Предельные теоремы для функционалов от слабо зависимых случайных полей

(представление докторской диссертации)

А.П.Шашкин

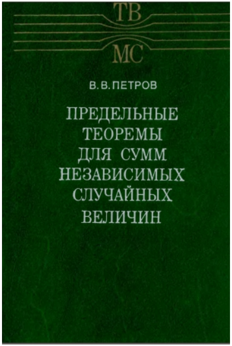
МГУ имени М.В.Ломоносова

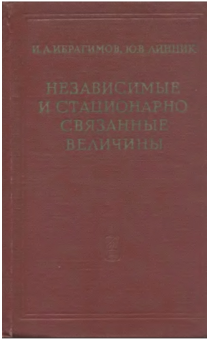
Москва, 28 мая 2014 года

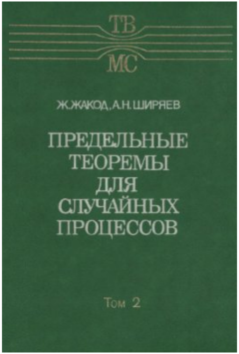
Содержание

1. Введение
2. Глава 1. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и их обобщений
3. Глава 2. Сильный принцип инвариантности
4. Глава 3. Предельные теоремы для геометрических функционалов от экскурсионных множеств
5. Список литературы
6. Апробация
7. Заключение

Предельные теоремы составляют основу классической и современной теории вероятностей



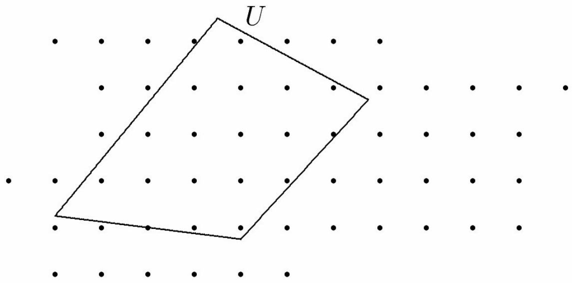





Предельные теоремы (в сильной и слабой формах)
Условия зависимости
Пространственные структуры
Предельные теоремы для зависимых случайных полей

Введение: случайные поля

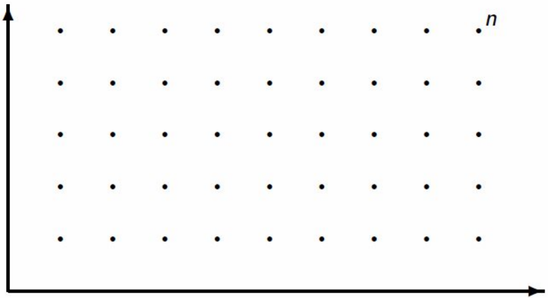
$X = \{X_t, t \in T\}$ (обычно $T = \mathbb{Z}^d$ или $T = \mathbb{R}^d$) — случайное поле



$S(U) = \sum_{j \in U} X_j$

Введение: случайные поля

$S_n = S((0, n])$, где $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$



Далее $\langle n \rangle = n_1 \ldots n_d$ и запись $n \to \infty$ подразумевает, что $\min_{i=1,\ldots,d} n_i \to \infty$.

В статистической физике, теории перколяции, астрофизике и т.п. важны зависимые случайные поля. Описание зависимости может быть разным (гауссовские, марковские, многопараметрические мартингалы, поля с перемешиванием и т.д.)

Ковариационные неравенства

Пусть $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ конечны, $f : \mathbb{R}^{|I|} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \to \mathbb{R}$ — функции из заданного класса ("пробные функции"), $X_I = \{X_i, i \in I\}$ и аналогично определяется X_J. Ковариационными неравенствами называются оценки вида

$$|cov(f(X_I), g(X_J))| \leq \psi(f, g, I, J, X),$$

где ψ — заданный функционал. Например, для процессов с α-перемешиванием пробные функции — это индикаторы борелевских множеств.

Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ называется ассоциированным ($X \in \mathbf{A}$), если для любых конечных $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ и произвольных ограниченных борелевских покоординатно неубывающих функций $f : \mathbb{R}^{|I|} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \to \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$cov(f(X_I), g(X_J)) \geq 0.$$

Поле X называется положительно (или слабо) ассоциированным ($X \in \mathbf{PA}$), если указанное свойство должно выполняться только при $I \cap J = \varnothing$, и отрицательно ассоциированным ($X \in \mathbf{NA}$), если указанная ковариация должна быть неположительна при $I \cap J = \varnothing$.
J.Esary, F.Proschan, D.Walkup (1967), K.Joag-Dev and F.Proschan (1983), R.Burton, A.Dabrowski, H.Dehling (1985)

Идея ассоциированности возникла одновременно в нескольких прикладных областях:
марковские процессы (T.Harris), математическая статистика (E.Lehmann), теория надежности (R.Barlow, F.Proschan), математическая физика (FKG-неравенства — K.Fortuin, R.Casteleyn, G.Ginibre)

Неравенства

Пусть случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\} \in \mathbf{PA} \cup \mathbf{NA}$ и множества $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ не пересекаются. Тогда для любых функций $f : \mathbb{R}^{|I|} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \to \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\boxed{|cov(f(X_I), g(X_J))| \le Lip(f)Lip(g) \sum_{i \in I, j \in J} |cov(X_i, X_j)|.}$$

(А.В.Булинский, Э.Шабанович, 1998). Константа Липшица берется относительно нормы $\|x\| = \sum_i |x_i|$. В случае, если поле стационарно в широком смысле и ряд

$$\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_j)$$

сходится , оценку можно продолжить:

$$\boxed{|cov(f(X_I), g(X_J))| \le Lip(f)Lip(g)(|I| \wedge |J|)u_r,}$$

где u_r — “хвост” ряда, $r = dist(I, J)$.
σ^2 называется асимптотической (долгосрочной) дисперсией.

Конечная восприимчивость (C.Newman)

Условие

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_j) = \sigma^2 \in [0, +\infty)$$

называется условием конечной восприимчивости, а числа u_r — коэффициентами Кокса-Гримметта.

Случайное поле X называется квазиассоциированным, если оно удовлетворяет первой оценке, и (BL, θ)-зависимым, если второй (в правой части которой вместо u_r находится θ_r). Здесь $\{\theta_r, r \geq 1\}$ — последовательность, монотонно убывающая к нулю при $r \to \infty$.

(А.В.Булинский, Ch.Suquet, 2001)

Примеры

1. Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$, составленное из независимых случайных величин, ассоциированно; тоже можно сказать о любых неубывающих функциях от его элементов

2. Гауссовское случайное поле $X \in \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда его ковариационная функция неотрицательна (Л.Питт, 1982).

3. Безгранично делимая случайная мера на борелевском пространстве является ассоциированной (С.Эванс, 1990).

4. Поле дробового шума

$$Y(t) = \sum_i \xi_i \psi(t - x_i),\ t \in \mathbb{R}^d,$$

где $U = \{x_i\}$ — пуассоновский точечный процесс, а случайные величины $\{\xi_i\}$ независимы, одинаково распределены и не зависят от U, является ассоциированным, если $\psi \geq 0$ и $\xi_i \geq 0$ п.н.

Примеры

Существуют условия ассоциированности точечных случайных мер, кластерных случайных мер, диффузионных процессов, устойчивых и безгранично делимых случайных процессов и т.д.

Равномерное остовное дерево графа (и его пределы по распределению, когда размер графа стремится к бесконечности) образует отрицательно ассоциированную систему

Гауссовское случайное поле квазиассоциированно (П.Дукан и С.Луиши, 1999).

