# Листок 1

**Задача 1.1.** Докажите, что в любой последовательности различных чисел длины $m \cdot k + 1$ найдется либо возрастающая подпоследовательность длины $m+1$, либо убывающая подпоследовательность длины $k+1$. Постройте пример последовательности длины $m \cdot k$, для которой это свойство не выполняется.

**Задача 1.2.** *(Неравенство Мюрхеда).* Для любой диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ из $n$ клеток определим $\lambda$-*среднее* положительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по формуле

$$M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S(n)} x_1^{\lambda_{w(1)}} x_2^{\lambda_{w(2)}} \dots x_n^{\lambda_{w(n)}},$$

где суммирование идет по всем перестановкам чисел от 1 до $n$.

Будем говорить, что диаграмма $\lambda$ *доминирует* диаграмму $\mu$, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \dots + \mu_k$ для любого $k$. Докажите, что если $\lambda$, $\mu$ состоят из $n$ клеток и диаграмма $\lambda$ доминирует диаграмму $\mu$, то

$$M_\lambda(x_1, \dots, x_n) \geq M_\mu(x_1, \dots, x_n).$$

Выведите отсюда неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

**Задача 1.3.** Пусть $p(n)$ — число различных диаграмм Юнга из $n$ клеток. Докажите, что

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{-1}.$$

**Задача 1.4.** Докажите, что число последовательностей длины $n$, состоящих из единиц и двоек и имеющих максимальную возрастающую подпоследовательность длины $m$, равно

$$\frac{n! \cdot (2m - n + 1)^2}{(m+1)! \cdot (n-m)!}, \qquad m \leq n \leq 2m.$$

**Задача 1.5.** Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *1-липшицевой*, если $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Будем называть $x$-*кривой* график любой 1-липшицевой функции $y = y(x)$. Будем называть $y$-*кривой* график любой 1-липшицевой функции $x = x(y)$.

Пусть в $\mathbb{R}^2$ даны $n$ точек. Докажите, что их можно покрыть с помощью $\sqrt{n}$ $x$-кривых и $\sqrt{n}$ $y$-кривых.

**Задача 1.6.** Пусть $y_k(n)$ — число стандартных таблиц Юнга с $n$ клетками и не более, чем $k$ строками. Докажите, что

$$y_2(n) = \binom{n}{[n/2]}, \qquad y_3(n) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} \binom{n}{2i}.$$