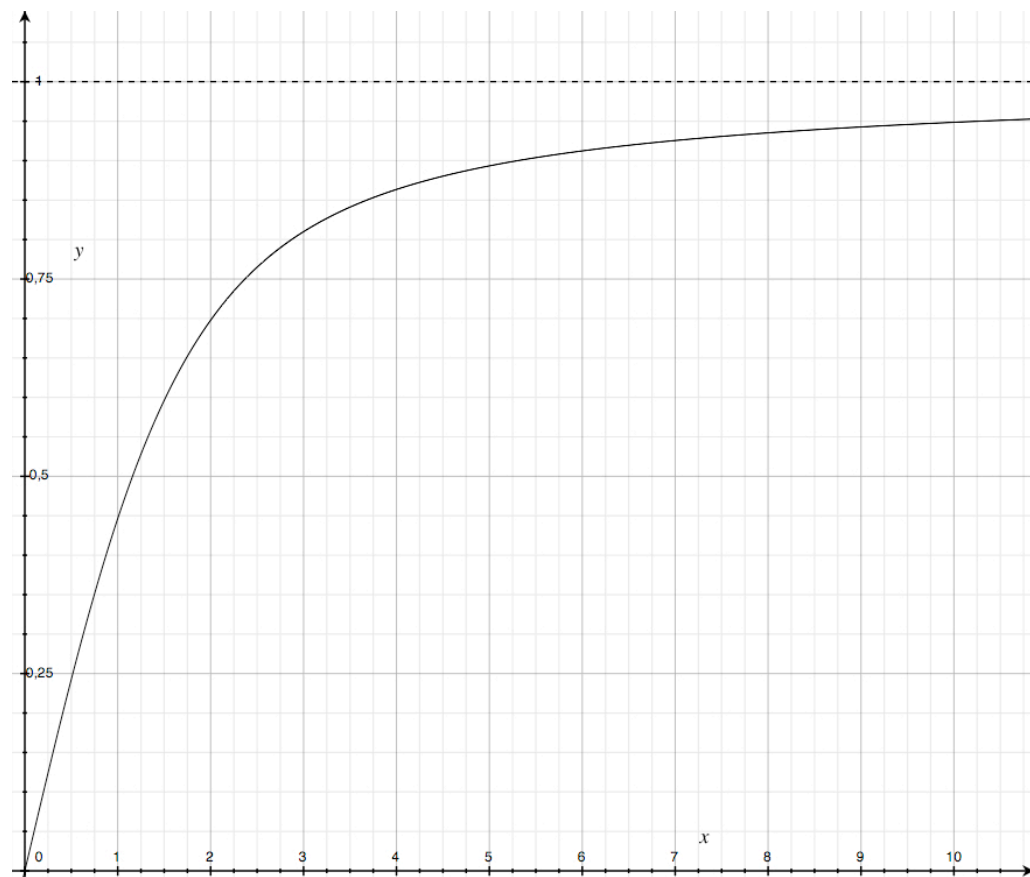
$$\tilde{I}(z) = \frac{d}{dz} \ln I_0(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$$

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{I} \left( \frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) \cdot x_i$$

- однопараметрическое уравнение максимума правдоподобия

Функция  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$

$\tilde{I}(z)$



$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{I}(z) = 1 - \frac{1}{z} \cdot \tilde{I}(z) - \tilde{I}^2(z)$$

$z$



# ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Среднее значение квадрата случайной величины, подчиняющейся распределению Райса, удовлетворяет условию:  $\overline{x^2} \geq 2 \cdot \sigma^2$

**Лемма 1:**

$$\overline{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \langle x^2 \rangle > 2 \cdot \sigma^2$$

**Лемма 2**

Функция  $\tilde{I}(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:  $\frac{d}{dz} \tilde{I}(z) = 1 - \frac{1}{z} \cdot \tilde{I}(z) - \tilde{I}^2(z)$

$$I_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \Rightarrow \tilde{I}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{z}{2} \cdot \left( 1 - \frac{z^2}{8} + O(z^4) \right)$$

$$I_{\alpha}(z) \underset{z \gg 1}{\sim} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{4\alpha^2 - 1}{8z} + \frac{(4\alpha^2 - 1) \cdot (4\alpha^2 - 9)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right\} \Rightarrow \tilde{I}(z) \underset{z \gg 1}{\sim} 1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

### Лемма 3

Функция  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$  является монотонно возрастающей и выпуклой  
вверх на интервале  $(0, +\infty)$

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = \frac{I_0(z) \cdot I_1'(z) - I_1^2(z)}{I_0^2(z)} \qquad I_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cdot \cos(lt) dt$$

$$\begin{aligned} I_1'(z) \cdot I_0(z) - I_1^2(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi dt dt' e^{z(\cos t + \cos t')} \left( \frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t' - \cos t \cdot \cos t' \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dt dt' e^{z(\cos t + \cos t')} (\cos t - \cos t')^2 \end{aligned}$$

# ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{I} \left( \frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) \cdot x_i \quad (1)$$

## *Теорема 1:*

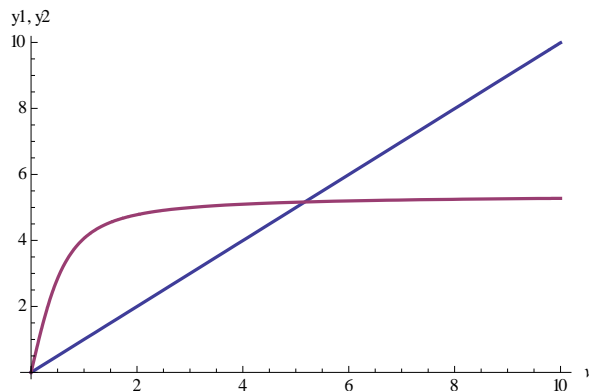
Решение уравнения (1) при отличном от нуля, положительном значении аргумента  $\nu > 0$  существует и единственно.

Условие существования нетривиального решения уравнения (1):  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} > 1$

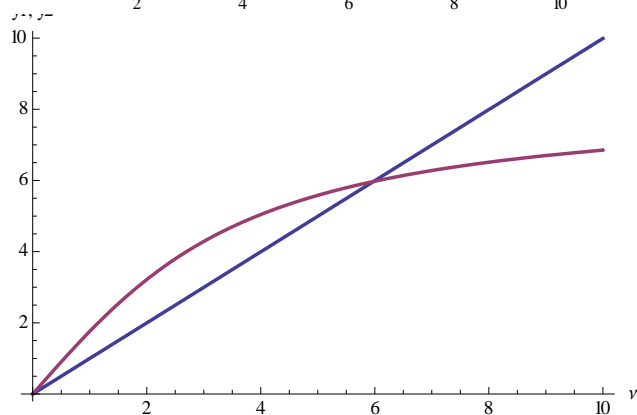
$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \langle x^2 \rangle > 2 \cdot \sigma^2$$

# Иллюстрация существования единственного нетривиального решения в однопараметрическом приближении

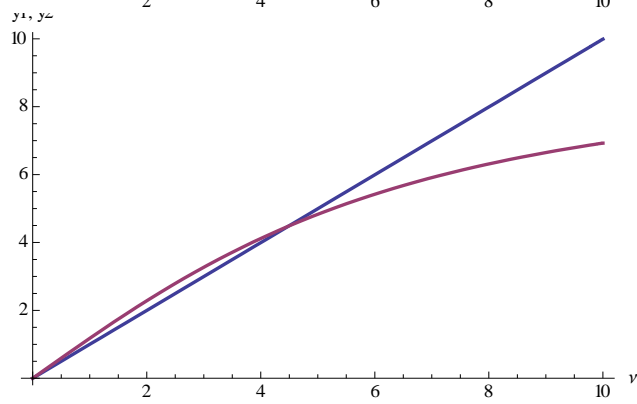
$\nu = 5.$   
 $\sigma = 1.5$   
 $\nu / \sigma = 3.33$