Примерами (BL, θ)-зависимого поля являются также

1. Стационарное поле авторегрессии

$$X_j = F(X_{j-v}, v \in V) + \varepsilon_j,$$

где $\{\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{E}\varepsilon_0 = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_0 = 1$; конечное множество $V \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$; функция $F : \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}$ липшицева с $Lip(F) < 1$.

Примеры

2. Инвариантное распределение марковского процесса $\{\xi_s\}_{s\geq 0}$ в пространстве $0-1$ конфигураций на $\mathbb{Z}^d$, если

$$\gamma(x,u) \leq c_0 e^{-\|x-u\|} \text{ при любых } x,u \in \mathbb{Z}^d,$$

где

$$\gamma(x,u) = \sup_{\eta,\zeta:\eta(y)=\zeta(y),y\neq u} |c(x,\eta) - c(x,\zeta)|$$

и $c(x,\eta)$ — интенсивность изменения состояния в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ при условии, что значений всей конфигурации равно η.

Центральная предельная теорема: C.Newman (1980, 1984), T.Wood (1983), J.Cox, G.Grimmett (1984), T.Birkel (1988), А.В.Булинский (1995, 2001, 2011), T.Lewis (1998), М.А.Вронский (1998)
Максимальные и моментные неравенства: C.Newman, A.Wright (1981), А.В.Булинский (1993), А.В.Булинский и M.Keane (1995), Qi-Man Shao, Hao Yu (1996), T.Christofides, E.Vaggelatou (2004), А.П.Шашкин (2004), Н.Ю.Крыжановская (2007), В.П.Демичев (2013)
Статистические предельные теоремы: G.Roussas (1993, 2000, 2001), А.В.Булинский и М.А.Вронский (1996), А.В.Булинский и А.П.Шашкин (2004)

Как правило, условия предельных теорем содержат требования к **моментам** случайных слагаемых и к последовательности $\{u_r\}$, т.е. к **скорости убывания ковариационной функции** случайного поля (или к последовательности). Например,

$$\boxed{M_{2+\delta} := \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty \text{ при некотором } \delta > 0},$$

$$\boxed{u_r = O(r^{-\lambda}), \text{ когда } r \to \infty, \text{ при некотором } \lambda > 0}.$$

Исследование посвящено асимптотическому анализу слабо зависимых случайных полей, разработке новых методов доказательства предельных теорем и получению с их помощью новых результатов, в том числе оптимальных. Среди основных направлений исследования

- законы повторного логарифма,
- оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме,
- предельные теоремы для оценок долгосрочной дисперсии случайного поля,
- моментные неравенства,
- сильные принципы инвариантности,
- теоремы о сходимости семейств эмпирических процессов,
- теоремы о сходимости семейств случайных процессов, заданных геометрическими функционалами от случайных полей.

Теорема 1.1 (А.П.Шашкин). Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\} \in \mathbf{A}$ стационарно в узком смысле, $\mathsf{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$, и $u_r = O(r^{-\lambda})$ с $\lambda > 0$, когда $r \to \infty$.
Тогда для любого $T \subset \mathbb{N}^d$, с вероятностью единица,

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty,\, n\in T} \frac{S_n}{\sqrt{2\langle n\rangle \log\log\langle n\rangle}} = \sigma\sqrt{r},}$$

здесь

$$r = r(T) = \lim_{a\to\infty} \inf\left\{\rho > 0 : \int_{L(T)\cap R(a)} \|x\|^{-\rho} dx < \infty\right\},$$

где $R(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq a, \ldots, x_d \geq a\}$.

