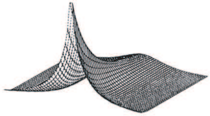


НЕАДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФУЗИЙ

Предзащита кандидатской диссертации

27 мая 2014 г.

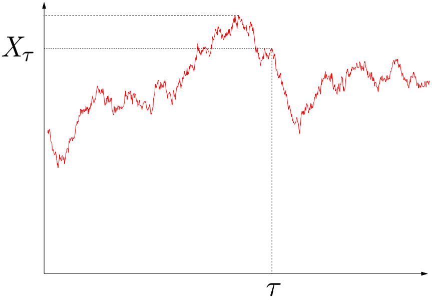
Андрей Каменов

Механико-математический факультет МГУ, кафедра теории вероятностей

ВВЕДЕНИЕ

Введение

МОТИВАЦИЯ

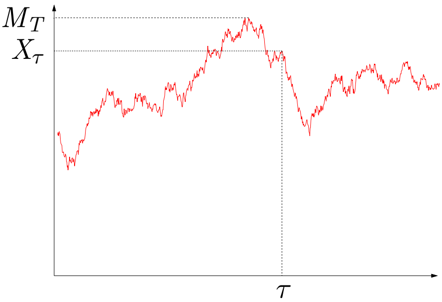


Для однородных диффузий достаточно хорошо изучена задача об оптимальной остановке для функционала Майера:

Mayer functional

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E} f(X_\tau)$$

МОТИВАЦИЯ

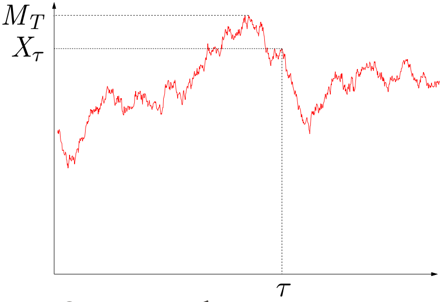


Что, если функционал зависит от значения максимума процесса?

MS-type functional

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, f(X_\tau, M_T)$$

МОТИВАЦИЯ



Что, если функционал зависит от значения максимума процесса?

MS-type functional

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, f(X_\tau, M_T)$$

Основная область, где возникают такие задачи —финансовая математика:

1. Русский опцион
2. Стратегия <<покупай и держи>>

ТЕКУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Таблица: Обзор имеющихся результатов в частных случаях

Функция	Процесс	Горизонт
$\sup \mathsf{E}\, X_\tau / M_T$	$\exp(\mu t + \sigma B_t)$	$T < \infty$
$\inf \mathsf{E}\, X_\tau / m_T$	$\exp(\mu t + \sigma B_t)$	$T < \infty$
$\inf \mathsf{E}(X_\tau - M_T)^q$	B_t	$T < \infty$
$\sup \mathsf{P}(M_T - X_\tau \leq \varepsilon)$	B_t	$T < \infty$
$\sup \mathsf{E}\left(M_\tau - \int_0^\tau c(X_\tau)\, dt\right)$	$b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dB_t$	$T = \infty$

Авторы: А.Н.Ширяев, А.А.Новиков, G.Peskir, J.L.Pedersen, L.Shepp, J. du Toit, S.E.Graversen, Z.Xu, X.Y.Zhou, M. Dai, H.Jin, Y.Zhong, etc

Глава 1. Русский опцион в модели Башелье

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель

$$X_t = \mu t + B_t$$

Задача

$$V_* = \sup_{\tau \le T} \mathsf{E}\left[M_\tau - c\tau\right]$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Модель

$$X_t = \mu t + B_t$$

Задача

$$V_* = \sup_{\tau \le T} \mathsf{E}\left[M_\tau - c\tau\right]$$

Оптимальным моментом остановки является момент пересечения процессом $M_t - X_t$ границы $b(t)$, являющейся решением уравнения

Уравнение для границы

$$\mathsf{E}_{t,b(t)}\, X_T = b(t) + (c-\mu)(T-t) - c\int\limits_0^{T-t} \mathsf{E}_{t,b(t)}\, \mathbf{I}(X_u \ge b(u))\, du$$

АСИМПТОТИКА ДЛЯ ГРАНИЦЫ

Теорема 1

При $T - t \to 0$

$$b(t) = \sqrt{(T-t)/\ln(T-t)} + O(T-t)$$

Теорема 2

Пусть $S_0 = \frac{\ln(\mu/c+1)}{2\mu}$ —граница остановки при $T = \infty$. Тогда при $T \to \infty$ для некоторого $D > 0$

$$0 \le S_0 - h(t) \le \sqrt{D/2c} \cdot e^{qt/2}\,, \qquad q = (\mu \wedge 0)^2/4 + \lambda^2$$