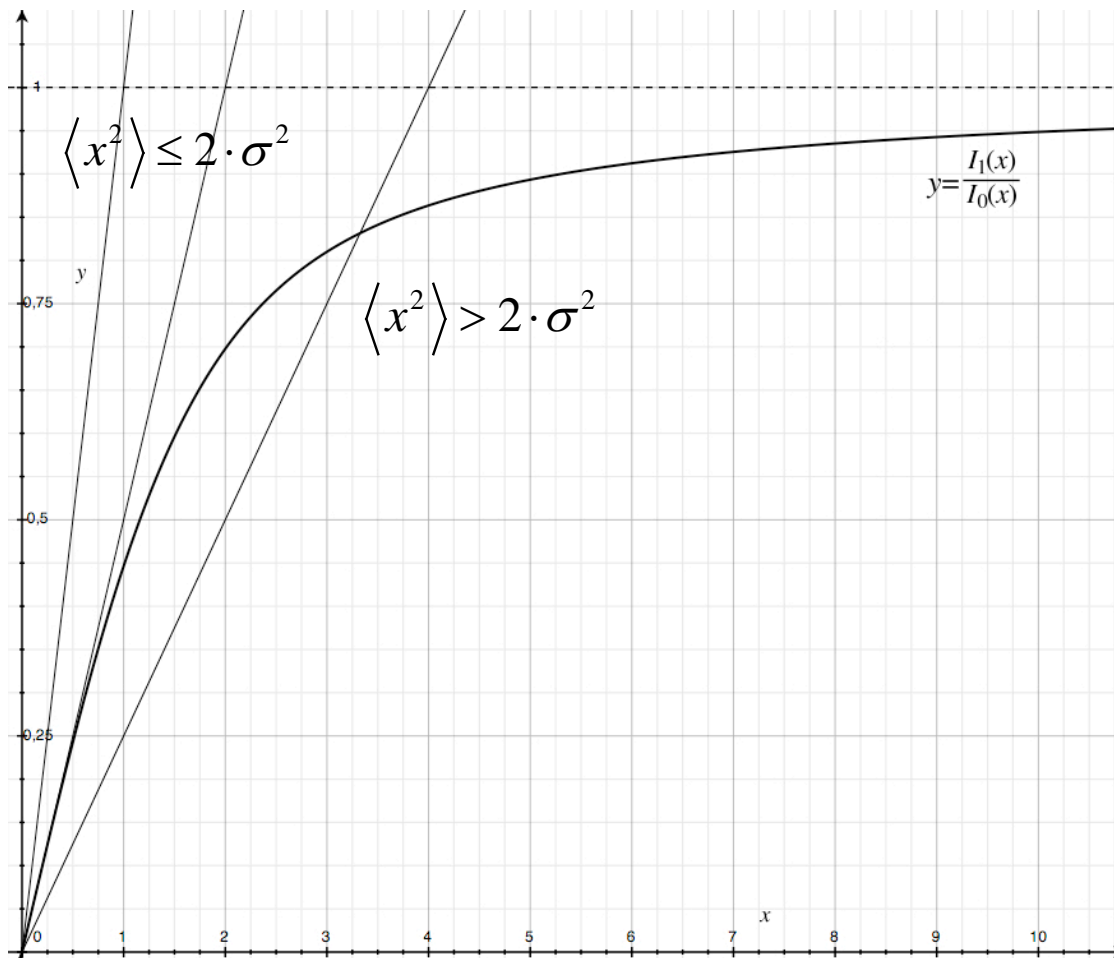
$\nu = 5.$   
 $\sigma = 5.$   
 $\nu / \sigma = 1.$



$\nu = 5.$   
 $\sigma = 7.$   
 $\nu / \sigma = 0,71$



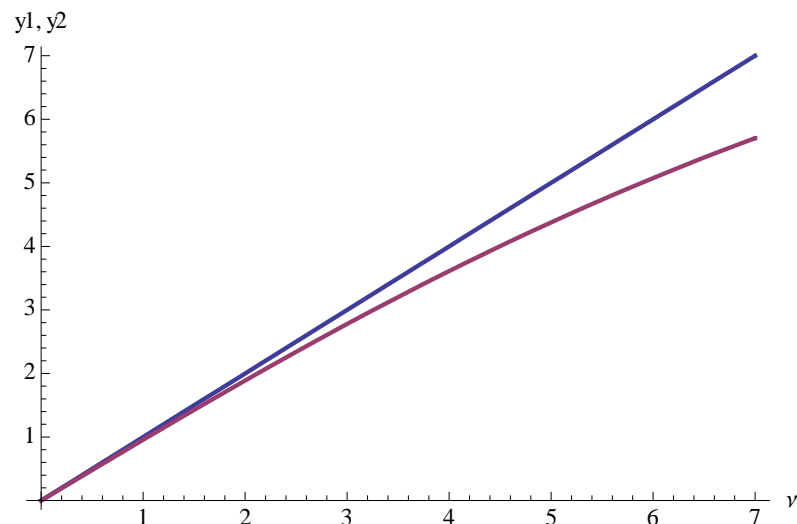
# Геометрическая иллюстрация к доказательству существования и единственности решения однопараметрического уравнения максимума правдоподобия



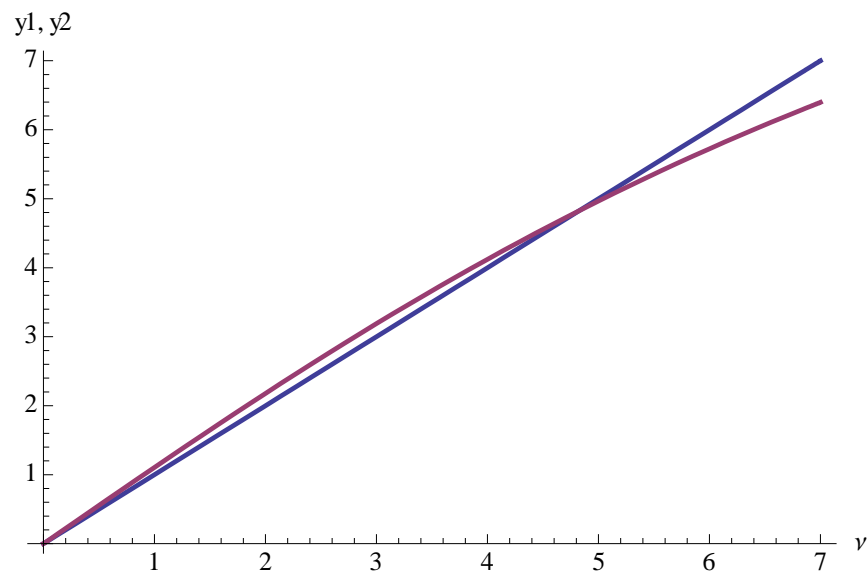
# Графики, иллюстрирующие существование нетривиального решения уравнения максимума правдоподобия при достаточно большой длине выборки

а)  $n = 32$

$\nu = 5.$   $\nu / \sigma = 0.5$   
 $\sigma = 10.$



б)  $n = 64$



## Анализ знака второй производной для оценки характера экстремума функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) = \frac{n}{\sigma^2} \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{\sigma^2} - 1 - \frac{1}{n \cdot \sigma^2} \sum_{i=1}^n \left[ x_i^2 \cdot \frac{\tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} + \tilde{I}^2\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \right] \right\}$$

При  $\nu \ll 1$ : 
$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) \sim \frac{n}{\sigma^2} \cdot \left( \frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} - 1 \right)$$

1. Не Рэлеевское распр. (Лемма 1)  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} > 1 \implies \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) > 0$

Тривиальное решение соответствует минимуму функции правдоподобия.