Теорема 1.2 (А.П.Шашкин). Пусть случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ центрировано и (BL, θ)-зависимо, причем последовательность $\{\theta_r, r \in \mathbb{N}\}$ такова, что $\theta_r = O(r^{-\lambda})$ с $\lambda > 0$, когда $r \to \infty$. Предположим, существует $\delta > 2$ такое, что $M_{2+\delta} := \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$. Тогда для любых $\nu > 0$ и $p \in (2, 2+\delta)$ найдется такое $K = K(d, \{\theta_r\}_{r\in\mathbb{N}}, \nu, p) > 0$, что для любого конечного $U \subset \mathbb{Z}^d$ верна оценка

$$\boxed{\mathsf{E}|S(U)|^p \le K\left(|U|^{1+\nu} \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}|X_j|^p + |U|^\gamma M_{2+\delta}^{(2+\delta)(p-2)/\delta} + |U|^{p/2} Q_X^{p/2}\right).}$$

Здесь $Q_X = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |cov(X_0, X_j)|$, $\gamma = \max\{1+\nu, ((2+\delta)(p-1) - p - \lambda(2+\delta-p)/d^*)/\delta\}$, а $d^* = d$ при $d \ne 2$ и $d^* = 3$ при $d = 2$.

Транзитивные графы

Граф $G = (V, E)$ называется транзитивным, если для любых $x, y \in V$ существует такой его автоморфизм a, что $a(x) = y$. Он называется локально конечным , если любая вершина имеет конечное число соседей (в этом случае их число $\rho \in \mathbb{N}$ постоянно). (BL, θ)-зависимость случайной системы $X = \{X_t, t \in V\}$ определяется так же, как на $\mathbb{Z}^d$ (расстояние понимается в смысле метрики, задаваемой графом).

Теорема 1.3 (А.П.Шашкин). Предположим, что $G = (V, E)$ — транзитивный локально конечный граф. Пусть $X = \{X_t, t \in V\}$ — центрированная (BL, θ)—зависимая случайная система, причем $M_{2+\delta} = \sup_{t \in V} \mathsf{E}|X_t|^{2+\delta} < \infty$ при $\delta > 0$. Пусть последовательность (θ_r) удовлетворяет соотношению $\theta_r = O(e^{-\lambda r})$ при $r \to \infty$, с некоторым $\lambda > \log \rho$. Наконец, предположим, что существует класс конечных множеств $\mathcal{U}$, такой что для некоторого $d > 0$ и всех $U \in \mathcal{U}$ справедлива оценка $\mathsf{D}S(U) \geq d|U|$. Тогда существует функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и для любого $U \in \mathcal{U}$ выполняется неравенство

$$\boxed{\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\mathsf{P}(S(U) \leq x\sqrt{\mathsf{D}S(U)}) - \mathsf{P}(Z \leq x)\right| \leq f(\mathsf{D}S(U))},$$

здесь $Z \sim N(0, 1)$.

Пример

Нетривиальным примером транзитивного графа $G = (V, E)$ является граф, вершины множество элементов неабелевой свободной группы с генераторами $\{g_1, \ldots, g_L\}$, имеющими порядок 2 ($L > 2$). Вершины $x, y \in V$ соединены ребром тогда и только тогда, когда существует такое $i \in \{1, \ldots, L\}$, что $x = g_i y$. Для такого графа число точек в шаре B_k радиуса k растет экспоненциальным образом, поэтому $|\partial B_k|/|B_k| \not\to 0$ при $k \to \infty$, что существенно усложняет доказательство.

Сильный принцип инвариантности: история

W.Strassen (1964), I.Komlos,P.Major, G.Tusnagy (1975)

I.Berkes, G.Morrow (1981) — случайные поля

Hao Yu, 1996 — ассоциированные случайные последовательности

R.Balan, 2005 — ассоциированные случайные поля

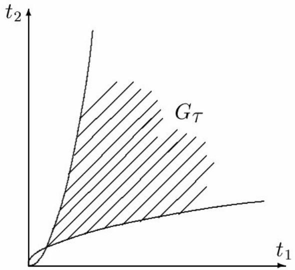
В последних двух работах предполагается экспоненциальная скорость убывания коэффициентов Кокса-Гримметта.