Глава 2. Общая задача, бесконечный горизонт

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1

$$V_* = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_\infty)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_\infty)$$

Задача 1'

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_\infty)$$

Задача 1'

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$$

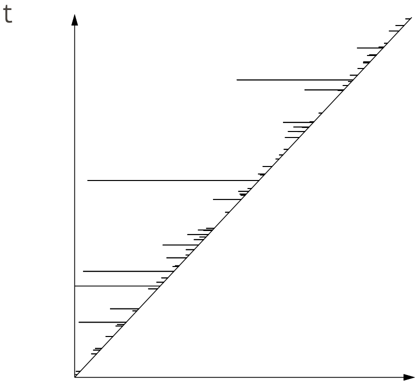
Задача 2

$$V_* = \sup_\tau \mathsf{E}\, f(X_\tau, M_\tau)\ , \quad f \in C^{2,1}\ , \quad f'_s = 0$$

$$f(x,s) = f(X_\tau, M_\tau) = \mathsf{E}(h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon} | X_\tau, M_\tau))$$

$$f'_s(x,s) = \left(\int_0^\infty h(x, s \vee (x+y))\, g(y)\, dy\right)'_s = \int_0^{s-x} h'_s(x,s)\, g(y)\, dy$$

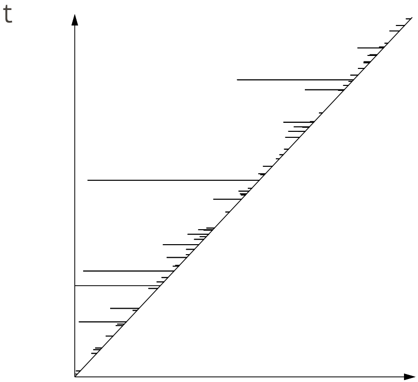
ОСТАНОВКА НА ДИАГОНАЛИ



Для точек, где $x < s$

$$\mathbb{L}_X f(x, s) > 0 \Rightarrow (x, s) \in C$$

ОСТАНОВКА НА ДИАГОНАЛИ

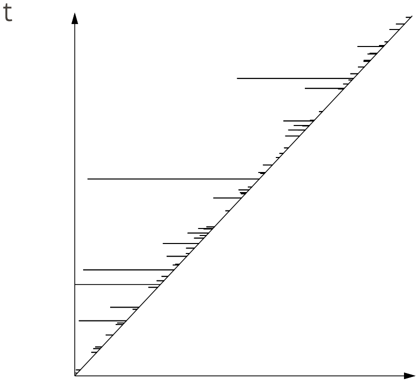


Для точек, где $x < s$

$$\mathbb{L}_X f(x, s) > 0 \Rightarrow (x, s) \in C$$

Верно ли это для точек на диагонали?

ОСТАНОВКА НА ДИАГОНАЛИ



Для точек, где $x < s$

$$\mathbb{L}_X f(x, s) > 0 \Rightarrow (x, s) \in C$$

Верно ли это для точек на диагонали?

Доказано, что верно, несмотря на то, что f может не принадлежать области определения характеристического оператора.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{L}_X V(x,s) = 0\,, \quad g(s) < x < s \\ \frac{\partial V}{\partial s}(x,s)\Big|_{x=s-} = 0 \\ V(x,s)\big|_{x=g(s)+} = f(x,s) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x,s)\Big|_{x=g(s)+} = f'_x(x,s) \end{array}\right\} \text{Задача Стефана}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{L}_X V(x,s) = 0\,, \quad g(s) < x < s \\ \dfrac{\partial V}{\partial s}(x,s)\Big|_{x=s-} = 0 \\ V(x,s)\big|_{x=g(s)+} = f(x,s) \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,s)\Big|_{x=g(s)+} = f'_x(x,s) \end{array}\right\}\ \text{Задача Стефана}$$

Эту систему можно решить в явном виде:

$$g'(s) = -\frac{f'_s(g(s),s)\Lambda^{-1}(g(s),s) + f''_{xs}(g(s),s)}{f''_{xx}(g(s),s) + 2\mu(s) f'_x(g(s),s)}$$

где

$$\Lambda(g(s),s) = \frac{L(s) - L(g(s))}{L'(g(s))}$$

ПРИНЦИП ОДНОКРАТНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Определение

Функция f удовлетворяет принципу однократного пересечения, если для каждого s существует $\underline{x}(s)$, такое, что $\mathbb{L}_X f(x, s) > 0$ при $s > x > \underline{x}(s)$ и $\mathbb{L}_X f(x, s) \geq 0$ при $x < \underline{x}(s)$.