2. Распр. Рэля  $\langle x^2 \rangle < 2\sigma^2 \implies \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) < 0$

Тривиальное решение соответствует максимуму функции правдоподобия.

# МЕТОД МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Система уравнений правдоподобия для определения неизвестных статистических параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) - \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) - \nu^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2 \right) \quad \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left( \frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2} \right)$$

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left( \frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} \right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot (\langle x^2 \rangle - \nu^2) \end{cases} \text{ - уравнение с одной неизвестной } \nu$$



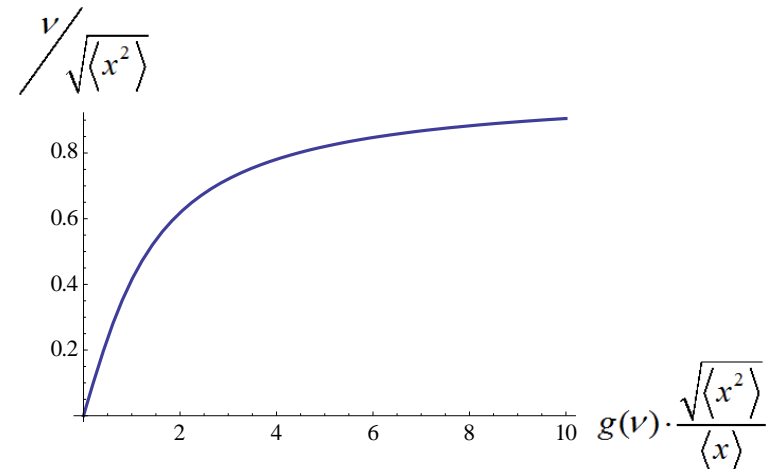
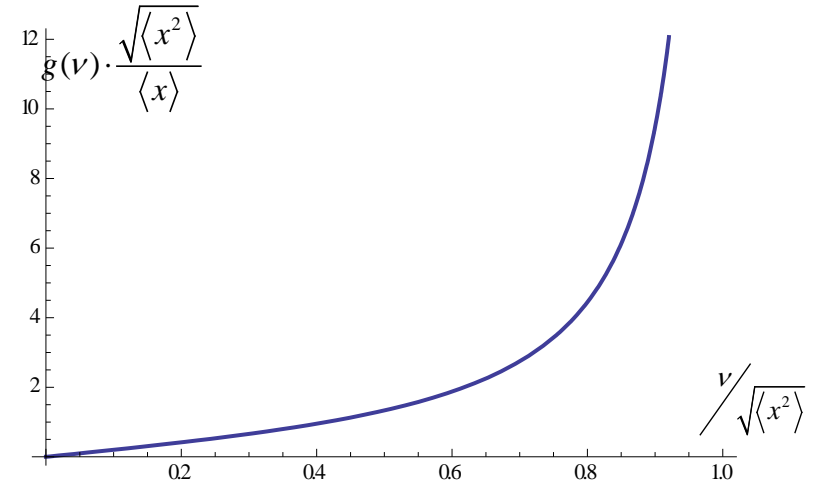
## Теорема 2

Решение системы уравнений максимума правдоподобия существует и единственно.

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left( \frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} \right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot (\langle x^2 \rangle - \nu^2) \end{cases}$$

$$g(\nu) = \frac{2 \cdot \langle x \rangle \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} \quad \nu = \xi(g(\nu))$$

$$\xi(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right)$$



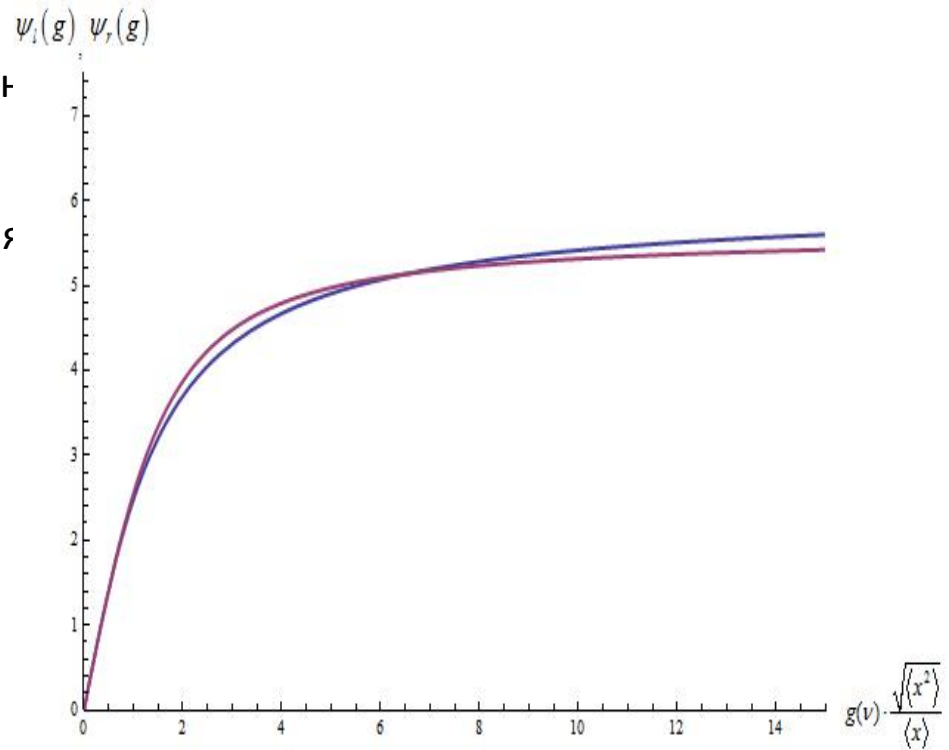
## К доказательству Теоремы 2:

Решение системы уравнений максимума правдоподобия сводится к решению уравнения для  $V$ , которое, в свою очередь, преобразуется к следующему уравнению для введенной переменной  $g(v) = \frac{2 \cdot \langle x \rangle \cdot v}{\langle x^2 \rangle - v^2}$ :

$$\xi(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right)$$

$$\psi_r(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right) \quad \text{-правая часть уравнения}$$