А.В.Булинский и А.П.Шашкин, 2006

А.П.Шашкин, 2008

Сильный принцип инвариантности: BL-зависимость

Пусть для $\tau \in (0, 1/d)$ $G_\tau = \{n \in \mathbb{N}^d : n_i \geq \langle n \rangle^\tau, \}$ если $d > 1$, и $G_\tau = \mathbb{N}$ иначе.



d-параметрическим броуновским движением $W = \{W_t, t \in [0, \infty)^d\}$ называется непрерывное гауссовское случайное поле со средним 0 и ковариационной функцией $\mathsf{E} W_t W_s = \prod_{i=1}^d (t_i \wedge s_i)$.

Теорема 2.1 (А.В.Булинский, А.П.Шашкин). Пусть $X \in (BL, \theta)$ — стационарное в широком смысле центрированное случайное поле, для которого выполнены условия $M_{2+\delta} := \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, $\theta_r = O(e^{-\lambda r})$ при $\lambda > 0$, а также $\sigma^2 > 0$. Тогда для каждого $\tau > 0$ поле X можно переопределить, не меняя его распределения, на новом вероятностном пространстве вместе с таким d-параметрическим броуновским движением $W = \{W_t, t \in [0,\infty)^d\}$, что для некоторого неслучайного $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\boxed{S_n - \sigma W_n = O(\langle n\rangle^{1/2-\varepsilon}) \quad \text{п.н.}}$$

при $n \to \infty$, $n \in G_\tau$.

Теорема 2.2 (А.П.Шашкин). Пусть $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — положительно или отрицательно ассоциированный случайный вектор, причем $\mathsf{E}\|Y\|^2 < \infty$, и пусть случайный вектор $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ не зависит от Y и состоит из независимых случайных величин, причем $Law(Z_k) = Law(Y_k)$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда для любой функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, имеющей ограниченные производные второго порядка, верна оценка

$$\boxed{|\mathsf{E}f(Y) - \mathsf{E}f(Z)| \le \sum_{1 \le k < v \le m} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_v} \right\|_\infty |cov(Y_k, Y_v)|.}$$

Теорема 2.3 (А.П.Шашкин). Пусть Y — положительно или отрицательно ассоциированный случайный вектор, причем $\mathsf{E}\|Y\|^2 < \infty$. Тогда его можно переопределить на новом вероятностном пространстве (с сохранением распределения), на котором заданы также независимые случайные величины $Z_1, \ldots, Z_m$, такие что $Law(Y_k) = Law(Z_k)$ и $\mathsf{P}(|Y_k - Z_k| > a_{k,m}) \le a_{k,m}$ при $k = 1, \ldots, m$. Здесь

$$a_{k,m} = A \sum_{v=k}^{m} v^{1/6} R_v^{1/3},$$

где $A > 0$ — абсолютная константа и

$$R_m = \sum_{j=1}^{m-1} |cov(Y_j, Y_m)|.$$

Теорема 2.4 (А.П.Шашкин). Пусть $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — положительно или отрицательно ассоциированная последовательность случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Предположим, что существуют такие $C > 0$ и $\gamma > 9/2$, что для любых $n > 1$ и всех $k < n$ выполняется неравенство $|cov(Y_k, Y_n)| \le Cn^{-\gamma}$. Тогда можно переопределить Y (с сохранением распределения) на новом вероятностном пространстве, на котором также заданы независимые стандартные нормальные случайные величины $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, так, чтобы при каждом $n > 1$ имело место неравенство $\mathsf{P}(|Y_n - Z_n| > b_n) \le b_n$, где