ПРИНЦИП ОДНОКРАТНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Определение

Функция f удовлетворяет принципу однократного пересечения, если для каждого s существует $\underline{x}(s)$, такое, что $\mathbb{L}_X f(x,s) > 0$ при $s > x > \underline{x}(s)$ и $\mathbb{L}_X f(x,s) \geq 0$ при $x < \underline{x}(s)$.

Большинство “разумных ”функций удовлетворяют этому условию. Более того, справедлива

Теорема 3

Пусть
- $\exists\ q(s):\ f(x,s) \leq q(s) + q'(s)\frac{L(x)-L(s)}{L'(s)}$
- $\forall s$ либо $\lim\limits_{x\to l_I} \frac{f(x,s)}{L(x)} = -\infty$ либо $|f'_s(x,s)| < C, \quad \forall x \in I$

Тогда существует модификация f, удовлетворяющая условию однократного пересечения и не изменяющая ответ в исходной задаче.

ВЕРИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Лемма

Если при всех s выполнено $g_1(s) \le g_2(s)$, то $V_{g_1}(x, s) \ge V_{g_2}(x, s)$.

Теорема 3

Пусть функция удовлетворяет условию однократного пересечения. Тогда

1. Существует максимальная допустимая граница $g_*(s)$.
2. Если для момента остановки $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \le g_*(M_t)\}$ выполнено $\mathrm{E}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}) < \infty$, то он является оптимальным.

Глава 3. Общая задача, конечный горизонт

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1

$$V_* = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_T)$$

Задача 2

$$V_* = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau)\ , \quad f \in C^{2,1,1}\ , \quad f'_s = 0$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1

$$V_* = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, h(X_\tau, M_T)$$

Задача 2

$$V_* = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau)\ , \quad f \in C^{2,1,1}\ , \quad f'_s = 0$$

Можно доказать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x, s, t) > 0 \Rightarrow (x, s, t) \in C$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО S

При достаточной гладкости $V(x, s, t)$ верно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V_s(x, s, t) = 0, \quad (x, s, t) \in C$$

Но априори ничего не можем сказать про гладкость V.

Теорема (Milgrom,Segal)

Предположим, что $\mathbf{X}$ —непустой компакт, $w(x, s)$ полунепрерывна сверху по x и $w'_s(x, s)$ непрерывна по паре (x, s). Обозначим $v(s) = \sup_{x\in\mathbf{X}} w(x, s)$ и $\mathbf{X}^*(s) = \{x \in \mathbf{X} : w(x, s) = v(s)\}$.

Тогда v дифференцируема в точке $s \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда множество $\{w_s(x, s) \mid x \in \mathbf{X}^*(s)\}$ состоит из одного элемента, и в этом случае $v'(s) = w'_s(x, s)$ для всех $x \in \mathbf{X}^*(s)$.

ПРОИЗВОДНАЯ ПО S

Теорема (Milgrom,Segal)

Предположим, что $\mathbf{X}$ —непустой компакт, $w(x, s)$ полунепрерывна сверху по x и $w'_s(x, s)$ непрерывна по паре (x, s). Обозначим $v(s) = \sup_{x\in\mathbf{X}} w(x, s)$ и $\mathbf{X}^*(s) = \{x \in \mathbf{X} : w(x, s) = v(s)\}$.

Тогда v дифференцируема в точке $s \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда множество $\{w_s(x, s) \mid x \in \mathbf{X}^*(s)\}$ состоит из одного элемента, и в этом случае $v'(s) = w'_s(x, s)$ для всех $x \in \mathbf{X}^*(s)$.

В качестве множества $\mathbf{X}$ рассмотрим замыкание семейства распределений (X_τ, M_τ, τ), оно компактно в топологии слабой сходимости по теореме Прохорова.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Обозначим $\tau_0 = \inf\{t : X_t = M_t\}$ и $Y_t = X_{t\wedge\tau_0}$,

$$\Psi(x, y, t) = \mathsf{P}(Y_t \le y \mid X_0 = x).$$

Теорема 4

Если выполнены условия задачи Стефана, то в точках, где $g(s, t) < s$,

$$g'_s(s, t) = \frac{\sigma^2(g(s, t))}{2} \cdot \frac{\int\limits_t^T f'_s(g(s, \theta), s, \theta)\, d\psi(s, t, \theta) - f''_{xs}(g(s, t), s, t)}{(f'_t + \mathbb{L}_X f)\,(g(s, t), s, t)},$$

где $\psi(s, t, \theta)$ —функция, удовлетворяющая уравнению Вольтерры

$$\Psi'_x(g(s, t), g(s, r), r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s, \theta), g(s, r), r - \theta)\, d\psi(s, t, \theta)$$