$$\psi_l(g) = \xi(g) \quad \text{-левая часть уравнения}$$

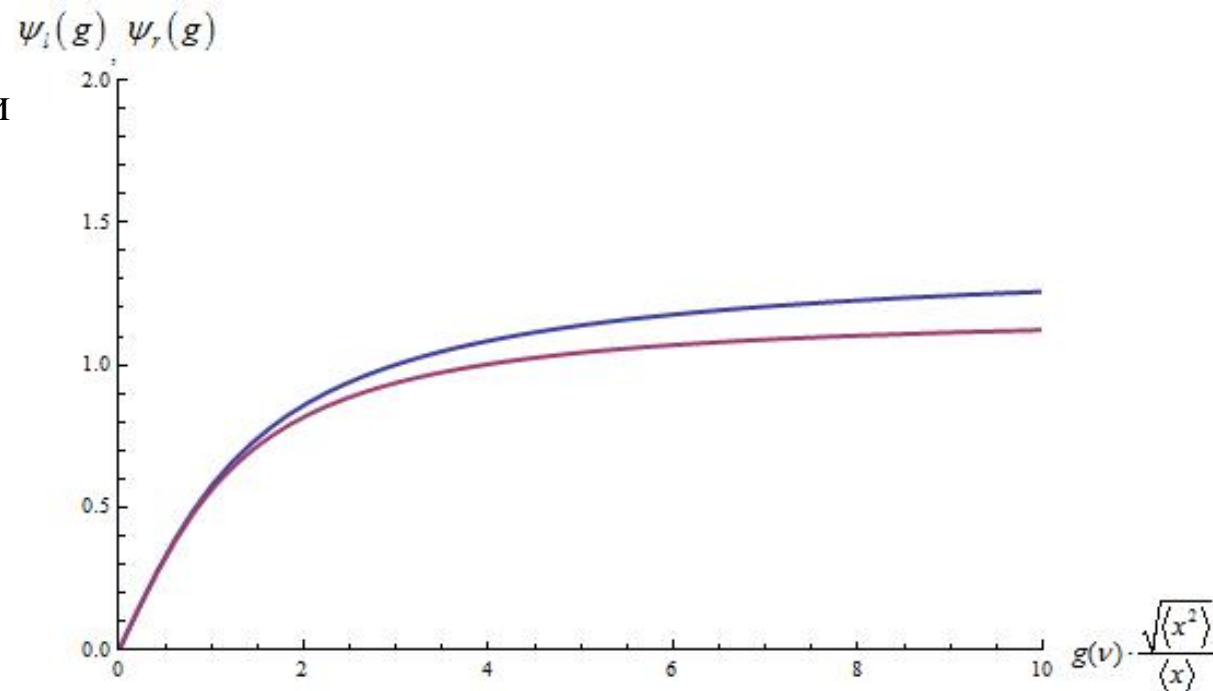


Графическая иллюстрация решения уравнения для  $g(v) = \frac{2 \cdot \langle x \rangle \cdot v}{\langle x^2 \rangle - v^2}$ :

# Наличие единственного тривиального решения уравнения для параметра $\nu$ в частном случае распределения Рэлея

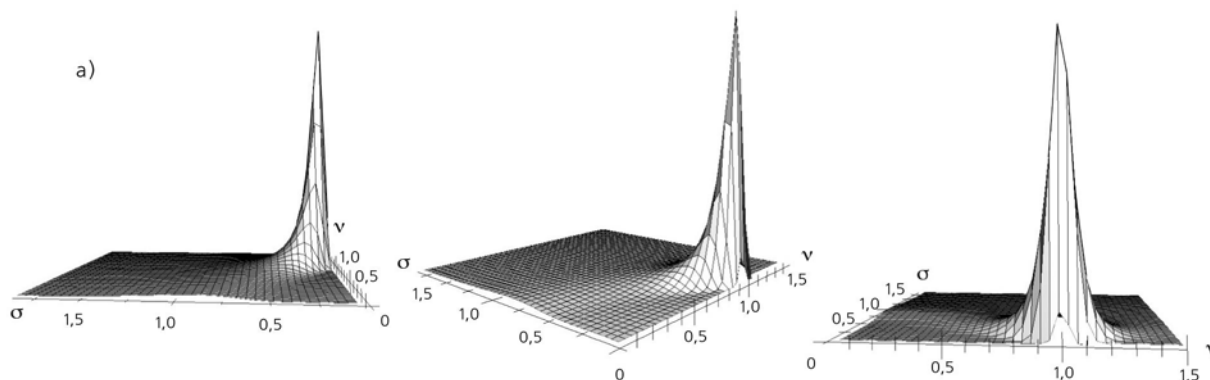
Графическая иллюстрация отсутствия нетривиального решения при распределении Рэлея:  $\nu = 0$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot \langle x^2 \rangle$$

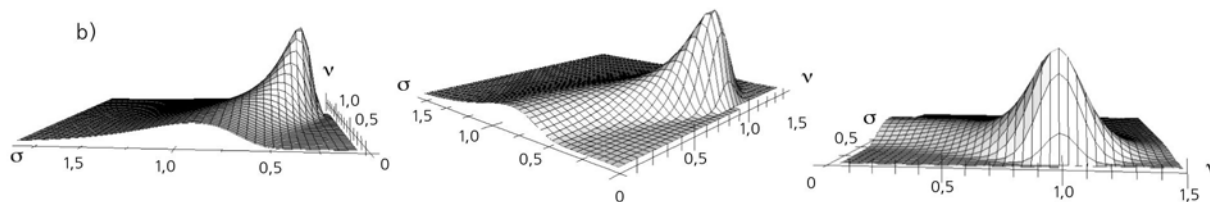


# Зависимость формы функции правдоподобия распределения Райса от отношения сигнала к шуму

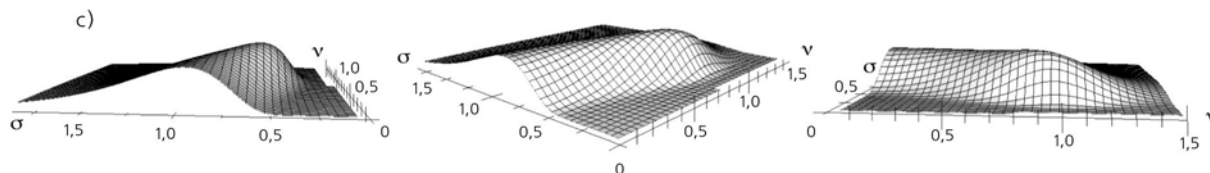
a)  $\nu = 1, \sigma = 0,1$



b)  $\nu = 1, \sigma = 0,25$



c)  $\nu = 1, \sigma = 0,5$



Характерная ширина функции правдоподобия как функции параметра  $\nu$  в сечениях  $\sigma = const$   
 больше, чем характерная ширина функции правдоподобия как функции параметра стандартного  
 отклонения  $\sigma$  в сечениях  $\nu = const$

# Решение двухпараметрической задачи максимума правдоподобия путем введения новых переменных

Система уравнений правдоподобия для определения неизвестных статистических параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L(\nu, \sigma) = 0 \end{cases}$$

Плотность вероятности  $\hat{P}(x|\nu, \gamma)$  в переменных  $\nu$  и  $\gamma = \frac{\nu}{\sigma^2}$ :

$$\hat{P}(x|\nu, \gamma) = \frac{x\gamma}{\nu} \cdot \exp\left[-\frac{\gamma\nu}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\nu^2} + 1\right)\right] \cdot I_0(x\gamma)$$

Система уравнений для параметров  $\nu$  и  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \nu = S(\gamma) \\ \gamma = \frac{2\nu}{\langle x^2 \rangle + \nu^2 - 2\nu S(\gamma)} \end{cases}$$

$$S(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I}(x_i \gamma)$$

# Решение двухпараметрической задачи

Уравнение для параметра  $\gamma = \frac{\nu}{\sigma^2}$  :

$$\gamma = \frac{2S(\gamma)}{\langle x^2 \rangle - S^2(\gamma)} \quad (*)$$

$$S(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I}(x_i \gamma) \quad \text{-линейная комбинация функций } \tilde{I} = \frac{I_1}{I_0}$$

## Теорема:

Решение уравнения (\*) для параметра  $\gamma > 0$  существует и единственно. Это решение соответствует максимуму функции правдоподобия.