$$b_n = 6AC^{1/3}(2\gamma - 9)^{-1}(n-1)^{3/2-\gamma/3}.$$

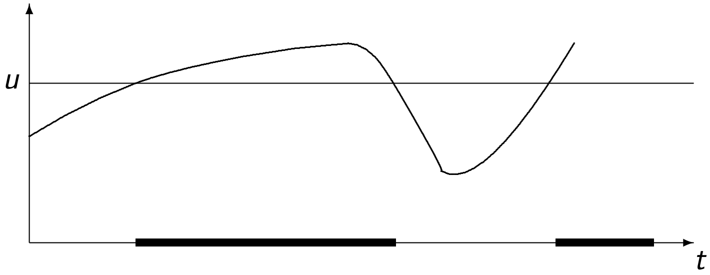
Теорема 2.5 (А.П.Шашкин). Пусть $X \in \mathbf{PA} \cup \mathbf{NA}$ — стационарное в широком смысле центрированное случайное поле, для которого выполнены условия $M_{2+\delta} := \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, $\theta_r = O(r^{-\lambda})$ при $\lambda > 0, r \to \infty$, и $\sigma^2 > 0$. Тогда для каждого $\tau > 0$ поле X можно переопределить, не меняя его распределения, на новом вероятностном пространстве вместе с таким d-параметрическим броуновским движением $W = \{W_t, t \in [0, \infty)^d\}$, что для некоторого неслучайного $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\boxed{S_n - \sigma W_n = O(\langle n \rangle^{1/2-\varepsilon}) \quad \text{п.н.}}$$

при $n \to \infty$, $n \in G_\tau$.

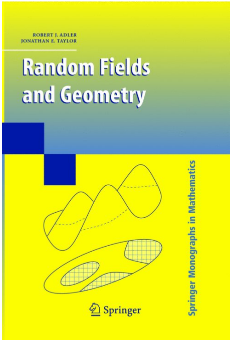
Пусть $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}^d\}$ — случайное поле с непрерывным "временем", имеющее непрерывные реализации. Экскурсионным множеством, отвечающим уровню $u \in \mathbb{R}$, называется случайное множество

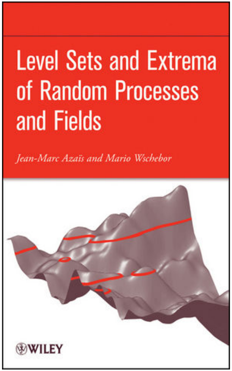
$$A_u = \{s \in \mathbb{R}^d : X_s \geq u\}.$$



Экскурсионные множества

Экскурсионные множества привлекают интерес в астрофизике, томографии, при анализе качества материалов. Важную роль в исследованиях играют их функционалы Минковского, из которых наиболее известны объем, площадь поверхности и эйлерова характеристика.





Мы будем рассматривать поведение семейств ограниченных случайных множеств $A_u \cap [0, n]$, где $[0, n] = [0, n_1] \times \ldots \times [0, n_d]$. Если $\mathcal{G}$ — некоторый функционал от множеств, то при каждом $n \in \mathbb{N}^d$ получаем случайный процесс $\{\mathcal{G}(A_u \cap [0, n]^d), u \in \mathbb{R}\}$. Далее исследуется предельное поведение таких процессов для функционалов двух типов: объема и площади границы.

Предельные теоремы для объемов

Пусть

$$V_n(u) := Leb\{A_u \cap [0,n]\}, \quad Y_n(u) = \frac{V_n(u) - \mathrm{E}V_n(u)}{\sqrt{\langle n \rangle}}.$$

Hao Yu (1993)
Qi-Man Shao, Hao Yu (1996)
S.Louhichi (2000)
А.В.Булинский, Е.Сподарев, Ф.Тиммерман (2011)

Теорема 3.1 (А.П.Шашкин). Предположим, что поле $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}^d\}$ непрерывно потраекторно и в среднем квадратическом, стационарно в узком смысле и положительно ассоциированно, причем $cov(X_0, X_t) \le c_0(1 + |t|)^{-\lambda}$ с некоторыми $c_0 > 0$ и $\lambda > 2d$. Также будем предполагать, что X_0 имеет ограниченную плотность. Тогда случайные процессы $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^d\}$ сходятся по распределению в пространстве Скорохода $D(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$ к центрированному гауссовскому процессу Y с ковариационной функцией

$$\mathsf{E}Y(u)Y(v) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{P}(X_0 \ge u, X_z \ge v) - \mathsf{P}(X_0 \ge u)\mathsf{P}(X_z \ge v))\, dz.$$