для всех $t < r \le T$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теорема 4'

Если существует предел $H(s) = \lim\limits_{t \to T} h'_s(g(s,\, T),\, s)$, то $g(s,\, t)$ в точках, где $g(s,\, t) < s$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$g'_s(s,\, t) = \frac{\sigma^2(g(s,\, t))}{2} \cdot \frac{I(s,\, t) - f''_{xs}(g(s,\, t),\, s,\, t)}{(f'_t + \mathbb{L}_X f)\,(g(s,\, t),\, s,\, t)}\ ,$$

где

$$I(s,\, t) = \int_t^T \chi(r)\Psi_x(x,\, g(s,\, r),\, r)\, dr + H(s)\Psi_x(g(s,\, t),\, s,\, T - t)\ ,$$

а $\chi(r)$ —решение уравнения Вольтерры

$$f'_s(g(s,\theta),\, s,\, \theta) - H(s)\Psi(g(\theta,\, s),\, s,\, T - \theta) =$$

$$= \int_\theta^T \chi(r)\Psi(g(s,\, \theta),\, g(r,\, s),\, r - \theta)\, dr, \quad \forall \theta \in [t,\, T].$$

ВЕРИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 5

Существует максимальная допустимая граница $g_*(s, t)$

ВЕРИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 5

Существует максимальная допустимая граница $g_*(s,t)$

Определение

Функция $f(x,s,t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения, если $\forall s,t \quad \exists \ \underline{x}(s,t)$ такое, что $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) \ > \ 0$ при $s > x > \underline{x}(s,t)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) \geq 0$ при $x < \underline{x}(s,t)$.

ВЕРИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 5

Существует максимальная допустимая граница $g_*(s, t)$

Определение

Функция $f(x, s, t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения, если $\forall s, t \quad \exists \ \underline{x}(s, t)$ такое, что $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x, s, t) \ > \ 0$ при $s > x > \underline{x}(s, t)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x, s, t) \geq 0$ при $x < \underline{x}(s, t)$.

Теорема 6

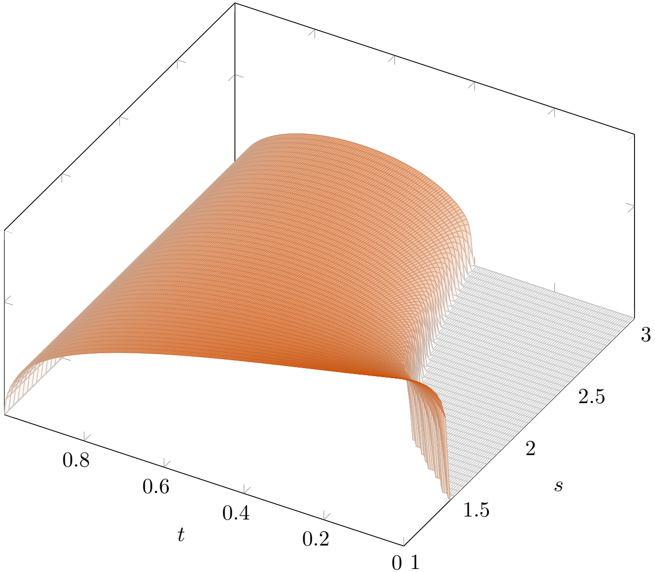
Пусть $f(x, s, t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения. Если для момента остановки $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \leq g_*(M_t, t)\}$ выполнено $\mathrm{E}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}, \tau_*) < \infty$, то он является оптимальным.

ПРИМЕР: МИНИМИЗАЦИЯ ОТНОШЕНИЯ К МАКСИМУМУ

$$X_t = B_t + \mu t$$

$$V_* = \inf_{\tau \le T} \frac{X_t}{M_T}$$

График
$s - g(s, t)$:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, для произвольной однородной диффузии X_t

1. Решена задача $\sup\limits_{\tau \geq 0} f(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$ (бесконечный временной горизонт)
2. Решена задача $\sup\limits_{\tau \leq T} f(X_\tau, M_T)$ (конечный временной горизонт) для функций, удовлетворяющих условию однократного пересечения.
3. Доказана гладкость функции цены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, для произвольной однородной диффузии X_t

1. Решена задача $\sup\limits_{\tau \geq 0} f(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$ (бесконечный временной горизонт)
2. Решена задача $\sup\limits_{\tau \leq T} f(X_\tau, M_T)$ (конечный временной горизонт) для функций, удовлетворяющих условию однократного пересечения.
3. Доказана гладкость функции цены.

Вопросы?