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАЙСОВСКОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

## Однопараметрическая задача

$$\nu \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{\frac{\langle x^4 \rangle}{4 \cdot \sigma^4}}} \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} - 1}$$

$$\nu \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\approx} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \langle x \rangle$$

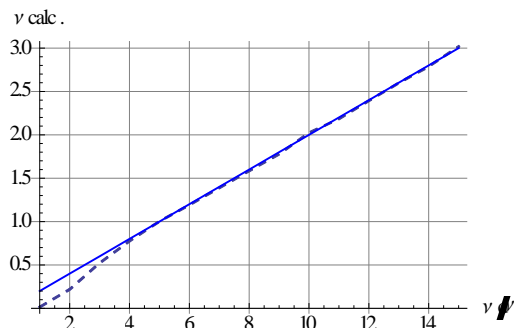
## Двухпараметрическая задача

$$\nu \underset{\sigma \frac{\nu}{\sigma} \ll 1}{\approx} \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle \left( 1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \cdot \langle x^2 \rangle^2} \right)}{\left( 4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3} \right)}}$$

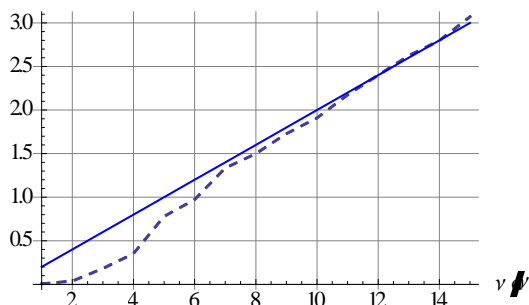
$$\sigma^2 \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} \frac{\langle x^2 \rangle}{2} \cdot \frac{\left( 3 - \frac{\langle x^6 \rangle}{6 \langle x^2 \rangle^3} \right)}{\left( 4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3} \right)}$$

$$\nu \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\approx} \langle x \rangle \quad \sigma^2 \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\approx} \frac{1}{2} \left( \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right) = \frac{1}{2} \sigma_x^2$$

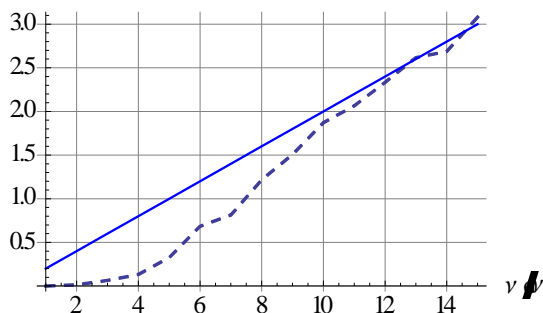
# Результаты численного моделирования расчетов искомых параметров задачи



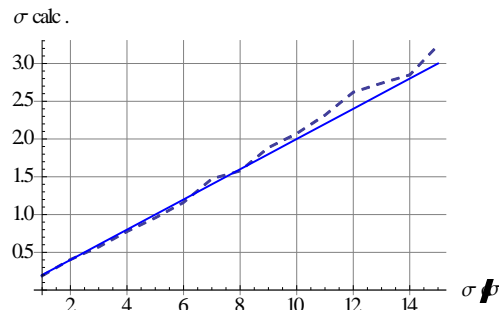
$\sigma = 1.2$



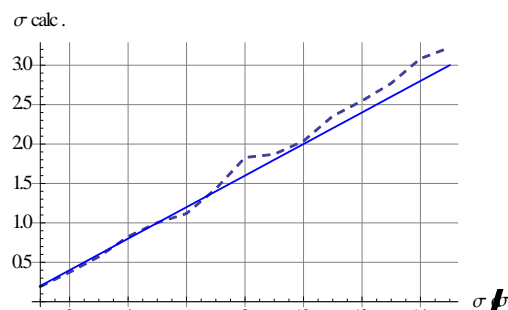
$\sigma = 0.8$



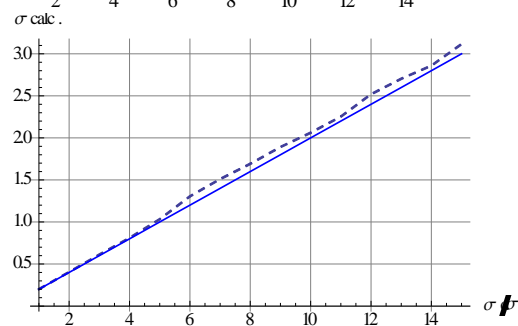
$\sigma = 0.4$



$\nu = 3.$



$\nu = 2.$



$\nu = 1.$

$\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2,  
n=16

$\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2,  
n=16



# Таблица: Оценка погрешностей исследованных методов

Параметр	Вид погрешности, метод измерения	n=4	n=8	n=16	n=32	n=64
$\nu$	Максимальное систематическое смещение, однопараметрический метод	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2
	Максимальное систематическое смещение, двухпараметрический метод	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
	Максимальное среднеквадратичное отклонение, однопараметрический метод	0,68	0,63	0,58	0,53	0,49
	Максимальное среднеквадратичное отклонение, двухпараметрический метод	0,7	0,53	0,42	0,35	0,18
$\sigma$	Максимальное систематическое смещение при малых $\nu$	-0,4	-0,39	-0,21	-0,16	-0,12
	Асимптотическое систематическое смещение оценки при больших $\nu$	-0,2	-0,1	-0,04	-0,02	-0,01
	Максимальное среднеквадратичное отклонение при малых $\nu$	0,4	0,33	0,26	0,21	0,17
	Асимптотическое среднеквадратичное отклонение при больших $\nu$	0,3	0,25	0,18	0,13	0,09

# Практическая ценность развитого двухпараметрического метода максимума правдоподобия

- Важным результатом проведенного теоретического исследования является *возможность определения двух искомых параметров*: сигнала и шума, *без дополнительных вычислительных ресурсов*, по сравнению с традиционно используемым однопараметрическим приближением.
- Доказательство *единственности решения задачи* расчета параметров сигнала и шума методом максимума правдоподобия имеет существенное значение для практического применения: получение первого численного решения уравнения означает возможность прерывания процедуры расчета, так как полученное решение является единственным.
- Предлагаемый метод разработан на основе *статистической модели Райса*, единственно правильной для описания рассматриваемых задач при произвольном соотношении величин сигнала и шума, в отличие от распределения Гаусса, которое применимо к таким задачам только при достаточно высоком отношении сигнала к шуму ( при  $\nu > 7\sigma$  ).

# МЕТОДЫ МОМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА РАЙСОВСКИХ СИГНАЛОВ

- Представлено теоретическое обоснование и проведен математический анализ возможности решения двухпараметрической задачи для Райсовского сигнала посредством вариантов метода моментов.
- В обоих вариантах расчет искомых параметров проводится на основе использования значений моментов случайной Райсовской величины, используя данные выборок измерений.
- В первом варианте метода моментов для решения задачи используются второй и четвертый моменты (ММ24), а во втором варианте искомые параметры вычисляются на основе измеренных данных для первого и второго моментов анализируемого случайного сигнала (ММ12).