Предельные теоремы для площадей поверхности

Положим

$$L_n(u) = \mathcal{H}_{d-1}((\partial A_u) \cap [0, n]^d), \quad Z_n = \frac{L_n(u) - \mathrm{E} L_n(u)}{\sqrt{\langle n \rangle}}.$$

Моменты: S.Rice (1945), H.Cramer, M.Leadbetter (1965), Ю.К.Беляев (1967), D.Geman (1974), R.Adler, J.Taylor (1977, 1984), M.Kratz, J.Leon (2001, 2006), И.А.Ибрагимов, Д.Н.Запорожец (2010)
Центральные предельные теоремы: Т.Малевич (1969), J.Cuzick (1973), В.И.Питербарг (1975), T.Slud (1988), M.Kratz, J.Leon (2001), R.Adler, E.Moldavskaya, G.Samorodnitsky (2012)

Пусть $d \geq 3$ и $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ — центрированное изотропное гауссовское случайное поле, имеющее реализации класса C^1 п.н. Без ограничения общности мы считаем, что дисперсия значений поля и его частных производных первого порядка равна единице. Будем предполагать, что ковариационная функция поля X и все ее частные производные до 2 порядка включительно интегрируемы на $\mathbb{R}^d$, а также что выполняются следующие два условия:

$$\mathsf{P}(X(s)=u, \nabla X(s)=0 \text{ для некоторого } s \in \mathbb{R}^d)=0 \text{ при любом } u \in \mathbb{R};$$

$$\mathsf{P}(\mathcal{H}_{d-1}(\{s \in \mathbb{R}^d : \nabla X(s) = 0\}) > 0) = 0.$$

Достаточным условием, обеспечивающим справедливость последних двух соотношений, является принадлежность реализаций поля X классу C^2.

Теорема 3.2 (А.П.Шашкин). Случайные процессы $\{Z_n(\cdot),\ n \in \mathbb{N}^d\}$ с вероятностью единица непрерывны, и сходятся при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $C(\mathbb{R})$ к центрированному гауссовскому процессу Z с ковариационной функцией

$$\mathrm{E}Z(u)Z(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(H_s(u,v)p_s(u,v) - \frac{(\mathrm{E}\|\nabla X(0)\|)^2}{2\pi} e^{-u^2/2 - v^2/2} \right) ds.$$

Здесь p_s есть плотность $(X(0), X(s))$ и $H_s(u,v) = \mathrm{E}\left(\|\nabla X(0)\|\|\nabla X(s)\|\,|X(0) = u, X(s) = v\right)$ (берется евклидова норма).

Список публикаций по теме диссертации

1. А.В.Булинский, А.П.Шашкин. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М., ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. А.В.Булинский, А.П.Шашкин. Сильный принцип инвариантности для зависимых мультииндексированных случайных величин. Доклады РАН, серия "Математика", 2005, т. 403, с. 155–158.

3. Bulinski A., Shashkin A. Strong Invariance Principle for Dependent Random Fields. IMS Lect. Notes – Monograph Series Dynamics and Stochastics, 2006, V. 48, pp. 128–143.

4. Шашкин А.П. Закон повторного логарифма для ассоциированного случайного поля. Успехи мат. наук, 2006, **61**, 2, с. 173–174.

5. Шашкин А.П. Сильная гауссовская аппроксимация для ассоциированных случайных величин. Успехи мат. наук, 2007, **62**, 5, с. 174–175.

Список публикаций по теме диссертации

6. Shashkin A. P. A strong invariance principle for positively or negatively associated random fields. Statist. Probab. Lett., 2008, V. 78, pp. 2121–2129.

7. Shashkin A. A Berry-Esseen type estimate for dependent systems on transitive graphs. In: Advances in Data Analysis (C.Skiadas ed.), Springer, 2010, pp. 151–156.