$K$  -ый момент случайной величины  $x$ :

$$\overline{x^K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^K$$

# Двухпараметрический метод, основанный на использовании 2-го и 4-го моментов случайной величины (ММ24)

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2 \\ \overline{x^4} &= 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot \nu^2 + \nu^4\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\nu^2 &= \overline{x^2} \sqrt{1-t} \\ \sigma^2 &= \frac{\overline{x^2}}{2} (1 - \sqrt{1-t})\end{aligned}$$

$$t = \frac{\overline{x^4}}{(\overline{x^2})^2} - 1 \quad 0 < t \leq 1$$

Распределение Рэлея (  $\nu = 0$  ):

$$t = 1 \quad \sigma^2 = \frac{\overline{x^2}}{2}$$

# Двухпараметрический метод, основанный на использовании 1-го и 2-го моментов случайной величины (ММ12)

Формула для 1-го момента Райсовской величины:

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot L_{1/2} \left( -v^2 / 2\sigma^2 \right)$$

$$L_{1/2} - \text{полином Лагерра (Laguerre): } L_{1/2}(z) = e^{z/2} \left[ (1-z) I_0 \left( \frac{-z}{2} \right) - z I_1 \left( \frac{-z}{2} \right) \right]$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \left[ (1+r) I_0 \left( \frac{r}{2} \right) + r I_1 \left( \frac{r}{2} \right) \right] = \langle x \rangle \\ 2\sigma^2 (1+r) = \langle x^2 \rangle \end{cases} \quad r = \frac{v^2}{2\sigma^2}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \langle x^2 \rangle \cdot \sqrt{1+r} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot I_0 \left( \frac{r}{2} \right) \left[ 1 + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I} \left( \frac{r}{2} \right) \right] = \langle x \rangle - \text{уравнение метода ММ12 для } r$$

# Решение уравнения, соответствующего методу ММ12

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \langle x^2 \rangle \cdot \sqrt{1+r} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right) \left[1 + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right)\right] = \langle x \rangle \quad \Rightarrow$$

$$1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\langle x \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$f_1(r) = 1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) \quad f_2(r) = \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$f_1(r) = f_2(r) \quad \alpha = \frac{\langle x \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) > 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} > \langle x \rangle \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \alpha < 1$$

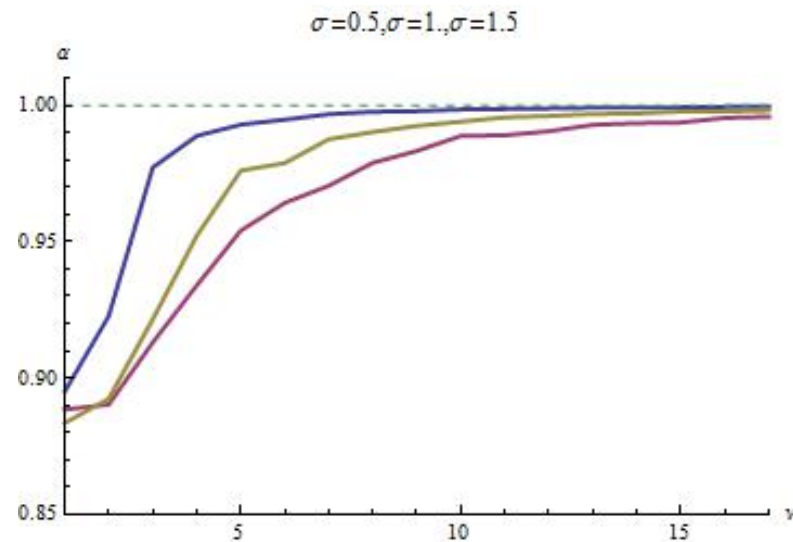


График величины  $\alpha$

# Свойства решения уравнения метода ММ12

Доказана теорема о существовании решения уравнения  $f_1(r) = f_2(r)$  где:

$$f_1(r) = 1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right)$$

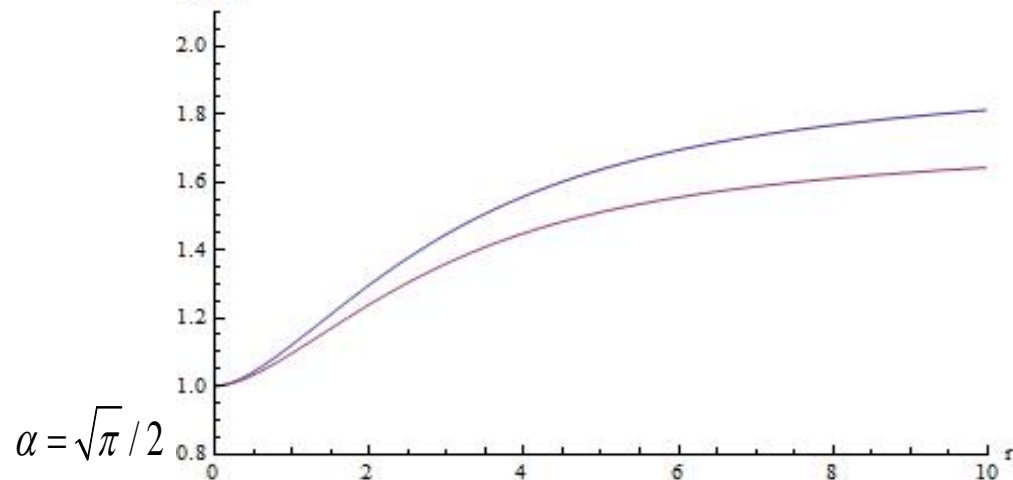
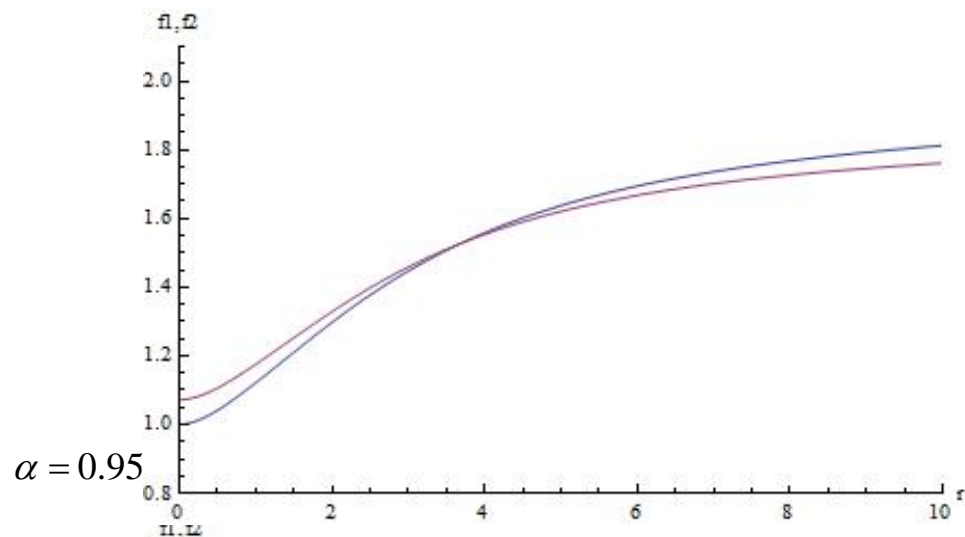
$$f_2(r) = \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Решение для искомых параметров задачи:

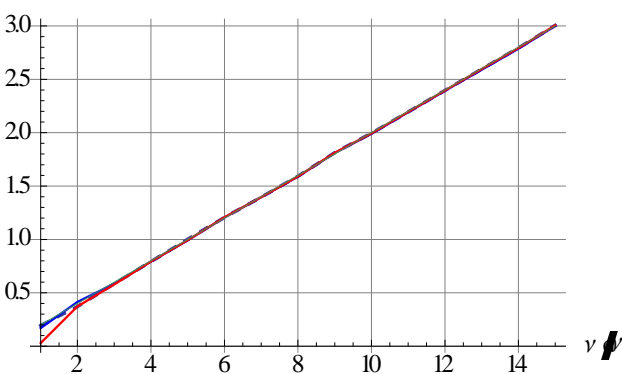
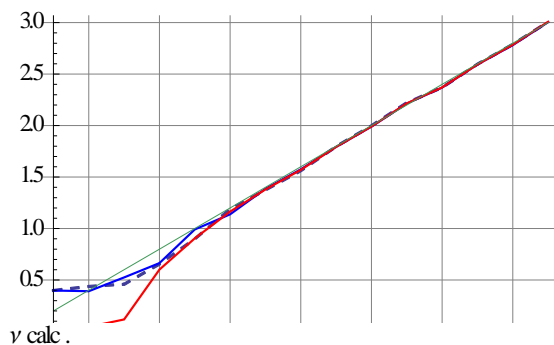
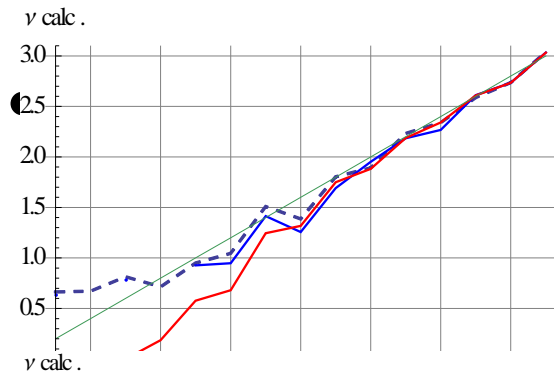
$$\nu = \sqrt{\frac{r}{1+r}} \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

$$\sigma^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{2(1+r)}$$

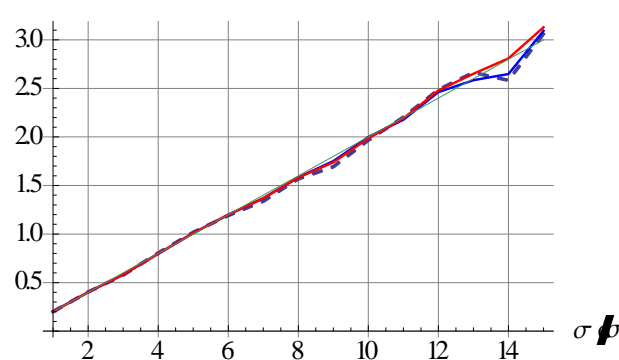
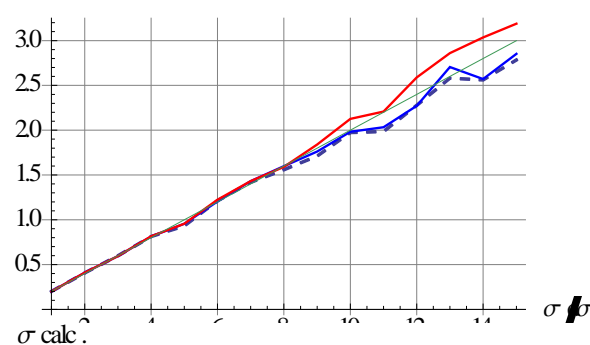
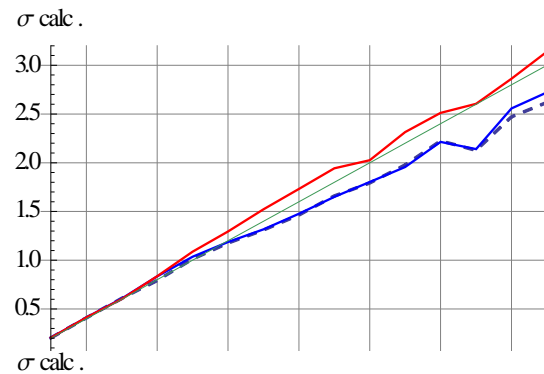
Графическая иллюстрация существования и единственности решения уравнения



# СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ



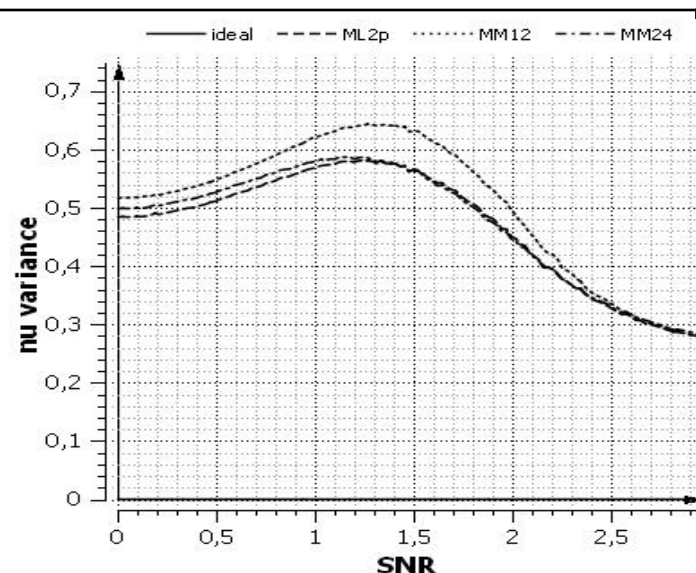
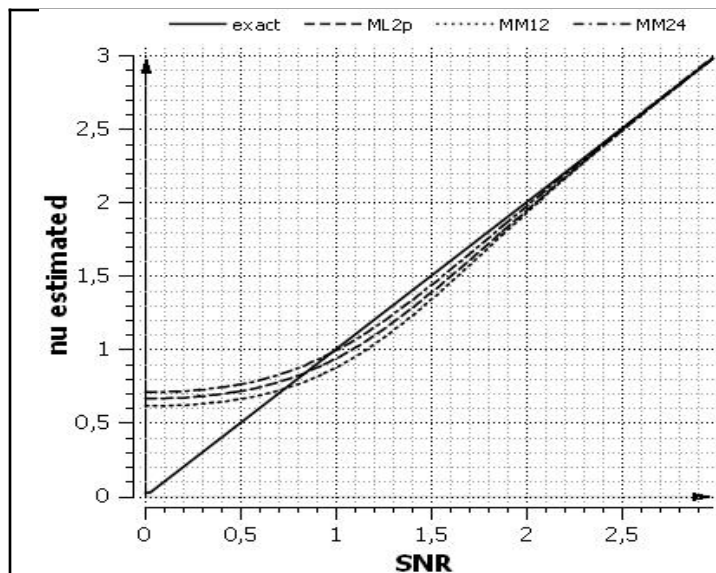
$\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2,  $n=64$



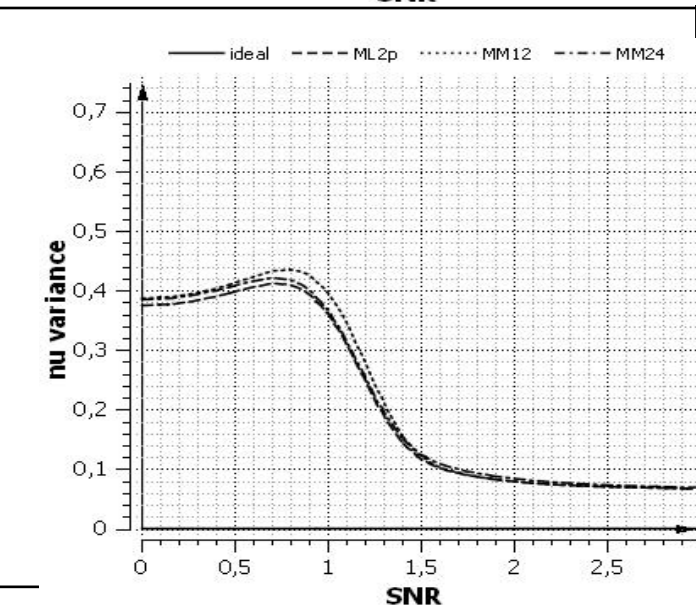
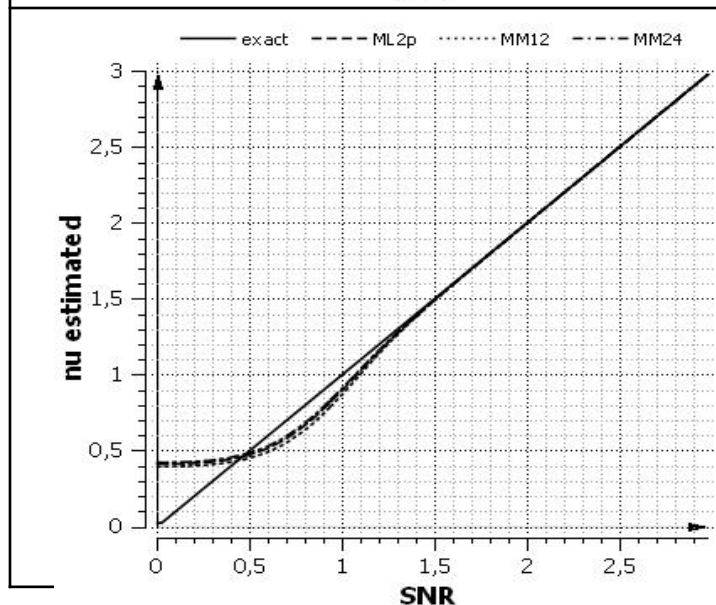
$\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2,  $n=64$