8. Meschenmoser D., Shashkin A. Functional central limit theorem for the volume of excursion sets generated by associated random fields. Statist. Probab. Lett. 2011. V. 81, No. 6. P. 642–646.

9. Мешенмозер Д., Шашкин А. Функциональная центральная предельная теорема для меры поверхностей уровня гауссовского случайного поля. Теория вероятн. и примен., 2012, т. 57, с. 168–178.

10. Shashkin A. Functional central limit theorem for the level measure of a Gaussian random field. Statist. Probab. Lett., 2013, V. 83, p. 637–643.

Список публикаций по теме диссертации

11. Шашкин А.П. Функциональная предельная теорема для интегралов по множествам уровня гауссовского случайного поля. Теор. вероятн. и примен. 2014.

12. Шашкин А.П. Обобщение закона повторного логарифма для ассоциированных случайных полей. Матем. заметки. 2014.

13. Шашкин А.П. Вариант закона повторного логарифма для сумм зависимых мультииндексированных случайных величин. Доклады РАН, серия "Математика". 2014.

14. Шашкин А.П. Асимптотическая нормальность оценок с локальным усреднением для слабо зависимых случайных полей. Теор. вероятн. и примен. (в печати).

15. Шашкин А.П. Функциональные предельные теоремы для мер экскурсионных множеств ассоциированных случайных полей. Сиб. матем. журнал (в печати).

Доклады на конференциях и семинарах

1. Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Ю.В.Линника (Санкт-Петербург, 2005).
2-4. Международные семинары по проблемам устойчивости стохастических моделей (Майори, Италия, 2005; Нагария, Израиль, 2007; Светлогорск, 2011).
5. Международная конференция "Асимптотические модели стохастики и анализ данных"(Хания, Греция, 2007),
6. Конференция BAS по асимптотической статистике (Барселона, Испания, 2008).

Доклады на конференциях и семинарах

7. Международная конференция "Стохастический анализ и случайная динамика"(Львов, Украина, 2009).
8. 10-я Вильнюсской конференции по теории вероятностей (Вильнюс, Литва, 2010).
9. 3-я конференции "Современная стохастика: теория и приложения"(Киев, Украина, 2012).
10. Международная конференция, посвященной 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 2012).
11. 7-й международный семинар по моделированию (Римини, Италия, 2013).

Доклады на конференциях и семинарах

12. Российско-китайский семинар "Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистике"(Санкт-Петербург, 2013).
13. 29-я Европейская конференция статистиков (Будапешт, Венгрия, 2013).

Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (руководитель — академик РАН, профессор А.Н.Ширяев), научные семинары в Институте стохастики университета Ульма (Ульм, Германия), университете Северной Каролины (Шарлотт, США), Технологическом институте Джорджии (Атланта, США), Курантовском Институте (Нью-Йорк, США) и другие семинары по теории вероятностей и математической статистике.

Заключение

Итак, в диссертации получен ряд взаимосвязанных результатов, в том числе оптимальных, описывающих асимптотическое поведение зависимых случайных полей. Среди них следует выделить следующие:

1. Получена новая форма закона повторного логарифма для случайных полей, являющаяся новой уже для сумм независимых слагаемых, и дан явный вид интегрального функционала, определяющего верхний предел в этом законе.

2. Дано моментное неравенство для (BL, θ)-зависимых случайных полей, на сегодняшний день наиболее общее и приводящее к широкому набору приложений.

Заключение

3. Впервые доказаны теоремы о возможности аппроксимации почти наверное случайных векторов, компоненты которых положительно или отрицательно ассоциированы, случайными векторами с независимыми компонентами.

4. Установлены новые варианты сильного принципа инвариантности для слабо зависимых случайных полей, существенно усиливающие ранее известные результаты.

5. Введен и исследован новый класс случайных процессов, порождаемых геометрическими функционалами от экскурсионных множеств.