# Графики значений параметра $\nu$ (слева) и их среднеквадратичных отклонений (справа), рассчитанных методами МП, ММ12, ММ24

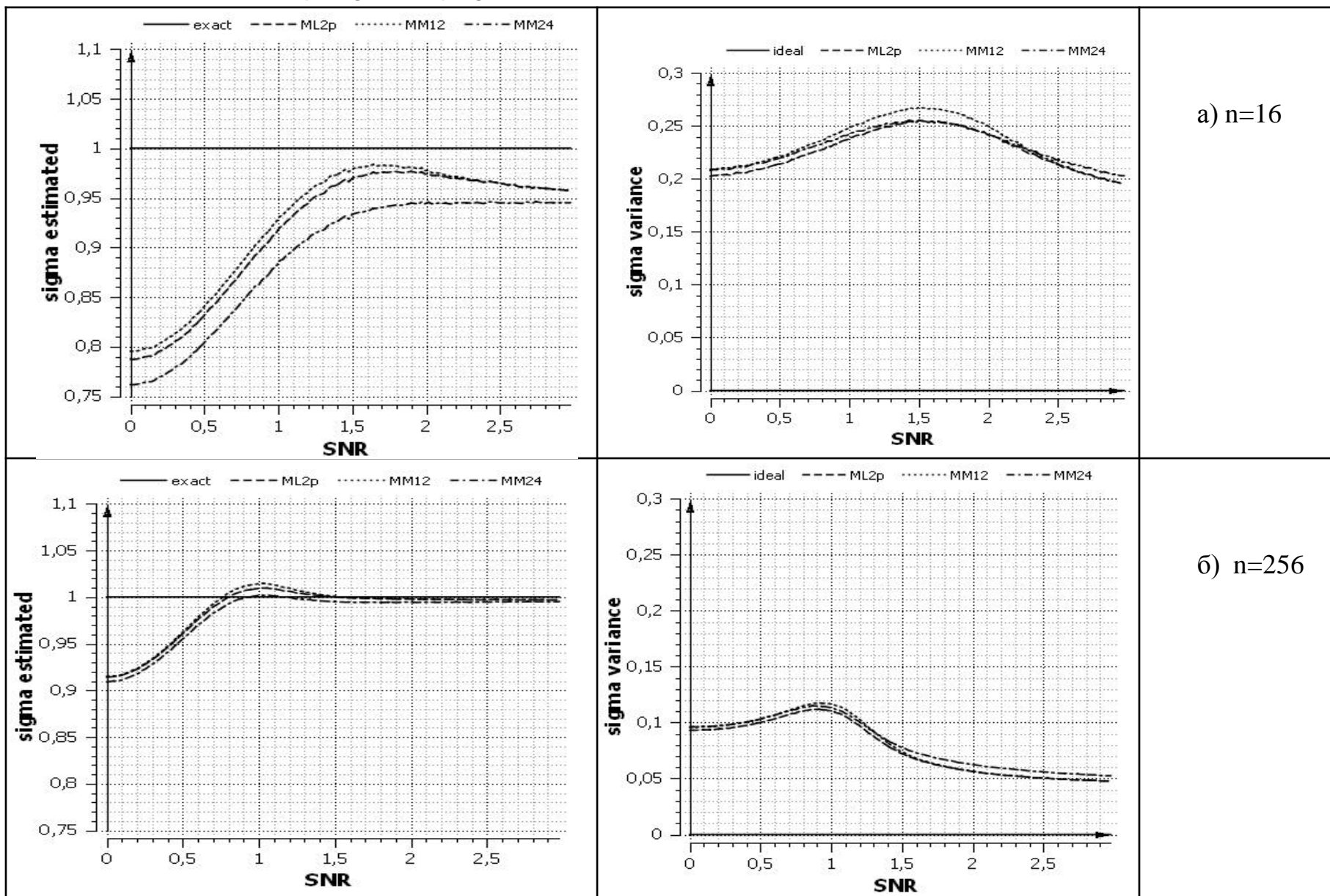


a)  $n=16$



б)  $n=256$

# Графики значений параметра $\sigma$ (слева) и их среднеквадратичных отклонений (справа), рассчитанных методами МП, ММ12, ММ24



## **Сопоставление развитых в работе методов по обеспечиваемой ими точности вычислений искомых параметров**

Как смещение, так и разброс данных при расчете искомых параметров заметно уменьшаются, и, соответственно, точность вычислений повышается с увеличением отношения сигнала к шуму и с ростом длины выборки измерений при решении двухпараметрической задачи всеми тремя рассматриваемыми методами МП, ММ12, ММ24. Наименьший разброс расчетных данных обеспечивается методом максимума правдоподобия, а с увеличением длины выборки и ростом отношения сигнала к шуму как смещение, так и разброс данных при расчете искомых параметров всеми рассматриваемыми методами выравниваются.

# ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- ✓ Решена задача одновременного вычисления неизвестных статистических параметров сигнала и шума в условиях распределения Райса;
- ✓ Развиты и обоснованы метод максимума правдоподобия (МП) и два варианта метода моментов (ММ24 и ММ12) для решения задачи расчета статистических параметров распределения Райса. Для каждого из развитых методов получена система уравнений для одновременного расчета сигнала и шума на основе данных выборок измерений;
- ✓ Доказаны существование и единственности решения двухпараметрической задачи каждым из рассматриваемых методов;
- ✓ Решение задачи анализа Райсовского сигнала методами математической статистики (МП, ММ24, ММ12) свободно от ограничений, присущих линейным методам обработки сигналов;
- ✓ Развитый двухпараметрический подход к анализу случайного Райсовского сигнала свободен от недостатков и ограничений традиционного однопараметрического приближения;
- ✓ Двухпараметрическая задача сведена к решению уравнения с одной переменной и поэтому не приводит к увеличению объема вычислений по сравнению с однопараметрическим случаем.
- ✓ Как показало компьютерное моделирование, сопоставляемые методы МП, ММ24 и ММ12 характеризуются примерно одинаковой точностью вычислений искомых параметров, при этом диапазон относительно высокой точности вычислений определяется условием  $\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ .
- ✓ Как смещение, так и разброс значений искомых параметров при решении задачи развитыми методами МП, ММ12, ММ24 уменьшаются, и, соответственно, точность вычислений повышается с увеличением отношения сигнала к шуму и с ростом длины выборки измерений.